

Lezioni di Variabile Complessa  
Paolo Piazza

## Introduzione

Queste note seguono il programma svolto durante l'anno accademico 2022-2023 per il corso di *Variabile Complessa* da me tenuto presso il Dipartimento di Matematica di Sapienza Università di Roma (48 ore). Esse sono una rielaborazione di quelle raccolte durante l'anno accademico 2021-2022 da:

Daniele Arbore  
Filippo Birindelli  
Andrea Cesari  
Luigi De Filpo  
Giulio De Santis  
William Riccardo Duro  
Leonardo Felicetti  
Silvia Gangeri  
Carmine Imbriani  
Giacomo Landi  
Lucrezia Beatrice Lorenzi  
Domenico Marino  
Marco Picerni  
Federico Renzi  
Valerio Ricciardi  
Sara Rinaldi  
Alessandra Vita

per un mio analogo corso per l'anno accademico 2021-2022 (questa volta di 60 ore). Ringrazio calorosamente questi studenti per l'eccellente lavoro svolto. Sia per le lezioni che per le esercitazioni, ho attinto liberamente dai seguenti testi:

[C] John B. Conway. *Functions of one complex variable*. Graduate texts in Mathematics, Springer. Seconda edizione. 1978.

[FB] Eberhard Freitag e Rolf Busam. *Complex analysis*. Springer. 2005.

[G] Theodore W. Gamelin. *Complex Analysis*. Springer. 2001

[GM] Adriana Garroni e Annalisa Malusa. *Appunti di Analisi Matematica II*. Disponibile al link <https://drive.google.com/file/d/1mi0XBx3CYuxn0Na8xfOc45cVC1ba0Ag3/view>

[L] Flavia Lanzara. *Funzioni di una variabile complessa. Elementi di teoria ed esercizi svolti*. Edizioni La Dotta. 2015

[O] Luigi Orsina. *Appunti di Variabile Complessa*. Disponibile al link <https://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/IAS/AnalisiComplessa.pdf>

[R] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third edition. McGraw Hill 2001.

[SS] Elias M. Stein and Ravi Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[W] Torsten Wedhorn. *Complex Analysis*. Appunti disponibili al link <https://www.maths.tcd.ie/~zaitsev/topics-ca/wedhorn-Complex-Analysis.pdf>

Gli esercizi relativi al corso sono reperibili alla pagina web:

<https://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/vc-22-23.htm>

Roma, 4 Giugno 2023.

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sui numeri complessi</b>	<b>5</b>
1.1	Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ . . . . .	5
1.2	Parte reale, parte immaginaria, coniugio . . . . .	5
1.3	La struttura di spazio metrico di $\mathbb{C}$ . . . . .	5
1.4	Coordinate Polari. Radici $n$ -me . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Teorema di Cauchy-Riemann</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Funzioni analitiche</b>	<b>11</b>
4.1	Richiami: convergenza per serie di funzioni . . . . .	11
4.2	Richiami sul massimo e minimo limite di una successione. . . . .	11
4.3	Enunciato del teorema di Hadamard . . . . .	12
4.4	La funzione esponenziale $e^z$ . . . . .	13
4.5	Dimostrazione del teorema di Hadamard . . . . .	13
4.6	Conseguenze del teorema di Hadamard . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Analiticità e olomorfia</b>	<b>18</b>
5.1	Analiticità e primi risultati . . . . .	18
5.3	Il logaritmo principale . . . . .	19
5.4	Rami del logaritmo . . . . .	21
5.5	Funzioni trigonometriche . . . . .	22
5.6	Principio d'identità delle funzioni analitiche . . . . .	22
5.7	Integrazione complessa . . . . .	23
5.8	Primitive e Teorema di Goursat . . . . .	24
5.9	Formula locale di Cauchy . . . . .	26
5.10	Se $f$ è olomorfa allora $f$ è analitica . . . . .	27
5.11	Disuguaglianza di Cauchy e teorema di Liouville . . . . .	27
5.12	Principio del massimo modulo . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Teorema di omotopia</b>	<b>30</b>
6.1	Risultati di regolarità e Teorema di Morera . . . . .	30
6.2	Teorema di omotopia . . . . .	30
6.3	Domini semplicemente connessi e rami del logaritmo . . . . .	30
6.4	Appendice: risultati di approssimazione per le curve . . . . .	32
<b>7</b>	<b>Formule di Cauchy globali</b>	<b>34</b>
7.1	Formula di Cauchy in una regione regolare . . . . .	34
7.2	Indice di avvolgimento . . . . .	35
7.3	Teorema di Cauchy globale . . . . .	36
7.4	Omologia ed indice di allacciamento . . . . .	38
7.5	Formula omologica di Cauchy . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Zeri di una funzione olomorfa</b>	<b>42</b>
8.1	Ordine di uno zero. . . . .	42
8.2	Contare gli zeri . . . . .	42
<b>9</b>	<b>Teorema dell'applicazione aperta</b>	<b>44</b>
<b>10</b>	<b>Singolarità isolate e residui</b>	<b>45</b>
10.1	Sviluppo di Laurent . . . . .	45
10.2	Classificazione delle singolarità . . . . .	46
10.3	Residui . . . . .	48
10.4	Funzioni Meromorfe . . . . .	50
10.5	La sfera di Riemann . . . . .	50
10.6	Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann . . . . .	51

<b>11 Applicazioni del Teorema dei Residui</b>	<b>53</b>
11.1 Valore principale . . . . .	53
11.2 Integrali di funzioni razionali . . . . .	53
11.3 Lemma di Jordan e applicazioni . . . . .	54
11.4 Teorema del residuo frazionario . . . . .	56
11.5 Integrali di funzioni trigonometriche . . . . .	56
<b>12 Contare zeri e poli. Teorema di Rouché.</b>	<b>57</b>
12.1 Contare zeri e poli di una funzione meromorfa . . . . .	57
12.2 Teorema di Rouché . . . . .	57
12.3 Applicazioni del Teorema di Rouché . . . . .	58
<b>13 Successioni di funzioni olomorfe</b>	<b>61</b>
13.1 Teorema di Weierstrass . . . . .	61
13.2 Teorema di Runge . . . . .	62
<b>14 Mappe conformi e bi-olomorfismi</b>	<b>65</b>
14.1 Mappe conformi . . . . .	65
14.2 Bi-olomorfismi . . . . .	66
14.3 Trasformata di Cayley . . . . .	66
14.4 Trasformazioni lineari fratte . . . . .	67
14.5 Automorfismi di $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$ . . . . .	67
<b>15 Teorema della mappa di Riemann</b>	<b>71</b>
15.1 Teorema di Ascoli-Arzelà e Montel . . . . .	71
15.2 Teorema della mappa di Riemann . . . . .	72
<b>16 Caratterizzazione dei domini semplicemente connessi</b>	<b>75</b>
16.1 Funzioni armoniche . . . . .	75
16.2 Enunciato del teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi . . . . .	76
16.3 Dimostrazione del teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi . . . . .	76
<b>17 Prodotti infiniti</b>	<b>79</b>
<b>18 Teorema di fattorizzazione di Weierstrass</b>	<b>84</b>
18.1 Fattori elementari e loro proprietà . . . . .	84
18.2 Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per funzioni intere . . . . .	84
18.3 La funzione $\sigma$ di Weierstrass . . . . .	85
18.4 Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass in domini generali . . . . .	87
<b>19 Il Teorema di Mittag-Leffler</b>	<b>88</b>
19.1 Preliminari topologici . . . . .	88
19.2 Ancora sul teorema di Runge . . . . .	88
19.3 Teorema di Mittag-Leffler e primi esempi . . . . .	88
19.4 La funzione $\varphi$ di Weierstrass . . . . .	89
<b>20 La funzione gamma</b>	<b>91</b>
20.1 La funzione $\Gamma(s)$ in $\mathbb{C}$ . . . . .	91
20.2 Fattorizzazione di $\Gamma(s)$ . . . . .	93

# 1. Richiami sui numeri complessi

## 1.1. Il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$

Iniziamo subito col definire una struttura di campo in  $\mathbb{R}^2$ . Introduciamo le operazioni di somma e prodotto

$$\begin{aligned} +: & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ \cdot: & (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned} \quad (1.1)$$

e definiamo i rispettivi elementi neutri come  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Infine, definiamo l'inverso di  $(a, b) \neq (0, 0)$  nel seguente modo:

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad (1.2)$$

$\mathbb{R}^2$ , dotato di queste due operazioni, è denotato con il simbolo  $\mathbb{C}$  ed è un campo, il campo dei numeri complessi. La verifica che  $\mathbb{C}$  è un campo è elementare e lasciata per esercizio. Consideriamo ora la coppia  $(0, 1)$  e identifichiamola con la lettera  $i$ ; notiamo subito che

$$i(b, 0) = (0, 1) \cdot (b, 0) = (0, b)$$

quindi è lecita la scrittura

$$(a, b) = (a, 0) + i(b, 0) \quad (1.3)$$

ed essendo  $\mathbb{R} \ni x \longleftrightarrow (x, 0) \in \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  un'identificazione tra il campo dei reali ed un sottocampo di  $\mathbb{C}$ , è ben definita l'usuale scrittura

$$(a, b) = a + ib \quad (1.4)$$

Dalla definizione di prodotto e da come abbiamo definito  $i$  si ha subito che  $i^2 = (-1, 0) = -1$ . È immediato che le due operazioni in  $\mathbb{C}$  possono essere svolte operando formalmente con la scrittura  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , utilizzando le operazioni in  $\mathbb{R}$  e tenendo conto che  $i^2 = -1$

