

Siamo ora in grado di esprimere in forma esplicita l'integrale generale dell'equazione omogenea (24.2), cioè l'insieme di tutte le soluzioni di (24.2), nel caso in cui l'equazione abbia i coefficienti  $a_1(x), a_0(x)$  costanti. Consideriamo quindi l'equazione differenziale

$$(24.19) \quad y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

con coefficienti  $a_1, a_0$  costanti. Si noti che, se interpretate come funzioni, le costanti  $a_1, a_0$  sono definite su tutto  $\mathbb{R}$ ; pertanto esprimeremo le soluzioni dell'equazione (24.19) come insieme di funzioni definite su tutto l'asse reale.

All'equazione (24.19) associamo l'equazione caratteristica

$$(24.20) \quad \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

che è un'equazione algebrica di secondo grado nell'incognita  $\lambda$ , le cui soluzioni sono date da

$$(24.21) \quad \lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$

nel caso in cui il discriminante  $\Delta = a_1^2 - 4a_0 > 0$ . Naturalmente, se  $\Delta = a_1^2 - 4a_0 = 0$ , l'equazione caratteristica (24.19) ammette come unica soluzione il numero reale

$$(24.22) \quad \lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Infine se  $\Delta = a_1^2 - 4a_0 < 0$ , la (24.19) non ha soluzioni reali, ma ai fini della risoluzione dell'equazione differenziale corrispondente sono utili le quantità

$$(24.23) \quad \alpha = -\frac{a_1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{\sqrt{-a_1^2 + 4a_0}}{2}$$

(rispettivamente, parte reale e coefficiente della parte immaginaria dei numeri complessi  $\lambda_1, \lambda_2$ ; cioè, con le notazioni dei numeri complessi, risulta  $\lambda_1 = \alpha - i\beta, \lambda_2 = \alpha + i\beta$ ).

**CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRALE GENERALE DELLE EQUAZIONI LINEARI OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI.**

— Tutte le soluzioni dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti (24.19) sono espresse dalla famiglia di funzioni definite su  $\mathbb{R}$

$$(24.24) \quad c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \text{se } \Delta > 0,$$

$$(24.25) \quad c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad \text{se } \Delta = 0,$$

$$(24.26) \quad c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \text{se } \Delta < 0,$$

al variare delle costanti  $c_1, c_2$ , dove  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta, \Delta$  sono le quantità sopra definite, associate all'equazione caratteristica (24.20).