Corso di Laurea in Scienze Naturali. a.a. 2022-23.
Istituzioni di Matematica. Canale 2.
Prof. Paolo Piazza

Alcuni limiti notevoli

1. $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$

   $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad n \quad \text{è pari} \\ -\infty & \text{se} \quad n \quad \text{è dispari} \end{cases}$

2. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ se $n \in \mathbb{N}^+$.

   $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} == \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad n \quad \text{è pari} \\ -\infty & \text{se} \quad n \quad \text{è dispari} \end{cases}$

4. $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

5. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha > 0 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 0 \end{cases}$

6. $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

   $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad 0 < a < 1 \end{cases}$

7. $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

8. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ dove $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

9. $\lim_{x\to\pi^-} \cot x = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} \cot x = +\infty$ dove $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

10. $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e quindi anche $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)}{x} = 1$
(segue dall'ultimo limite scrivendolo come $\lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$ e poi ponendo $y = \log(1+x)$).

14. $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

15. $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha$

16. $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$ se $a > 1$; equivalentemente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^x} = 0$
(l'esponenziale con base $a > 1$ va all'infinito più velocemente di $f(x) = x$)

Più in generale,
$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \ \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$; equivalentemente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \ \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
(l'esponenziale con base $a > 1$ va all'infinito più velocemente di qualsiasi potenza;
detto diversamente:
la funzione esponenziale è infinita di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza)

17. $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\lg x)}{x} = 0$, equivalentemente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\lg x)} = +\infty$
(il logaritmo naturale va all'infinito più lentamente di $f(x) = x$)

Più in generale,
$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\lg x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$, equivalentemente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{(\lg x)^\alpha} = +\infty \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0$
(le potenze del logaritmo vanno all'infinito più lentamente di qualsiasi potenza positiva di x;
detto diversamente:
una qualsiasi potenza del logaritmo è infinita di ordine inferiore rispetto ad una qualsiasi potenza positiva di x)

18. $\lim_{x\to 0+} x \lg x = 0$ (segue dal precedente limite, riscritto come $\lim_{y\to+\infty} \frac{(\lg y)}{y} = 0$, ponendo $y = \frac{1}{x}$);
più in generale si ha :
$\lim_{x\to 0+} x^\beta |\lg x|^\alpha = 0 \ \forall \beta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
vale anche:
$\lim_{x\to 0} |x|^\beta |\lg |x||^\alpha = 0 \ \forall \beta > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

19. Se $P(x) = a_p x^p + \cdots + a_0$ è un polinomio di grado p e $Q(x) = b_q x^q + \cdots + b_0$ è un polinomio di grado q allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q > p \\ a_p/b_q & \text{se} \quad q = p \\ +\infty & \text{se} \quad q < p \end{cases}$.