## 1.2. Parte reale, parte immaginaria, coniugio

Posto  $z = a + ib$ , definiamo *parte reale* e *parte immaginaria* di  $z$  le immagini di  $z$  tramite le funzioni  $\Re(\cdot)$  e  $\Im(\cdot)$  dove

$$\begin{aligned} \Re: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & \Im: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z = a + ib &\mapsto a & z = a + ib &\mapsto b \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\bar{z}$  il *coniugato* di  $z$  definito come  $\bar{z} = a - ib$  e notiamo subito che gode della proprietà involutiva:  $\bar{\bar{z}} = z \forall z \in \mathbb{C}$ . Il coniugio è additivo e moltiplicativo, pertanto

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si ha inoltre  $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$  ed è quindi ben definito  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$ . Notiamo infine che

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

## 1.3. La struttura di spazio metrico di $\mathbb{C}$

Definiamo ora una struttura di spazio metrico in  $\mathbb{C}$ ; prendiamo come distanza tra due numeri complessi il modulo della differenza

$$d_{\mathbb{C}}(z, w) = |z - w| \quad (1.6)$$

Notiamo subito che  $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot))$  è uno spazio metrico, isometrico a  $(\mathbb{R}^2, d_2(\cdot, \cdot))$ , e ciò garantisce che in  $\mathbb{C}$  rimangono ben definite tutte le nozioni inerenti gli spazi metrici già viste nei corsi di *Analisi I* e *Analisi II*.

Vediamo ora alcune importanti disuguaglianze.

$\forall z, w \in \mathbb{C}$  si ha:

1.  $|\Re(z)| \leq |z|, |\Im(z)| \leq |z|$
2.  $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
3.  $|z| - |w| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

**Osservazione 1.1.** Dalle prime due disuguaglianze capiamo che una successione  $\{z_n\}$  converge a  $z$  se e solo se  $\{\Re(z_n)\}$  e  $\{\Im(z_n)\}$  convergono a  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$  rispettivamente.

#### 1.4. Coordinate Polari. Radici $n$ -me

Introduciamo le coordinate polari per  $z \neq 0$ .

**Definizione 1.2.** L'*argomento principale* di  $z$  è una funzione  $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  tale che

$$\begin{aligned} \cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{\Re(z)}{|z|} \\ \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{\Im(z)}{|z|} \end{aligned} \quad (1.7)$$

La definizione è ben posta dato che la somma dei quadrati dei membri a destra dell'uguaglianza è uguale a 1.

Siamo dunque pronti a scrivere un numero complesso nella sua forma polare nel seguente modo:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.8)$$

dove chiaramente abbiamo posto  $\theta = \text{Arg}(z)$ .

La funzione *argomento* di  $z$  viene definita come

$$\text{arg}(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.9)$$

Dalle già note formule trigonometriche ricaviamo che

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \quad (1.10)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} (\cos \theta - i \sin \theta) \quad (1.11)$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (1.12)$$

da cui segue l'espressione fondamentale

$$\boxed{z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))} \quad (1.13)$$

Quest'ultima ci consente di scrivere tutte le soluzioni <sup>1</sup> dell'equazione

$$z^n = w, \quad \text{con } w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.14)$$

Queste sono:

$$z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0 : n-1 \quad (1.15)$$

Dalla loro espressione si evince che sono tutte giacenti sulla circonferenza di centro 0 e raggio  $\sqrt[n]{|w|}$ , disposte in modo da occupare i vertici di un  $n$ -gono regolare.

---

<sup>1</sup>il *Teorema fondamentale dell'algebra* ci assicura che ce ne sono precisamente  $n$ , contando molteplicità

## 2. Funzioni olomorfe

Iniziamo con un paio di definizioni preliminari.

**Definizione 2.1** (Dominio).  $E$  è un dominio di  $\mathbb{C}$  se  $E$  è un aperto connesso di  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.2** (Derivata). Sia  $E$  un dominio di  $\mathbb{C}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  funzione complessa di variabile complessa,  $z_0 \in E$ . Allora  $f$  si dice derivabile (in senso complesso) in  $z_0$  se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

In tal caso si denota tale limite con il simbolo  $f'(z_0)$ ; questo valore è la *derivata complessa* di  $f$  in  $z_0$ .

**Definizione 2.3** (o-piccolo). Siano  $\phi(x)$  e  $\psi(x)$  due funzioni reali, definite in un intorno di 0. Diremo che  $\phi(x)$  è  $o(\psi(x))$  per  $x \rightarrow 0$  se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0 \quad (2.2)$$

Un'analogha definizione può essere data per funzioni complesse di variabile complessa.

**Proposizione 2.4.**  $f$  derivabile in  $z_0 \implies$

- (i)  $f$  è continua in  $z_0$
- (ii) detta  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione vettoriale  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  corrispondente a  $f = u + iv$ , allora  $F$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.*

- (i)  $f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$  passando al limite per  $z \rightarrow z_0$  si ha che il membro di sinistra diventa un prodotto tra un fattore che tende a  $f'(z_0)$  e un altro che tende a 0 quindi tutto quanto tende a 0. Si ottiene quindi  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0$  da cui la tesi.
- (ii) l'ipotesi innanzitutto è che esista il limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$  e ciò è equivalente a dire che

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|) \quad (2.3)$$

Osserviamo che la moltiplicazione complessa per un fissato numero complesso  $z$ ,  $\mathbb{C} \ni w \rightarrow zw \in \mathbb{C}$ , definisce un'applicazione che è lineare dallo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^2$  in se stesso (una volta utilizzata l'identificazione di  $\mathbb{C}$  con i vettori colonna di  $\mathbb{R}^2$ ). Più precisamente, se  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  allora

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

il che mostra anche che la matrice associata alla moltiplicazione per  $z$  è di una forma molto speciale. Ponendo  $h = \alpha + i\beta$ ,  $f'(z_0) = a + ib$  si ottiene quindi

$$F(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad (2.5)$$

che, per definizione, ci dice che  $F$  è differenziabile e la Jacobiana di  $F$  in  $(x_0, y_0)$  vale proprio

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

□

**Definizione 2.5.** Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione complessa di variabile complessa su un aperto  $E \subset \mathbb{C}$ ; diremo che  $f$  è *olomorfa* in  $E$  se è derivabile in ogni punto di  $E$ . Diremo inoltre che  $f$  è olomorfa in un insieme, non necessariamente aperto,  $F \subset \mathbb{C}$  se esiste un insieme  $E$  aperto tale che  $F \subset E$  e una funzione  $f_E$  olomorfa in  $E$  che estende  $f$ . Una funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$  viene detta *intera*.

**Osservazione 2.6.** Notiamo che a differenza di alcuni testi **non poniamo ipotesi ulteriori su  $u, v$  tali che  $f = u + iv$ .**<sup>2</sup>

**Proposizione 2.7.** Siano  $f_1, f_2$  funzioni olomorfe in  $E$ , allora

- $f = f_1 + f_2$  è una funzione olomorfa e  $f' = f_1' + f_2'$
- $f = f_1 \cdot f_2$  è una funzione olomorfa e  $f' = f_1'f_2 + f_1f_2'$
- $f = \frac{f_1}{f_2}$ , con  $f_2(z) \neq 0 \forall z \in E$ , è una funzione olomorfa e  $f' = \frac{f_1'f_2 - f_1f_2'}{f_2^2}$
- la composizione di funzione olomorfe, quando definita, è olomorfa e vale l'usuale regola.

La dimostrazione della Proposizione procede come per le analoghe proprietà per le funzioni reali ed è lasciata per esercizio al lettore.

**Esempio 2.8.** (Esempi e non-esempi di funzioni olomorfe)

1.  $f(z) = k$ , la funzione costante è chiaramente intera  $\mathbb{C}$  e  $f'$  identicamente nulla.
2.  $f(z) = z$ , l'identità è una funzione intera e vale  $f'(z) = 1$ .
3.  $f(z) = z^n$  è una funzione intera e si ha  $f'(z) = nz^{n-1}$ .
4.  $f(z) = \Re(z)$  non è olomorfa in nessun aperto di  $\mathbb{C}$ .
5.  $\text{Arg}(z)$  non è olomorfa.

*Dimostrazione.* (1) e (2) sono lasciate per esercizio.

(3) è sufficiente notare che  $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_1z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} z_0^j = \sum_{j=0}^{n-1} z_0^{n-1} = nz_0^{n-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

da cui la tesi.

(4) è sufficiente osservare che se tale limite esistesse allora

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{\Im(z) \rightarrow \Im(z_0) \\ \Re(z) = \Re(z_0)}} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} = 0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{\Re(z) \rightarrow \Re(z_0) \\ \Im(z) = \Im(z_0)}} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

il che non può essere.

