▶ **Esercizio 1.22.** *Sia $\Sigma : \lambda\mathcal{C} + \mu\mathcal{D}$ un fascio di curve di grado n. Si dimostri che se $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = k$, allora $I_P(\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}) = k$, per ogni $\overline{\mathcal{C}}$, $\overline{\mathcal{D}}$ curve distinte di Σ.*

Soluzione:

Infatti se $\mathcal{C} : F(\mathrm{X}) = 0$ e $\mathcal{D} : G(\mathrm{X}) = 0$, allora

$$I_P(\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}) = I_P(\lambda F + \mu G; \lambda' F + \mu' G)\,,$$

con (λ, μ) non proporzionale a (λ', μ').

Intanto osserviamo che se $\lambda = 0$ (oppure $\mu = 0$) (e analogamente si ragiona se $\lambda' = 0$ oppure $\mu' = 0$), allora

$$I_P(\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}) = I_P(\mu G; \lambda' F + \mu' G) = I_P(F; G),$$

per la Proprietà 3 della molteplicità d'intersezione.

Sia allora $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\lambda' \neq 0$, $\mu' \neq 0$. Si ha

$$\begin{aligned} I_P(\overline{\mathcal{C}} \cap \overline{\mathcal{D}}) &= I_P(\lambda'\lambda F + \lambda'\mu G; \lambda\lambda' F + \lambda\mu' G) = \\ &= I_P(\lambda'\lambda F + \lambda'\mu G - \lambda\lambda' F - \lambda\mu' G; \lambda\lambda' F + \lambda\mu' G) = \\ &= I_P((\lambda'\mu - \lambda\mu')G; \lambda\lambda' F + \lambda\mu' G) = \\ &= I_P(G; F), \end{aligned}$$

essendo $\lambda'\mu - \lambda\mu' \neq 0$, dato che, per ipotesi, (λ, μ) e (λ', μ') non sono proporzionali. ◀

▶ **Esercizio 1.23.** *Fasci di coniche.*

In $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, con coordinate omogenee (X_0, X_1, X_2), sia

$$\Sigma : \lambda(\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} X_i X_j) + \mu(\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} X_i X_j) = 0$$

l'equazione di un fascio di coniche. Scritta l'equazione data nella forma equivalente

$$\sum_{i,j=0}^{2} (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) X_i X_j = 0,$$

la matrice associata ad una conica di Σ è

$$A(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda a_{00} + \mu b_{00} & \lambda a_{01} + \mu b_{01} & \lambda a_{02} + \mu b_{02} \\ \lambda a_{10} + \mu b_{10} & \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{20} + \mu b_{20} & \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Le coniche degeneri del fascio si ottengono in corrispondenza delle coppie $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ per cui $\det(A(\lambda, \mu)) = 0$, che è un'equazione omogenea di terzo grado in λ e μ, se non è identicamente nulla, nel qual caso ogni conica è riducibile. Abbiamo pertanto:

in un fascio di coniche, non tutte degeneri, vi sono tre coniche degeneri (eventualmente coincidenti).

Se si deomogenizza l'equazione di Σ, si ottiene un fascio di coniche di $\mathbf{A}^2(\mathbf{C})$ e l'equazione

$$\det\begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\mu b_{11} & \lambda a_{12}+\mu b_{12} \\ \lambda a_{21}+\mu b_{21} & \lambda a_{22}+\mu b_{22}\end{pmatrix} = 0$$

fornisce i valori di λ e μ in corrispondenza dei quali si hanno le parabole del fascio e poiché si tratta di un'equazione di secondo grado, *ogni fascio di coniche affini contiene due parabole.*

I *punti base* di un fascio di coniche di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ sono i punti comuni a due diverse coniche del fascio. Per il Teorema di Bézout un fascio di coniche contiene quattro punti base, se non c'è una componente fissa. Inoltre, per un punto diverso dai punti base passa una ed una sola conica del fascio.

Nello studio dei fasci di coniche è utile la seguente osservazione. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due coniche di un fascio e sia $I_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{D}) = k \geq 1$, con P punto base del fascio. Allora (v. esercizio precedente), tutte le coniche del fascio hanno in P, a due a due, molteplicità d'intersezione k. Se $\mathcal{E}$ è una conica di $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ tale che $I_P(\mathcal{C}\cap\mathcal{E}) = I_P(\mathcal{D}\cap\mathcal{E}) = k$, per ogni punto base del fascio, allora $\mathcal{E}$ è una conica del fascio.

I punti base possono variamente coincidere. Se A, B, C, D sono i quattro punti base di un fascio di coniche, privo di componenti fisse, si hanno le seguenti possibilità:

(1) *A, B, C, D tutti e quattro distinti.* Le tre coppie di rette

$$(AB, CD),\ (AC, BD),\ (AD, BC)$$

sono coniche riducibili che passano per i punti base del fascio e quindi sono le tre coniche riducibili del fascio. Si noti che i punti base sono a tre a tre non allineati, perché altrimenti il fascio avrebbe una componente fissa.

Un'equazione del fascio può ottenersi rapidamente combinando linearmente le equazioni di due delle tre coniche degeneri.

(2) *Due punti base coincidenti.* Per esempio, $A = B$. Per il Teorema di Bézout, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono due coniche irriducibili del fascio, al-

lora $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 2$. Pertanto, poiché ogni punto di $\mathcal{C}$ e di $\mathcal{D}$ è semplice, necessariamente $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ hanno in A la stessa retta tangente (conseguenza della Proprietà 4 della molteplicità d'intersezione). Quindi (v. esercizio 1.22) tutte le coniche hanno in A la stessa retta tangente, che indichiamo simbolicamente con AA. Si parla in tal caso di *fascio di coniche tangenti.*

Le coniche degeneri del fascio sono

$$(AA, CD),\ (AC, AD)\,,$$

ove la conica degenere (AC, AD) va contata due volte.

Un'equazione del fascio può ottenersi combinando linearmente le equazioni delle due coniche degeneri.

(3) *Punti base coincidenti a coppie.* Ad esempio, $A = B$ e $C = D$. Ragionando come nel caso precedente, si ha, per ogni coppia di coniche irriducibili del fascio, $I_A(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = I_C(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 2$. Quindi tutte le coniche (irriducibili) del fascio hanno in A e in C le stesse rette tangenti (*fascio di coniche bitangenti*). In tal caso le coniche degeneri del fascio sono le coppie di rette

$$(AA, CC),\ (AC, AC)\,,$$

ove la scrittura (AC, AC) significa conica spezzata nella retta doppia AC. Quest'ultima conica degenere va contata due volte.

Anche in questo caso un'equazione del fascio può ottenersi combinando linearmente le equazioni delle due coniche degeneri.

(4) *Tre punti base coincidenti.* Per esempio $A = B = C$. In tal caso, per ogni coppia di coniche non degeneri del fascio, $I_A(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 3$. Tutte le coniche (non degeneri) del fascio hanno in A la stessa retta tangente, AA, e a due a due hanno molteplicità d'intersezione tre in A (*fascio di coniche osculantisi*). Le coniche degeneri del fascio si riducono alla coppia di rette (AA, AD) da contarsi tre volte.

(5) *Quattro punti base coincidenti.* Per ogni coppia di coniche non degeneri del fascio, $I_A(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 4$. Tutte le coniche (non degeneri) hanno in A la stessa retta tangente, AA, e a due a due hanno molteplicità d'intersezione quattro in A (*fascio di coniche iperosculantisi*). Le coniche degeneri del fascio si riducono alla coppia di rette (AA, AA) da contarsi tre volte. ◀