Geometria I a.a. 2014/15.

Alcune osservazioni sulla dualità in spazi proiettivi

Il principio di dualità negli spazi proiettivi può essere trattato elegantemente utilizzando la nozione di annullatore ([Abate] pp 171-172 ed esercizio 8C.2). Riprendiamo da [Sernesi], prima del teorema 26.2. La discussione fatta sino a questo punto dimostra che δ^{-1} induce un'applicazione biunivoca

$$\Sigma : \{ \text{ sottospazi di } P(V)\} \longrightarrow \{ \text{ sottospazi di } P(V^\vee)\}$$

che associa a S il sottospazio $\delta^{-1}(\Lambda_1(S))$. Quest'applicazione scambia le inclusioni e manda sottospazi di dimensione k in sottospazi di dimensione $n-k-1$. Sin qui nulla di nuovo. L'osservazione fondamentale è che

$$\text{se } S = P(W) \text{ allora } \Sigma(S) = P(W^0)\,.$$

Dimostrazione. È bene richiamare la definizione di W^0: $W^0 := \{F \in V^\vee \mid F(\underline{w}) = 0\, \forall \underline{w} \in W\}$. Facciamo vedere che $P(W^0) \subset \Sigma(S)$. Se $[F] \in P(W^0)$ allora è chiaro che $F(\underline{w}) = 0\ \forall \underline{w} \in W$ e quindi $W \subset \mathrm{Ker}F$; ne segue che $S(= P(W))$ è contenuto nell'iperpiano $P(\mathrm{Ker}F)$ definito da F il che vuol dire, per definizione, che $P(\mathrm{Ker}F) \subset \Lambda_1(S)$ o, equivalentemente, che $[F] \in \delta^{-1}(\Lambda_1(S)) \equiv \Sigma(S)$ che è quello che dovevamo dimostrare. Viceversa, se $[F] \in \Sigma(S) = \delta^{-1}(\Lambda_1(S))$, allora $[F] \in P(W^0)$: ciò segue subito dalla Prop. 26.1 di [S].
Conclusione: l'applicazione Σ è indotta dall'applicazione

$$(\ )^0 : \{ \text{ sottospazi di } V\} \longrightarrow \{ \text{ sottospazi di } V^\vee\}$$

che associa a $W \leq V$ il suo annullatore $W^0 \leq V^\vee$. Per l'esercizio 8C.2 in [Abate], che è poi uno degli esercizi del settimo compito a casa, sappiamo che se U e W sono sottospazi di V allora

- $U \subset W \Rightarrow W^0 \subset U^0$
- $(W \cap U)^0 = W^0 + U^0$
- $(W + U)^0 = W^0 \cap U^0$

il che implica che Σ scambia le inclusioni (già lo sapevamo) e scambia *spazio congiungente* con *spazio intersezione*. Un'analoga osservazione vale ovviamente per Σ^{-1}: infatti Σ^{-1} associa al sottospazio proiettivo $P(R)$, con R un sottospazio vettoriale di $V^\vee$, il sottospazio proiettivo $P({}^0R)$.
Una *proposizione grafica*

$$T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$$

è una proposizione che coinvolge i sottospazi proiettivi di dimensione $h_1, \ldots, h_k$, la nozione di spazio congiungente, di spazio intersezione, di contenere ed di essere contenuto. La proposizione grafica *duale*

$$T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$$

è ottenuta scambiando *sottospazi di dimensione* h_j con *sottospazi di dimensione* $n-h_j-1$, *spazi congiungenti* con *spazi intersezione* e *contenere* con *essere contenuto.*
Principio di dualità:
se $T(S_{h_1}, \ldots, S_{h_k}; \cup, \cap, \subset, \supset)$ è una proposizione grafica vera, allora è anche vera la proposizione duale $T^*(S_{n-h_1-1}, \ldots, S_{n-h_k-1}; \cap, \cup, \supset, \subset)$.
Dimostrazione.

Dato che $P(V)$ e $P(V^\vee)$ sono isomorfi, ne segue che se $T(S_{h_1},\dots,S_{h_k};\cup,\cap,\subset,\supset)$ è vera allora è anche vera la proposizione $T(S^\vee_{h_1},\dots,S^\vee_{h_k};\cup,\cap,\subset,\supset)$. Applichiamo ora Σ^{-1} ai sottospazi che intervengono in T; utizzando le proprietà di Σ^{-1} otteniamo che è anche vera

$$T(\Sigma^{-1}(S^\vee_{h_1}),\dots,\Sigma^{-1}(S^\vee_{h_k});\cap,\cup,\supset,\subset)\,;$$

ma quest'ultima proposizione è proprio T^*.

Esempio. (Sernesi p. 317.) Sia T la proposizione: *due punti distinti sono congiunti da una retta*. T può essere scritta come segue:
$P \neq Q \Rightarrow L(P,Q) = S_1$
Ora P e Q sono due S_0 (distinti) e $n-0-1 = n-1$; quindi per individuare la proposizione duale dobbiamo sostituire *punti distinti* con *iperpiani distinti*; poi dobbiamo scambiare *spazio congiungente* di dimensione 1 con *spazio intersezione* di dimensione $n-1-1 = n-2$; ne segue che la duale di T è:
T^*: *due iperpiani distinti si intersecano in un sottospazio di codimensione 2.*