(5) Non può essere olomorfa in quanto c'è una discontinuità non eliminabile sull'insieme

$$A = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}^-\}.$$

Tuttavia, anche ridefinendo la funzione nel complementare di  $A$ , definendo quindi  $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow (-\pi, \pi]$ , non otterremmo comunque una funzione olomorfa poiché

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\text{Arg}(tz_0) - \text{Arg}(z_0)}{tz_0 - z_0} = 0 \quad (2.9)$$

in quanto il numeratore è costante 0. Allo stesso tempo, ponendo  $z_0 = \rho e^{i\theta}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{\text{Arg}(\rho e^{i\phi}) - \text{Arg}(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\phi} - \rho e^{i\theta}} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{\phi - \theta}{\rho(\cos \phi - \cos \theta + i(\sin \phi - \sin \theta))} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\cos \phi - \cos \theta}{\phi - \theta} + i \frac{\sin \phi - \sin \theta}{\phi - \theta} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho} (-\sin \theta + i \cos \theta)^{-1} = -\frac{i}{z_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

che è chiaramente un valore diverso da 0. □

<sup>2</sup>In alcuni testi si richiede che queste due funzioni siano  $C^1$ .

### 3. Teorema di Cauchy-Riemann

**Teorema 3.1** (Cauchy-Riemann). Siano  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a valori complessi. Allora  $f$  è derivabile in  $z_0 \in E$  se e solo se

- (i) le funzioni  $u(x, y) = \Re(f)$ ,  $v(x, y) = \Im(f)$  sono differenziabili in  $z_0 = (x_0, y_0)$
- (ii) valgono le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

In tale caso

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) - iv_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iv_x(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Inoltre

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ -u_y(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $z_0$ .

- (i) Le due funzioni  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$  perché  $F = (u, v)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .
- (ii) Verifichiamo che valgono le equazioni di Cauchy-Riemann ( $h = \alpha + i\beta$ )

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0) - v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] \quad (3.4)$$

Per ipotesi  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a + ib \quad (3.5)$$

E analizzando i casi in cui  $h \rightarrow 0$  lungo gli assi, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ h = \alpha}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ h = i\beta}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{i}(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = v_y(x_0, y_0) - iv_x(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

da cui

$$\boxed{\begin{aligned} a &= u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ b &= v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

ossia la tesi.

La formula per la matrice Jacobiana segue subito da (2.6).

Dimostriamo l'altra implicazione. Per l'ipotesi (i):

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + v_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Applicando (3.1):

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= -v_y(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + u_x(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Segue:

$$\begin{aligned}
& \frac{f(z_0 + (\alpha + i\beta)) - f(z_0)}{\alpha + i\beta} = \\
& = \frac{u_x(x_0, y_0)(\alpha + i\beta) + iv_x(x_0, y_0)(\alpha + i\beta)}{\alpha + i\beta} + \frac{o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} + \frac{io(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} = \quad (3.9) \\
& = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} + \frac{io(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta}
\end{aligned}$$

Per definizione di o (o-piccolo) (2.3), segue la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.2.** Osserviamo che se  $f$  è olomorfa allora da Cauchy-Riemann si ha

$$\det J_f(z) = |f'(z)|^2 = \|\nabla u\|^2 = \|\nabla v\|^2 \quad (3.10)$$

In particolare notiamo che  $\det J_f(z) \geq 0$ .

**Osservazione 3.3.** (Forma equivalente delle equazioni di Cauchy-Riemann (3.1).)

(i) Possiamo scrivere le equazioni di Cauchy-Riemann nella seguente forma compatta:

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) + if_y(x_0, y_0) = 0} \quad (3.11)$$

Infatti a sinistra abbiamo:

$$\begin{aligned}
& u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = \\
& (u_x(x_0, y_0) - v_y(x_0, y_0) + i(v_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0)))
\end{aligned}$$

e quindi  $f_x(x_0, y_0) + if_y(x_0, y_0) = 0$  se e solo se:

$$\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\
v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann.

(ii) Introducendo gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

possiamo quindi scrivere questa forma equivalente a (3.1) come segue:

$$\boxed{\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right)(x_0, y_0) = 0} \quad (3.12)$$

In tal caso  $f'(z_0) = \left( \frac{\partial}{\partial z} f \right)(z_0)$ .

**Proposizione 3.4.** Se  $f$  è olomorfa in un dominio  $E$  e la sua derivata è identicamente nulla, allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Utilizzando l'osservazione 3.2 vediamo che i gradienti  $\nabla u = (u_x, u_y)$  e  $\nabla v = (v_x, v_y)$  sono identicamente nulli sul dominio di definizione  $E$  di  $f$ . Questo implica che  $u$  e  $v$  sono costanti, perché  $E$  è connesso, e quindi anche  $f = u + iv$  è costante.  $\square$

## 4. Funzioni analitiche

### 4.1. Richiami: convergenza per serie di funzioni

**Definizione 4.1** (Convergenza per serie di funzioni). La serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) \quad f_k: E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

identificata con la successione delle somme parziali

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

converge in  $E$ :

- (i) *puntualmente* se per ogni  $z_0 \in E$  converge la serie numerica  $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k(z_0)$
- (ii) *assolutamente* se per ogni  $z_0 \in E$  converge la serie dei valori assoluti  $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(z_0)|$
- (iii) *uniformemente* se converge uniformemente la successione (4.2)  
i.e. se esiste  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - s_n\|_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{z \in E} |f(z) - s_n(z)| \right] = 0$$

- (iv) *totalmente* se converge la serie numerica  $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$  dove

$$\|f\|_\infty := \sup_{z \in E} |f(z)| \quad f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

**Osservazione 4.2.** Sono ben note le seguenti implicazioni per le nozioni di convergenza:

$$\text{totale} \implies \text{uniforme} \implies \text{puntuale}; \quad \text{totale} \implies \text{assoluta} \implies \text{puntuale}.$$

### 4.2. Richiami sul massimo e minimo limite di una successione.

Daremo semplicemente le definizioni e alcuni risultati utili.

**Definizione 4.3.** (Massimo e minimo limite di una successione in  $\mathbb{R}$ )

Sia  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathbb{R}$ .

Se  $a_k$  non è limitata superiormente, allora poniamo

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k := +\infty.$$

Altrimenti, sia

$$\mathcal{M} := \{M \in \mathbb{R} \mid \exists \nu \in \mathbb{N}: M \geq a_k \quad \forall k \geq \nu\}$$

allora

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k := \inf(\mathcal{M}).$$

A parole:  $\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k$  è l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi.

Analogamente si definisce  $\liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k$ : se  $a_k$  non è limitata inferiormente, allora

$$\liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k := -\infty.$$

Altrimenti sia

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathbb{R} \mid \exists \nu \in \mathbb{N}: a_k \geq N \quad \forall k \geq \nu\}$$

allora

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k := \sup(\mathcal{N}).$$

A parole:  $\liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k$  è l'estremo superiore dei minoranti definitivi.

**Proposizione 4.4.** (Risultati dal Giusti *Analisi Matematica, vol 1, sezione 2*)

1.  $\limsup a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} a_k)$
2.  $\liminf a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} a_k)$
3. Il massimo (minimo) limite della successione  $a_k$  è l'estremo superiore (inferiore) dell'insieme dei punti di aderenza della successione, cioè i limiti delle sue sottosuccessioni.
4. La successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge se e solo se  $\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k = \liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k$
5. Data  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , è sempre possibile estrarre una sottosuccessione  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  che converge a  $\limsup a_n$ .

**Proposizione 4.5.** (Criterio della radice, sempre dal Giusti) Data la serie reale a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Sia

$$L := \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

Se  $L < 1$ , allora la serie converge. Se  $L > 1$ , allora la serie non converge.

### 4.3. Enunciato del teorema di Hadamard

**Teorema 4.6.** (Hadamard) Data la serie di potenze centrata in  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad z \in \mathbb{C} \tag{4.3}$$

definiamo

$$\lambda := \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty]$$

e  $R := \frac{1}{\lambda} \in [0, +\infty]$  come reciproco in senso esteso di  $\lambda$ . Allora la serie (4.3):

- (i) converge assolutamente (e quindi semplicemente) per ogni  $z \in B(z_0, R)$
- (ii) converge totalmente (e quindi uniformemente) in  $\overline{B(z_0, \rho)}$ ,  $\forall \rho < R$
- (iii) non converge se  $|z - z_0| > R$ .

Inoltre (e questa è la parte nuova per voi) la funzione somma della serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad z \in B_R(z_0) \tag{4.4}$$

è olomorfa e la sua derivata è

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad z \in B_R(z_0) \tag{4.5}$$

Posticipiamo per il momento la dimostrazione del Teorema di Hadamard

La seguente proposizione può essere utile:

**Proposizione 4.7.** Sia  $\sum a_n (z - z_0)^n$  con raggio di convergenza  $R \in [0, +\infty]$ .

$$\text{Se } \exists l \in [0, +\infty]: \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = l \text{ allora } l = R \tag{4.6}$$

Omettiamo la dimostrazione, che potete trovare nel Giusti.

#### 4.4. La funzione esponenziale $e^z$

Applichiamo immediatamente la Proposizione 4.7. Data la serie

$$\sum \frac{1}{k!} z^k,$$

è chiaro che

$$\left| \frac{1/k!}{1/(k+1)!} \right| = k + 1$$

e quindi  $R = +\infty$ .

Ne segue per quanto appena visto che la funzione somma  $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k$  è olomorfa su tutto il piano complesso, i.e. intera, inoltre

$$(e^z)' = \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} z^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} z^k \right) = e^z$$

Quindi

$$(e^z)' = e^z \tag{4.7}$$

**Proposizione 4.8.** (Formula: prodotto di esponenziali)

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Da cui segue che

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

*Dimostrazione.* Sia  $g(z) = e^{a-z} e^z$  funzione intera. Allora la sua derivata

$$g'(z) = -e^{a-z} e^z + e^z e^{a-z} = 0$$

è identicamente nulla e quindi  $g$  è costantemente uguale a  $g(0) = e^a$ .

