4) $\dfrac{y'}{\sqrt{y}} = \dfrac{-2x}{1-x^2}\,,\ y(2) = 1.$

Deve essere $y > 0$ per dare senso alla radice a denominatore. Quindi la soluzione sarà strettamente positiva. Per quanto riguarda la x, deve essere $x^2 \neq 1$. Dal momento che vogliamo che la soluzione sia definita per $x = 2$, tale soluzione sarà definita al più in $(1, +\infty)$. Con questi presupposti, separiamo le variabili

$$\frac{1}{\sqrt{y}} y' = \frac{-2x}{1-x^2}\,,$$

e, passando alle primitive

$$2\sqrt{y} = \log|1 - x^2| + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Togliamo il modulo, tenendo conto del fatto che la soluzione sarà definita al più sulla semiretta $(1, +\infty)$:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 1) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Determiniamo la costante c utilizzando la condizione iniziale: $1 = (\log 3)/2 + c$. Quindi $c = 1 - (\log 3)/2$ e l'identità diventa

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1\,.$$

Prima di elevare al quadrato ambo i membri dobbiamo imporre

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1 > 0\,,$$

ossia $x^2 - 1 > 3e^{-2}$ e in conclusione $x > \sqrt{1 + 3e^{-2}}$ (ricordiamo che ci eravamo già limitati alle $x > 1$). Quindi la soluzione è

$$y(x) = \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{3}\right) + 1\right]^2\,,$$

definita sulla semiretta $(\sqrt{1+3e^{-2}}, +\infty)$.

5) $y' = \dfrac{x}{y}\, e^{x^2 - y^2}\,,\ y(-1) = 2.$

La soluzione è $y(x) = \sqrt{\log(e^{x^2} + e^4 - e)}$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

6) $y'e^{-y} + x = 0\,,\ y(0) = 0$. La soluzione è $y(x) = -\log\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$ definita su tutto $\mathbb{R}$.