Prova esonero I. a.a. 2020-2021

REGOLE D'ESAME

i) Sono vietati libri, appunti e calcolatrici. Si usa solo la penna !

ii) Telefoni cellulari, smartphones, tablets etc **rigorosamente** spenti.

iii) Risposta sbagliata -1, risposta non indicata 0. Tempo a disposizione: **75 minuti**.

1. Determinare le soluzioni dell'equazione: $|x| = 4 - 12x$

$\boxed{\text{A}}$ $x_1 = 4$, $x_2 = 12$ $\boxed{\text{B}}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ $\boxed{\text{C}}$ $x_1 = 4$ $\boxed{\text{D}}$ $x_1 = \frac{4}{13}$ $\boxed{\text{E}}$ $x_1 = \frac{4}{13}$, $x_2 = \frac{4}{11}$

Risposta: $\boxed{\text{D}}$

2. Rispondere alle seguenti due domande:

2.1. A cosa è uguale $\sqrt[5]{10}\frac{1}{10^3}$?

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt[5]{10^{14}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{\sqrt[5]{10^{14}}}$ $\boxed{\text{C}}$ 100 $\boxed{\text{D}}$ $10^{\frac{3}{5}}$ $\boxed{\text{E}}$ $10^{\frac{5}{3}}$

Risposta: $\boxed{\text{B}}$

2.2. A cosa è uguale $\log_2(\sqrt[5]{8^2})$?

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{5}{6}$ $\boxed{\text{B}}$ $\frac{6}{5}$ $\boxed{\text{C}}$ 32 $\boxed{\text{D}}$ 0 $\boxed{\text{E}}$ $\frac{3}{5}$

Risposta: $\boxed{\text{B}}$

3. Risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} |x-2| \leq 2 \\ -3x^2 + 3x + 6 > 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ $0 \leq x < 2$ $\boxed{\text{B}}$ $2 < x < 4$ $\boxed{\text{C}}$ $0 < x < 4$ $\boxed{\text{D}}$ $x \leq -1$ o $x \geq 4$ $\boxed{\text{E}}$ nessuna sol.

Risposta: $\boxed{\text{A}}$

4. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\frac{\log\sqrt{x^3}}{x^2+2x-3}$

$\boxed{\text{A}}$ $]1, +\infty[$, $\boxed{\text{B}}$ $]0, +\infty[$, $\boxed{\text{C}}$ $\mathbb{R} - \{1\}$, $\boxed{\text{D}}$ $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, $\boxed{\text{E}}$ $]0, 1[\cup]3, +\infty[$

Risposta: $\boxed{\text{D}}$

5. Determinare il limite per $x \to 0$ della funzione

$$\frac{\text{sen}3x}{\text{sen}2x} \cdot (\cos x + 1)$$

$\boxed{\text{A}}$ 3, $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{2}$, $\boxed{\text{C}}$ 0, $\boxed{\text{D}}$ non esiste, $\boxed{\text{E}}$ $+\infty$

Risposta: $\boxed{\text{A}}$

6. Determinare il valore della derivata nel punto $x = 0$ della funzione $\log\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$

$\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 1 $\boxed{\text{C}}$ -1 $\boxed{\text{D}}$ 2 $\boxed{\text{E}}$ -2

Risposta: $\boxed{\text{B}}$

In questo stesso foglio risolvete il seguente esercizio, indicando brevemente i passaggi che hanno portato alla vostra soluzione.

7. Si consideri la funzione $f(x) = 2 - x^2 + \log(2x + 2)$.

i) Studiare l'andamento della funzione agli estremi dell'insieme di definizione: stabilire se esistono asintoti verticali/orizzontali ed in caso affermativo determinarli.

ii) Stabilire se esistono punti di massimo/minimo relativo di $f(x)$ ed in caso affermativo determinarli. Disegnare il grafico.

Risposta).

(i) La funzione è definita nell'intervallo dove l'argomento del logaritmo è strettamente positivo. Quindi $\mathrm{Dom}(f) = (-1, +\infty)$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, infatti

$$2 - x^2 + \log(2x + 2) = -x^2(\frac{(-2)}{x^2} + 1 - \frac{\log(2x + 2)}{x^2})$$

ed il limite del membro a destra è uguale a

$$(\lim_{x\to+\infty}(-x^2)) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(-2)}{x^2} + 1 - \frac{\log(2x + 2)}{x^2}\right)\right) = -\infty$$

perché il primo limite è uguale a $-\infty$ mentre secondo limite è uguale a $0 + 1 - 0 = 1$ (tutti limiti notevoli). Ne segue che non ci sono asintoti orizzontali a $+\infty$. [1] Si ha poi $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 2 - 1 - \infty = -\infty$ e quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale. La derivata $f'(x)$ è uguale a $\frac{1-2x-2x^2}{1+x}$. Nell'insieme di definizione esiste un solo punto ove si annulla la derivata e questo è il punto $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. La derivata è positiva per $x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e negativa per $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; questo è quindi un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di minimo relativo. È ora facile disegnare in maniera approssimativa il grafico di questa funzione.

[1] Non esiste asintoto obliquo a $+\infty$, infatti non esiste finito il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$; tuttavia, l'esistenza di un asintoto obliquo non era esplicitamente richiesta ....