Quindi  $e^z e^{a-z} = e^a$  per ogni  $a \in \mathbb{C}$  fissato, da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 4.9.** Dimostrate la *formula di Eulero*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

#### 4.5. Dimostrazione del teorema di Hadamard

*Dimostrazione.* Assumiamo, senza perdita di generalità, che la serie (4.3) sia centrata in  $z_0 = 0$ . Quindi consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad z \in \mathbb{C} \tag{4.8}$$

(i) Sia  $R \in (0, +\infty)$ ,  $z \in B_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ . Visto che

$$\sqrt[k]{|a_k| |z|^k} = \sqrt[k]{|a_k|} |z| < \lambda R = 1$$

per il criterio della radice (4.5) la serie converge assolutamente e quindi semplicemente.

(iii) Se  $|z| > R$  allora

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} = \lambda |z| > 1 \tag{4.9}$$

il che implica che  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  non è convergente. Per capire questo ultimo passaggio osserviamo che

$$\exists \delta > 0 : \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} > \delta + 1 \quad \text{per infiniti } k \in \mathbb{N}; \tag{4.10}$$

infatti per la proposizione (4.4), esiste una sottosuccessione di

$$\left( \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} \right)_{k \in \mathbb{N}} \tag{4.11}$$

che converge al massimo limite della successione e, per il teorema della permanenza del segno, se il massimo limite è maggiore di 1 allora la sottosuccessione convergente ad esso è definitivamente maggiore di 1, da cui (4.10). Ma allora

$$|a_k||z|^k > (\delta + 1)^k \text{ per infiniti } k \in \mathbb{N} \quad (4.12)$$

da cui deduciamo che la successione

$$\left(|a_k z^k|\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

non è infinitesima e quindi la serie  $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$  non converge perché non soddisfa il criterio necessario di convergenza.

(ii) Per  $R \in \{0, +\infty\}$  la serie si studia in maniera diretta. Infatti se  $R = 0$ , e quindi equivalentemente  $\lambda = +\infty$ , allora la serie converge solo per  $z = 0$  perché per  $z \neq 0$

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k||z|^k} = \lambda|z| = +\infty$$

e quindi  $|a_k z^k|$  non è infinitesima (come sopra). Se  $R = +\infty$ , e quindi equivalentemente  $\lambda = 0$ , allora

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k||z|^k} = \lambda|z| = 0 < 1$$

e quindi la serie è assolutamente convergente per ogni  $z$ .

(iii) Sia  $\rho < R$  e  $|z| \leq \rho$ . Allora

$$|a_k||z|^k \leq |a_k|\rho^k$$

e quindi  $|a_k|\rho^k$  è il sup di  $|a_k z^k|$  in  $\overline{B}_\rho(0)$  (infatti, il massimo). Inoltre

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \lambda\rho < \lambda R = 1$$

Quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\rho^k$$

è convergente, da cui segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

è totalmente convergente in  $\overline{B}_\rho(0)$ .

Rimangono da dimostrare l'olomorfia della funzione somma della serie (4.4) in  $B_R(0)$  e la validità della formula per il calcolo della derivata (per derivazione termine a termine).

Iniziamo dalla seconda. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \quad (4.13)$$

Vogliamo vedere che anche lei converge in  $B_R(0)$ .

**Osservazione 4.10.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n-1]{n} = 1$$

Infatti ciò è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n-1} = 0$$

che è ben noto.

Sappiamo che  $\sqrt[n-1]{n} \rightarrow 1$  per  $n \rightarrow +\infty$ ; supponiamo che  $\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k-1]{|a_k|} = \alpha$ . La Proposizione che segue implica allora che

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k-1]{k|a_k|} = \alpha \quad (4.14)$$

**Proposizione 4.11.** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali a termini positivi, con

$$a := \limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{e} \quad b := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > 0$$

Allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione (4.4), esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  di  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

Quindi, visto che tutte le sottosuccessioni estratte da una successione convergente sono ancora convergenti al limite della successione, vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} a_{n_k} = ba$$

Da cui deduciamo che

$$l := \limsup_{n \in \mathbb{N}} b_n a_n \geq ba$$

Se per assurdo si avesse  $l > ba$ , allora esisterebbe una sottosuccessione  $(a_{n_j} b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergente al limite  $l$ , quindi si avrebbe

$$a \leftarrow_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j} = \frac{a_{n_j} b_{n_j}}{b_{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{l}{b} > a$$

Ciò la sottosuccessione  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergerebbe a un limite strettamente maggiore del massimo limite della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il che è assurdo.  $\square$

Ora vogliamo dimostrare che

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

*Dimostrazione.* Sia  $R' := \limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k-1]{|a_n|}$ .

Vogliamo dimostrare che  $R' = R$  usando le due disuguaglianze  $R' \leq R$ ,  $R' \geq R$ .

Per definizione,  $R'$  è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} z^k$$

Osserviamo che

$$z \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} z^k \right) + a_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

e analogamente

$$|z| \left( \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}| |z|^k \right) + |a_0| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |z|^k \quad (4.15)$$

Se  $|z| < R'$ , allora da (4.15) c'è convergenza a sinistra, quindi anche a destra, e quindi  $R' \leq R$ . D'altra parte, se  $0 < |z| < R$  allora possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}| |z|^k = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |z|^k}{|z|} - \frac{a_0}{|z|}$$

Essendo convergente il membro destro lo è anche il membro sinistro, quindi possiamo concludere che  $R \leq R'$  da cui la tesi.  $\square$

Abbiamo dimostrato che  $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = 1/R$ ; segue dalla Proposizione 4.11 e dall'Osservazione 4.10 che

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \frac{1}{R}$$

e quindi la serie delle derivate (4.13) converge in  $B_R(0)$ .

Ora dimostriamo che la somma della serie (4.4) è una funzione olomorfa. Definiamo:

$$f(z) = s_n(z) + R_n(z) \quad (4.16)$$

dove

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{e} \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$$

e

$$g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$$

Dimostriamo che per ogni  $w \in B_R(0)$

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = 0 \quad (4.17)$$

Per ogni  $w \in B_R(0)$ , sia  $|w| < r < R$ . Fissato  $\delta > 0$  tale che  $\overline{B_\delta(w)} \subset B_r(0)$ , consideriamo  $z$  tale che  $|z - w| < \delta$ . Allora possiamo scrivere (iii) come:

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \left[ \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right] + [s'_n(w) - g(w)] + \left[ \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right] \quad (4.18)$$

e analizzare un addendo alla volta.

(a) Sappiamo che fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta' > 0$  tale che per  $|z - w| < \delta'$  si ha

$$\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) < \varepsilon \quad (4.19)$$

Fissiamo  $\delta$  uguale al minimo fra quello fissato nella discussione data prima di (4.18) e questo  $\delta'$ .

(b) Sappiamo che, per l'equazione (2.7), si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n(w) = g(w)$$

ossia

$$|s'_n(w) - g(w)| < \varepsilon \quad \text{per } n \geq N_1$$

(c) Si ha

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| k R^{k-1} < \varepsilon \quad \text{per } n \geq N_2$$

Questo segue dal fatto che la serie derivata converge.

Quindi basta scegliere  $\delta$  come in (a) e  $n \geq N_1 + N_2$  per ottenere

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < 3\varepsilon$$

da cui la tesi.

□

## 4.6. Conseguenze del teorema di Hadamard

Il Teorema di Hadamard afferma che se la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

ha raggio di convergenza  $R$ , allora  $f: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e la sua derivata è

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

che è a sua volta una funzione olomorfa, perché serie di potenze convergente. In particolare  $f'$  è continua. Più in generale,  $f$  è derivabile  $k$  volte (con continuità) e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.20)$$

Un risultato analogo vale per serie di potenze centrate in  $z_0 \neq 0$ .

**Osservazione 4.12.** Notiamo anche che ogni serie di potenze è la serie di Taylor della funzione che definisce, infatti da (4.20) si ha subito che

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Un risultato analogo vale per serie di potenze centrate in  $z_0 \neq 0$ :  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

## 5. Analiticità e olomorfia

### 5.1. Analiticità e primi risultati

Una funzione si dice *analitica* se è localmente sviluppabile in serie di potenze. Più precisamente:

**Definizione 5.1** (Funzione analitica). Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto. Allora  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *analitica* in  $E$  se

$\forall z_0 \in E \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, R \in (0, +\infty]$  (dipendenti da  $z_0$ ) tali che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) \cap E$$

Quindi una funzione è analitica in un insieme aperto  $E$  se può essere espressa localmente come somma di una serie di potenze. È naturale chiedersi se somme e prodotti di funzioni analitiche siano ancora analitiche.

Utilizzeremo il prodotto di Cauchy di due serie.

**Definizione 5.2** (Prodotto di Cauchy). Siano  $\sum^{\infty} \alpha_n$  e  $\sum^{\infty} \beta_n$  due serie. Il risultato del prodotto di Cauchy è la serie  $\sum^{\infty} \gamma_n$  dove

$$\gamma_n := \alpha_n \beta_0 + \alpha_{n-1} \beta_1 + \dots + \alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_0 \beta_n.$$

**Proposizione 5.3.** Se  $\sum^{\infty} \alpha_n$  e  $\sum^{\infty} \beta_n$  sono due serie assolutamente convergenti, allora  $\sum^{\infty} \gamma_n$  è assolutamente convergente e il valore di tale serie è il prodotto dei valori delle due serie iniziali.

*Dimostrazione.* Si riorganizzano i termini della serie di  $\gamma$  nel seguente modo

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha_0 \beta_0 & \alpha_0 \beta_1 & \alpha_0 \beta_2 & \dots & \alpha_0 \beta_n & \dots & & \\ \alpha_1 \beta_0 & \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_n & \dots & & \\ \alpha_2 \beta_0 & \alpha_2 \beta_1 & & & \alpha_2 \beta_n & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ \alpha_n \beta_0 & \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_n & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \end{array}$$

I coefficienti  $\gamma_n$  sono la somma delle diagonali non principali di questa matrice infinita. Si può quindi fare la seguente stima

$$\sum_{k=0}^n |\gamma_k| = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^k |\alpha_i \beta_{k-i}| \right) \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |\alpha_i \beta_j|.$$

A parole, possiamo stimare la somma dei moduli delle diagonali con la somma dei moduli degli elementi sulle diagonali, e ancora possiamo maggiorarlo con la somma dei moduli degli elementi del quadrato costruito come nella tabella sopra. Ma la somma dei moduli degli elementi del quadrato è il prodotto del troncamento as  $n$  di ognuna delle due serie. Mandando tutto al limite si ottiene l'assoluta convergenza.

Ora, dimostrata l'assoluta convergenza, si vuole dimostrare che

$$|S_{2n}^{\gamma} - S_n^{\alpha} S_n^{\beta}| \rightarrow 0.$$

Graficamente questa differenza si può rappresentare come i due triangoli nel seguente grafico

$$\begin{array}{cccccccccccc} \alpha_0 \beta_0 & \alpha_0 \beta_1 & \alpha_0 \beta_2 & \dots & \alpha_0 \beta_n & \alpha_0 \beta_{n+1} & \dots & \alpha_0 \beta_{2n} & \dots & & & \\ \alpha_1 \beta_0 & \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_n & & \dots & \alpha_1 \beta_{2n-1} & \dots & & & \\ \alpha_2 \beta_0 & \alpha_2 \beta_1 & & & \alpha_2 \beta_n & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & & & & & & \\ \alpha_n \beta_0 & \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_n & & & & & & & \\ \alpha_{n+1} \beta_0 & & & & \alpha_{n+1} \beta_{n-1} & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & & & & & \\ & \vdots & & & & & & & & & & \\ & \alpha_{2n-1} \beta_1 & & & & & & & & & & \\ \alpha_{2n} \beta_0 & \vdots & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Nel grafico, il grande triangolo rappresenta  $S_{2n}^\gamma$ , mentre il quadrato centrale rappresenta  $S_n^\alpha S_n^\beta$ . La differenza quindi è rappresentata dai due triangoli rimanenti, in formule

$$|S_{2n}^\gamma - S_n^\alpha S_n^\beta| \leq \left| \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} \alpha_i \beta_j \right| + \left| \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \alpha_i \beta_j \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_i \beta_j \right| + \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \beta_j \right| \rightarrow 0.$$

Segue la tesi. □

Il seguente esercizio è a questo punto di facile soluzione:

**Esercizio 5.2.** Siano  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  due serie di potenze, con raggi di convergenza  $R_f \geq r$  e  $R_g \geq r$ . Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Dimostrare che il raggio di convergenza di queste due serie è  $\geq r$  e che per  $|z| < r$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = f(z) + g(z), \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)g(z).$$

**Proposizione 5.4.** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni analitiche in un aperto  $E \subseteq \mathbb{C}$ ; allora  $f + g$  e  $fg$  sono analitiche in tale aperto.

*Dimostrazione.* (della Proposizione.) Segue subito dall'esercizio. □

Osserviamo che si può ottenere con questi argomenti una dimostrazione differente della relazione fondamentale

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Infatti a destra si ha

$$\left( \sum \frac{1}{k!} z^k \right) \left( \sum \frac{1}{k!} w^k \right)$$

e svolgendo tale prodotto si ottiene

$$\sum_n^{+\infty} c_n(z),$$

con

$$c_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!} (z+w)^n,$$

da cui segue la tesi.

### 5.3. Il logaritmo principale

In maniera piuttosto informale vogliamo vedere il logaritmo complesso come l'inverso dell'esponenziale complesso; tuttavia, come vedremo fra poco, occorre prestare attenzione a come costruire il dominio di definizione ed il codominio dell'esponenziale.

Come prima cosa si osserva una proprietà fondamentale dell'esponenziale complesso:

**Proposizione 5.5.** Vale

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Sia  $z = x + iy$ , si ha

$$1 = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \iff \begin{cases} e^x \sin y = 0 \\ e^x \cos y = 1 \end{cases},$$

che ha come insieme soluzione  $\{x = 0, y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Segue subito la tesi. □

Da questa proprietà dell'esponenziale segue la seguente osservazione fondamentale

**Osservazione 5.6.**

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

In particolare, in contrasto con l'esponenziale reale, l'esponenziale complesso non è iniettivo.

Fatta questa osservazione si hanno però informazioni sull'iniettività dell'esponenziale su domini propriamente contenuti in  $\mathbb{C}$ , in particolare si ha che

$$\exp : \{z \mid -\pi < \Im z \leq \pi\} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

è una bigezione: è iniettiva per il risultato appena visto ed è suriettiva perché si può sempre scrivere

$$w = |w|e^{i\text{Arg}(w)} = \exp(\log(|w|) + i\text{Arg}(w)).$$

Dato che vogliamo definire il logaritmo su un aperto, consideriamo un'altra bigezione, avente un dominio leggermente più ristretto:

$$\exp : \{z \mid -\pi < \Im z < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}.$$

**Definizione 5.7.** Il logaritmo principale, denotato  $\text{Log}$ , è l'inversa di  $\exp : \{z \mid -\pi < \Im z < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ :

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\} \rightarrow E \subseteq \mathbb{C}.$$

$$\text{Log}(w) = \log(|w|) + i\text{Arg}(w).$$

**Proposizione 5.8.**  $\text{Log}$  è una funzione olomorfa in  $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$  e vale

$$\text{Log}'(w) = \frac{1}{w}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si divide in due parti: la prima in cui si mostra l'olomorfia del logaritmo e la seconda in cui si mostra la formula per la derivata.

Per mostrare l'olomorfia si sfrutta il teorema di Cauchy-Riemann ed il teorema della funzione inversa. Sia  $F(x, y)$  la funzione vettoriale associata a  $f(z) = e^z$ . Tale funzione vettoriale ha Jacobiana non singolare, perché il determinante della matrice Jacobiana, per formule già viste, vale

$$\det(J_F(x, y)) = |f'(z)|^2.$$

Nel caso della funzione esponenziale, la derivata è ancora la funzione esponenziale stessa, e quindi è sempre diversa da 0.

Sia quindi  $G(t, s)$  la funzione vettoriale associata al logaritmo; per il teorema della funzione inversa, se  $G(t, s) = (h, k)$ , valgono le due seguenti uguaglianze

$$J_G(t, s) = J_F(G(t, s))^{-1} = \frac{1}{\det(J_F(G(t, s)))} \begin{pmatrix} u_x(G(t, s)) & -u_y(G(t, s)) \\ u_y(G(t, s)) & u_x(G(t, s)) \end{pmatrix}$$

$$J_G(t, s) = \begin{pmatrix} h_t(t, s) & h_s(t, s) \\ k_t(t, s) & k_s(t, s) \end{pmatrix}$$

Sempre dal Teorema della funzione inversa segue che le componenti di  $G$  sono  $C^1$  (perché  $F$  è sicuramente  $C^1$ ); inoltre, dalle uguaglianze appena messe in evidenza, capiamo che valgono le condizioni di Cauchy-Riemann per le componenti  $h$  e  $k$  del logaritmo, da cui segue che essa è una funzione olomorfa.

Rimane da dimostrare che

$$\text{Log}'(w_0) = \frac{1}{w_0}.$$

Poniamo  $z_0 = \text{Log}(w_0) \iff e^{z_0} = w_0$ . Si ha

$$\begin{aligned} \text{Log}'(w_0) &= h_t(t_0, s_0) - ih_s(t_0, s_0) = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} (u_x(x_0, y_0) + iu_y(x_0, y_0)) = \\ &= \frac{1}{f'(z_0)\overline{f'(z_0)}} f'(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 5.9.** Quest'ultima Proposizione si può anche dimostrare direttamente; lo vedremo nella prossima sottosezione in un contesto più generale.

In molti libri si parla del logaritmo come una funzione multivoca, cioè definibile a meno di una qualche sorta di costante. Infatti, dato  $w \in \mathbb{C}^\times$ , l'equazione

$$e^z = w$$

ha come soluzioni

$$\{\log(|w|) + i(\text{Arg}(w) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \{\text{Log}(w) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\},$$

e quindi il *vero* inverso dell'esponenziale sarebbe una funzione che a ciascun numero  $w \in \mathbb{C}^\times$  associa un insieme *infinito* di valori descritti completamente a partire dal logaritmo principale aggiungendo multipli di  $2\pi i$ . Questa funzione multivoca viene denotata  $\log(z)$ <sup>3</sup>.

Tramite il logaritmo  $\log(z)$  possiamo anche definire le potenze complesse:

**Definizione 5.10.** Siano  $b \in \mathbb{C}$  e  $z \neq 0$ . Definiamo

$$z^b = \exp(b \log(z))$$

Si osserva che nel caso in cui  $b = \tilde{k} \in \mathbb{Z}$  tale funzione è l'usuale potenza, infatti

$$z^{\tilde{k}} = \exp(\tilde{k} \text{Log}(z) + \tilde{k} 2k\pi i) = \exp(\tilde{k} \text{Log}(z)) = z^{\tilde{k}}.$$

Se  $b \in \mathbb{C}$  invece, allora  $z^b$  può essere un'infinità di numeri complessi.

**Osservazione 5.11.** Come per il logaritmo, si può definire la funzione (univoca) potenza principale, data da  $\exp(b \text{Log}(z))$  con dominio  $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ .

## 5.4. Rami del logaritmo

**Definizione 5.12.** Sia  $E$  un dominio,  $0 \notin E$ . Un *ramo del logaritmo* è una funzione continua  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  con la proprietà che  $\exp(f(z)) = z, \forall z \in E$ .

Un esempio fondamentale è il logaritmo principale,  $\text{Log}$ , con  $E = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ .

Enunciamo e dimostriamo il risultato più generale che abbiamo anticipato nell'Osservazione 5.9

**Proposizione 5.13.** Siano  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni continue tali che  $f(G) \subseteq \Omega$  e  $g(f(z)) = z$ . Se  $g$  è olomorfa e  $g'(w) \neq 0 \forall w$  allora  $f$  è olomorfa e  $f'(w) = \frac{1}{g'(f(w))}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $a \in G$  e  $h \in \mathbb{C}$  t.c.  $a + h \in G$ . Dal fatto che  $z = g(f(z))$  otteniamo che  $f(a) \neq f(a + h)$  perché  $a \neq a + h$ . Pertanto

$$1 = \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{f(a + h) - f(a)} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

passando al limite per  $h$  che tende a 0 e ricordando che  $f$  è continua otteniamo, a meno di un cambio di variabile

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} g'(f(a)) \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{1}{g'(f(a))}$$

□

**Osservazione 5.14.** Se  $g$  è l'esponenziale,  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ ,  $G = \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$  ed  $f$  è il logaritmo principale,  $\text{Log}$ , ritroviamo il noto risultato che il logaritmo principale è olomorfo nel suo insieme di definizione con derivata uguale a  $1/z$ . Più in generale, se  $g$  è l'esponenziale e  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $0 \notin E$ ,  $f(E) \subset \Omega$ , è un ramo del logaritmo, allora  $f$  è olomorfa e la sua derivata è  $1/z$ .

<sup>3</sup>in alcuni testi i ruoli di  $\text{Log}$  e  $\log$  sono scambiati

## 5.5. Funzioni trigonometriche

Definiamo:

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}\end{aligned}$$

È immediato che questo sono funzioni intere. Inoltre

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!}.$$

e

$$\sin' z = \cos z, \quad \cos' z = -\sin z$$

Ulteriori proprietà di queste funzioni sono trattate negli esercizi.

## 5.6. Principio d'identità delle funzioni analitiche

**Teorema 5.15.** Sia  $E$  un dominio e siano  $g$  e  $h$  due funzioni analitiche in  $E$ . Se esiste una successione  $\{z_k\}$  in  $E$  che ammette un punto di accumulazione  $z_0 \in E$  ed è tale che  $g(z_k) = h(z_k) \forall k$ , allora  $g = h$ .

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che se  $f$  è analitica e  $f(z_k) = 0 \forall k$  allora  $f$  è la funzione identicamente uguale a 0 in  $E$ . Osserviamo preliminarmente che data una serie di potenze centrata in un punto  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $s(z) = \sum a_m (z - \alpha)^m$ , se  $s(z)$  non è identicamente nulla, allora esiste un intorno  $U_\alpha$  di  $\alpha$  tale che  $s(z) \neq 0 \forall z \in U_\alpha \setminus \{\alpha\}$ . Infatti, se  $a_m$  è il primo coefficiente non-nullo della serie, allora possiamo scrivere

$$s(z) = (z - \alpha)^m \left( a_m + \sum_{k \geq m+1} a_k (z - \alpha)^{k-m} \right)$$

La funzione

$$g(z) := \sum_{k \geq m+1} a_k (z - \alpha)^{k-m}$$

è certamente continua ed è uguale a 0 in  $\alpha$ . Quindi esiste un intorno  $U_\alpha$  di  $\alpha$  tale che

$$a_m + \sum_{k \geq m+1} a_k (z - \alpha)^k \neq 0 \quad \forall z \in U_\alpha$$

Ne segue che  $s(z) \neq 0 \forall z \in U_\alpha \setminus \{\alpha\}$  che è quello che dovevamo giustificare.

Per ipotesi  $f(z_k) = 0$  per ogni  $k$ ; inoltre  $f(z_0) = 0$  perché  $f$  è continua e  $z_0$  è di accumulazione per  $\{z_k\}$ . Dato che  $f$  è analitica, sviluppandola in una serie di potenze centrata in  $z_0$  ed utilizzando l'osservazione che abbiamo appena fatto, deve essere che esiste un intorno  $V_{z_0}$  di  $z_0$  tale che  $f|_{V_{z_0}} \equiv 0$ , perché se così non fosse non potrebbe essere che  $f(z_k) = 0$  per ogni  $k$ . È ovvio che per una funzione analitica identicamente nulla in un aperto  $V_{z_0}$  si ha che anche tutte le sue derivate complesse sono identicamente nulle. In particolare questo si applica a  $f|_{V_{z_0}}$ . Consideriamo allora

$$F := \bigcap_{k \geq 0} \{z \in E : f^{(k)}(z) = 0\}.$$

$F$  è non-vuoto perché  $V_{z_0} \subset F$ .  $F$  è chiuso, dato che è intersezione di chiusi. Ma  $F$  è anche aperto perché se  $a \in F$  allora dall'analicità di  $f$  sappiamo che essa è sviluppabile in serie di potenze attorno ad  $a$  e questa serie di potenze è la serie di Taylor di  $f$  in quell'intorno; dato che per ipotesi  $f^{(k)}(a) = 0 \forall k$  si ha allora che esiste un intorno  $U_a$  di  $a$  nel quale  $f|_{U_a} \equiv 0$ . In questo intorno tutte le derivate di  $f$  sono nulle e quindi questo intorno è tutto contenuto in  $F$ . Dalla connessione di  $E$  segue che  $F = E$ . □

Dal principio d'identità delle funzioni analitiche vediamo che  $e^z$ ,  $\sin z$  e  $\cos z$  sono le uniche estensioni intere di  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

## 5.7. Integrazione complessa

Ricordiamo che l'obiettivo di tutta in questa sezione 5 è dimostrare il seguente risultato:

**Teorema 5.16.**

$$f \text{ olomorfa} \iff f \text{ analitica.}$$

Per dimostrare tale asserto servono preliminarmente dei risultati che riguardano l'integrazione complessa.

**Definizione 5.17** (Integrale curvilineo complesso). Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti con parametrizzazione  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $f$  una funzione continua e siano

$$\varphi(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{e} \quad f = u + iv.$$

Fissiamo una partizione  $P := \{a = t_0, t_1, \dots, t_{M-1}, t_M = b\}$  di ampiezza  $\delta$ , quindi  $\delta = \max_k |t_k - t_{k-1}|$  e consideriamo le somme parziali

$$\sum_{k=1}^M f(\varphi(t_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})). \tag{5.1}$$

Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che esiste un numero complesso, denotato provvisoriamente  $I$ , tale che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  ed una partizione  $P$  di ampiezza  $\delta$  tali che

$$\left| I - \sum_{k=0}^M f(\varphi(t_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) \right| < \varepsilon$$

Tale numero viene denotato con il simbolo

$$\int_{\gamma} f(z) dz.$$

L'integrale si può anche definire sotto ipotesi più deboli su  $\gamma$ ; ad esempio quando  $\gamma$  è a variazione limitata. Tornando alle curve regolari a tratti, si può dimostrare che in questo caso risulta

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \tag{5.2}$$

dove  $\varphi$  è una parametrizzazione regolare a tratti di  $\gamma$ . Calcoleremo gli integrali complessi lungo una curva  $\gamma$  regolare a tratti attraverso il membro a destra di questa uguaglianza. Per le dimostrazioni di tutti questi fatti, che probabilmente avete già visto nel corso di Analisi II, vi rimando a [Conway, Ch. IV].

**Osservazione 5.18.** Ricordando la definizione di integrale curvilineo di una 1-forma è facile vedere che risulta

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2, \tag{5.3}$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u(x, y) dx - v(x, y) dy \\ \omega_2 &= v(x, y) dx + u(x, y) dy \end{aligned}$$

1-forme. Il risultato si ottiene scrivendo (5.2) in funzione di  $x(t)$  ed  $y(t)$  e di  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  e facendo qualche semplice conto. Lascio a voi i dettagli, che sono elementari (potete anche consultare [O] oppure [GM, Sezione 8.1])

Si osservano alcune proprietà dell'integrale complesso, ottenute tramite (5.3) dalle corrispondenti proprietà per gli integrali curvilinei delle 1-forme.

**Proposizione 5.19.** Valgono:

- (1) L'integrale è invariante per rimparametrazioni orientate,
- (2)  $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{-\gamma} f(z) dz$ ,

- (3) l'integrale è additivo rispetto all'operazione di concatenamento di curve chiuse,  
 (4) l'integrale è lineare per somma e prodotto per scalare,  
 (5) e infine vale la seguente disuguaglianza

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \ell(\gamma) \max_{\gamma} \{|f(z)|\}.$$

Due esempi particolarmente significativi di calcolo di un integrale curvilineo attraverso la definizione sono i seguenti

**Esempio 5.20.** Si calcoli

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Prendendo come parametrizzazione  $\varphi(\theta) = Re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e traslando, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-1} iRe^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

**Esempio 5.21.** Sia  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 1$ , si calcoli

$$\int_{C_R(z_0)} (z - z_0)^{-k} dz.$$

Allo stesso modo dello scorso esempio si ottiene

$$\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-k} iRr^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-k+1} d\theta = 0.$$

Chiaramente però il calcolo dell'integrale a mano, come nei due esempi precedenti, in numerosi casi è impraticabile, quindi sembra naturale cercare un metodo simile al caso reale. Un ottimo punto di partenza può essere cercare la primitiva di una funzione olomorfa.

## 5.8. Primitive e Teorema di Goursat

**Definizione 5.22.** Sia  $E$  un dominio,  $f \in C^0(E)$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .  $g$  è una primitiva di  $f$  se  $g \in \mathcal{O}(E)$  e  $g'(z) = f(z)$ .

Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale è immediato dimostrare che se  $g$  è una primitiva di  $f$  e  $\gamma$  è una curva regolare a tratti con punto iniziale  $\alpha \in E$  e punto finale  $\beta \in E$  allora

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\beta) - g(\alpha).$$

**Esempio 5.23.** Una serie di potenze  $\sum a_k(z - z_0)^k$  ha come primitiva

$$\sum \frac{1}{k+1} a_k (z - z_0)^{k+1}.$$

La caratterizzazione delle funzioni che ammettono primitiva si trova nelle 1-forme usate per definire l'integrale curvilineo complesso, infatti vale la seguente proposizione:

**Proposizione 5.24.** Sia  $f = u + iv \in C^0(E)$ . Essa ammette una primitiva  $g = h + ik \iff$  le forme  $\omega_1$  e  $\omega_2$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u(x, y)dx - v(x, y)dy \\ \omega_2 &= v(x, y)dx + u(x, y)dy, \end{aligned}$$

sono esatte ed in tal caso vale

$$\omega_1 = dh, \quad \omega_2 = dk.$$

*Dimostrazione.*  $\omega_1 := u(x, y)dx - v(x, y)dy$  e  $\omega_2 := v(x, y)dx + u(x, y)dy$  sono esatte, con  $\omega_1 = dh$  e  $\omega_2 = dk$  se e solo se

$$\omega_1 = h_x(x, y)dx + h_y(x, y)dy = dh, \quad \omega_2 = k_x(x, y)dx + k_y(x, y)dy$$

il che accade se e solo se

$$u = h_x = k_y, \quad v = -h_y = k_x$$

Queste equazioni ci dicono, per Cauchy-Riemann, che  $g := h + ik$  è olomorfa e si ha

$$g'(x + iy) = h_x(x, y) + ik_x(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f(x + iy).$$

□

**Corollario 5.25.**  $f$  ammette primitiva  $\iff \int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \subseteq E$  curva regolare a tratti e chiusa con supporto in  $E$

Il corollario deriva direttamente dalla caratterizzazione delle forme esatte vista ad Analisi II.

Ad esempio, ricordando gli esempi trattati in precedenza, si può notare che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

sicuramente non ammette primitiva perché esiste almeno una curva chiusa su cui l'integrale non si annulla.

Il risultato che segue è la pietra angolare per la dimostrazione dell'implicazione  $f$  olomorfa  $\implies f$  analitica :

**Teorema 5.26** (Goursat). Sia  $E$  un aperto e  $\alpha \in E$ . Sia inoltre  $f \in C^0(E)$  e  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{\alpha\})$ , allora

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0,$$

dove  $R$  è un rettangolo coordinato (un rettangolo è coordinato se i suoi lati sono paralleli agli assi).

*Dimostrazione.* La dimostrazione si trova nelle dispense [GM] e, in forma leggermente diversa ma equivalente, in [Rudin, Theorem 10.13].

Si utilizza un metodo di suddivisione del rettangolo in rettangoli sempre più piccoli. Si tratta prima il caso  $f \in C^0(E)$ ,  $f \in \mathcal{O}(E)$  e poi si indebolisce l'ipotesi ammettendo che  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{\alpha\})$  (questo indebolimento complica solo leggermente la dimostrazione ma gioca un ruolo cruciale nel proseguio; non lo tratteremo qui).

Poniamo

$$I := \left| \int_{\partial R} f(z)dz \right|.$$

Vogliamo dimostrare che  $I = 0$ . Dividiamo il rettangolo dato in 4 rettangoli congruenti  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , tutti coordinati. Per le proprietà degli integrali curvilinei:

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\partial R_k} f(z)dz.$$

Si ha, ovviamente,

$$I \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\partial R_k} f(z)dz \right|$$

e quindi esiste  $k_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$  tale che

$$\left| \int_{\partial R_{k_1}} f(z)dz \right| \geq \frac{I}{4}$$

Suddividiamo ulteriormente questo rettangolo  $R_{k_1}$  in 4 rettangoli coordinati congruenti e otteniamo  $R_{k_2}$ , sottorettangolo di  $R_{k_1}$  tale che

$$\left| \int_{\partial R_{k_2}} f(z)dz \right| \geq \frac{\left| \int_{\partial R_{k_1}} f(z)dz \right|}{4} \geq \frac{I}{4^2}.$$

Procedendo in questo modo costruiamo una successione  $R_{k_j}$  di rettangoli con la proprietà che

$$\left| \int_{\partial R_{k_j}} f(z) dz \right| \geq \frac{I}{4^j}.$$

Per costruzione si ha

$$\bigcap_j R_{k_j} = \alpha$$

con  $\alpha \in E$ . Utilizzando l'olomorfia di  $f$  in  $\alpha$  si dimostra che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $k_j$  abbastanza grande tale che

$$\frac{I}{4^j} \leq \varepsilon \text{diam}(R_{k_j}) \ell(\partial R_{k_j}) = \varepsilon 2^{-j} \text{diam}(R) 2^{-j} \ell(\partial R)$$

e quindi

$$I \leq \varepsilon \text{diam}(R) \ell(\partial R)$$

da cui la tesi per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .  $\square$

**Teorema 5.27** (Esistenza di una primitiva locale). Sia  $B$  un disco aperto e  $\alpha \in B$ . Sia inoltre  $f \in C^0(B) \cap \mathcal{O}(B \setminus \{\alpha\})$ . Allora esiste una primitiva  $g$  di  $f$  in  $B$ . Conseguentemente l'integrale su ogni curva chiusa regolare a tratti è nullo, i.e.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma \subseteq B. \quad (5.4)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma_z$  una curva coordinata che connetta  $z_0$  a  $z$ , cioè formata da un segmento orizzontale e uno verticale. Sia  $g$  definita nel seguente modo

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Utilizzando il teorema di Goursat si può calcolare la derivata in  $z$  di tale funzione e dimostrare che essa è uguale a  $f(z)$ . Vi rimando nuovamente a [GM].  $\square$

## 5.9. Formula locale di Cauchy

Il risultato centrale di questa sottosezione è la formula locale di Cauchy. Esso mostra la profonda regolarità delle funzioni olomorfe, il cui comportamento in un punto è legato al comportamento della funzione sul bordo di una palla centrata nel punto stesso.

**Teorema 5.28.** Sia  $f \in \mathcal{O}(E)$ ,  $z_0 \in E$ . Sia  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(z_0) \subset E$ . Sia infine  $C_\delta(z_0) = \partial B_\delta^+(z_0)$ . Vale  $\forall z \in B_\delta(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un disco aperto  $\supset \overline{B_\delta(z_0)}$  con  $A \subseteq E$ . Sia inoltre

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}.$$

$g$  è olomorfa in  $A \setminus \{z_0\}$  ed è continua in  $A$ . Per (5.4), che è in ultima analisi una conseguenza del teorema di Goursat, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \\ \implies 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \end{aligned}$$

perché sappiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 1.$$

Segue la tesi.  $\square$

### 5.10. Se $f$ è olomorfa allora $f$ è analitica

**Teorema 5.29.** Sia  $E$  aperto ed  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Allora  $f$  è analitica in  $E$ . In particolare,  $f \in C^\infty(E)$ .

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\alpha \in E$  e  $r > 0$  tale che  $B_r(\alpha) \subseteq E$ . Sia  $z \in B_r(\alpha)$ . Per l'ipotesi ed il teorema 5.28 vale la formula di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

L'osservazione chiave è la seguente: si riscrive il denominatore e si fa comparire una serie di potenze.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}}$$

Poiché  $|z - \alpha| < r = |\zeta - \alpha|$  si ha che

$$\frac{|z - \alpha|}{|\zeta - \alpha|} < 1$$

e quindi

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^k.$$

Inoltre, c'è convergenza uniforme in  $\overline{B}_{r-\varepsilon}(\alpha)$ , per ogni  $\varepsilon$  piccolo a piacere, e pertanto si possono scambiare sommatoria ed integrale, ottenendo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - \alpha)^k$$

per  $z \in \overline{B}_{r-\varepsilon}(\alpha)$ . Segue la tesi. □

Da qui otteniamo sia il risultato voluto, cioè che la funzione  $f$  può essere espressa come serie di potenze, sia un risultato ulteriore, cioè una generalizzazione della formula integrale di Cauchy per le derivate della funzione  $f$ :

$$f^{(k)}(\alpha) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} d\zeta. \quad (5.5)$$

Si veda l'Osservazione 4.12.

### 5.11. Disuguaglianza di Cauchy e teorema di Liouville

Dalla formula (5.5) otteniamo l'importante disuguaglianza di Cauchy:

$$|f^{(k)}(\alpha)| \leq k! \frac{\|f\|_{C_r(\alpha)}}{r^k} \quad (5.6)$$

con  $C_r(\alpha) = \{\alpha + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$

Per mostrarlo basta osservare che

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(\alpha)| &= \left| \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{k+1}} (rie^{i\theta}) d\theta \right| \\ &\leq \left| \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{r^k} d\theta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \|f\|_{C_r(\alpha)} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = k! \cdot \|f\|_{C_r(\alpha)} \cdot \frac{1}{r^k} \end{aligned}$$

dove  $r$ , il raggio, è sempre positivo.

**Teorema 5.30.** (Liouville) Sia  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  con  $f$  limitata allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste  $M > 0$  tale che  $|f(z)| < M \forall z \in \mathbb{C}$ . Dalla disuguaglianza di Cauchy abbiamo allora che  $f'(z_0) = 0 \forall z_0 \in \mathbb{C}$ . Infatti, essendo  $f$  intera abbiamo che  $B_R(z_0)$  è contenuto nel dominio di olomorfia di  $f$ , che è l'intero piano, per ogni  $R > 0$ ; quindi, da (5.6),

$$|f'(z_0)| \leq M/R$$

e per l'arbitrarietà di  $R$  si ha che  $f'(z_0)$  deve essere uguale a zero. La tesi si ottiene ricordando che  $\mathbb{C}$  è connesso e che se  $f'$  è zero in un insieme aperto connesso allora  $f$  è costante.  $\square$

Un'applicazione classica del Teorema di Liouville, che avete già visto ad Analisi II, è una dimostrazione del

**Teorema 5.31.** (Teorema fondamentale dell'Algebra). Se  $P(z)$  è un polinomio a coefficienti complessi di grado  $\geq 1$  allora  $P(z)$  ammette una radice in  $\mathbb{C}$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo  $P(z)$  non ammette radici. Quindi

$$g(z) := \frac{1}{P(z)}$$

è ben definita ed è intera. Inoltre è facile dimostrare che  $g$  è limitata. Per Liouville ne segue che  $g$  è costante,  $g(z) = c$ . Ma allora si avrebbe l'assurdo che  $P(z) = 1/c \forall z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

## 5.12. Principio del massimo modulo

Una conseguenza della formula di Cauchy locale è il seguente importante

**Teorema 5.32** (Principio del Massimo modulo). Sia  $E$  dominio limitato (in particolare connesso), e sia  $f \in \mathcal{O}(E)$  con  $f \in C^0(\overline{E})$  allora o  $|f|$  è costante oppure  $\max_{\overline{E}}|f(z)| = \max_{\partial E}|f(z)|$ . Inoltre, se il massimo di  $|f|$  in  $\overline{E}$  è raggiunto anche in un punto di  $E$  allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Seguiamo [O]. Dato che la funzione  $|f(z)|$  è continua sul compatto  $\overline{E}$ , essa raggiunge un valore massimo  $M = \max_{\overline{E}}|f(z)| < \infty$ .

Siano  $E_1 = \{z \in E : |f(z)| = M\}$ ,  $E_2 = \{z \in E : |f(z)| < M\}$ . L'insieme  $E_2$  è evidentemente un aperto, essendo ottenuto come controimmagine dell'aperto  $(-\infty, M)$  tramite la funzione continua  $|f(z)|$ .

Se mostriamo che anche  $E_1$  è aperto abbiamo finito, infatti  $E = E_1 \cup E_2$  ma  $E$  è connesso quindi uno tra  $E_1$  ed  $E_2$  deve essere vuoto. Se  $E_1$  è vuoto, allora  $E_2 = E$  e quindi  $|f(z)| < M$  per ogni  $z$  in  $E$ :  $M$  è allora assunto sulla frontiera. Se, invece,  $E_2$  è vuoto, allora  $E_1 = E$  e quindi  $|f(z)| = M$  è costante su tutto  $E$ .

Dimostriamo ora che anche  $E_1$  è un aperto. Se  $E_1 = \emptyset$  abbiamo finito. Se  $z_0 \in E_1$ , dato che  $E$  è aperto, possiamo trovare una pallina  $B_{r_0}(z_0)$  contenuta in  $E$ . Consideriamo ora  $\gamma_r = +\partial B_r(z_0)$  per  $r \leq r_0$ : dalla formula di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Parametizziamo come al solito  $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; passando ai moduli, e ricordando che  $|f(z_0)| = M$  e che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , si ha

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{r} r d\theta \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta = M$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} [M - |f(z)|] d\theta = 0$$

Siccome  $M - |f(z)|$  è una funzione continua e non negativa, deve necessariamente essere  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ . Facendo variare  $r$  tra 0 e  $r_0$ , si trova che  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , per ogni

$r \leq r_0$ ; pertanto,  $|f(z)| = M$  per ogni  $z \in B_{r_0}(z_0)$ , da cui segue che  $B_{r_0}(z_0) \subset E_1$ . In definitiva, se  $E_1$  è non vuoto,  $E_1$  è aperto.

Per dimostrare l'ultima affermazione osserviamo che per quanto appena visto siamo nel caso in cui  $|f(z)| = M \forall z \in E$ . Vogliamo dimostrare che allora  $f$  è costante. Scriviamo  $f = u + iv$ ; per ipotesi  $u^2 + v^2 = M^2$  in  $E$ , con  $M \in \mathbb{R}$ . Derivando rispetto a  $x$  e rispetto a  $y$  ed utilizzando Cauchy-Riemann otteniamo il sistema

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

da cui  $(u_x, u_y) = (0, 0)$  (perché  $u^2 + v^2 \neq 0$  su  $E$ ) e quindi, da Cauchy-Riemann,  $(v_x, v_y) = (0, 0)$ . Ne segue che  $f$  è costante dato che  $E$  è connesso.

□

## 6. Teorema di omotopia

### 6.1. Risultati di regolarità e Teorema di Morera

Dal fatto che  $f$  è olomorfa, e quindi, per quanto appena visto, analitica, seguono alcune importanti proprietà di regolarità che riassumiamo nella seguente

**Proposizione 6.1.** Sia  $E$  aperto.

1. Se  $f \in \mathcal{O}(E)$  allora  $f^{(k)}$  è olomorfa  $\forall k \in \mathbb{N}$  ed in particolare  $f \in C^\infty(E)$ .
2. Se  $f \in C^0(E)$  ammette primitiva in  $E$  allora  $f \in \mathcal{O}(E)$ .
3. Le forme  $\omega_1$  e  $\omega_2$  associate ad  $f$  hanno coefficienti  $C^1$  e sono quindi 1-forme differenziali  $C^1$ .
4. Le forme  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono **chiuse**

*Dimostrazione.* I primi due punti seguono dall'analicità delle funzioni olomorfe. Il terzo punto è conseguenza diretta della definizione e del punto 1. Rimane solo da dimostrare il fatto che le forme  $\omega_1, \omega_2$  sono chiuse ma ciò segue subito dalle equazioni di Cauchy-Riemann.  $\square$

Il seguente risultato, conseguenza diretta della Proposizione appena enunciata, è molto utile per stabilire che una funzione è olomorfa:

**Teorema 6.2** (Teorema di Morera). Sia  $E$  un dominio e  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  continua. Se per ogni disco  $B \subset E$  e per ogni  $\gamma \subset B$  chiusa regolare a tratti si ha  $\int_\gamma f(z)dz = 0$  allora  $f$  è olomorfa in  $E$ .

*Dimostrazione.* L'ipotesi ed il Corollario 5.25 ci permettono di affermare che  $f$  ammette primitiva in ogni  $B$  ed è dunque olomorfa in  $B$  per la Proposizione appena enunciata. Ne segue che  $f \in \mathcal{O}(E)$  dato che l'olomorfia è una proprietà locale.  $\square$

### 6.2. Teorema di omotopia

**Teorema 6.3** (Teorema di omotopia). Sia  $E$  un dominio. Supponiamo che le curve regolari a tratti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  siano omotope a estremi fissati oppure chiuse e omotope; se  $f$  olomorfa in  $E$  allora

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dall'olomorfia di  $f$ . Si ha infatti che  $\forall \gamma$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$$

e quindi, dato che  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme chiuse, possiamo applicare il teorema di omotopia per forme chiuse visto ad Analisi II. Si veda ad esempio [Garroni Malusa].  $\square$

Come immediato corollario del teorema di omotopia si ha la seguente:

**Proposizione 6.4.** Sia  $E$  dominio,  $\gamma \subset E$  chiusa regolare a tratti e  $\gamma \sim 0$ , ovvero  $\gamma$  omotopa a un punto. Se  $f \in \mathcal{O}(E)$ , si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

### 6.3. Domini semplicemente connessi e rami del logaritmo

Come conseguenza diretta dell'ultima Proposizione abbiamo:

**Proposizione 6.5.** Sia  $E$  un dominio **semplicemente connesso**,  $\pi_1(E) = 1$ . Allora l'integrale sulle curve chiuse regolari a tratti di una funzione olomorfa  $f \in \mathcal{O}(E)$  si annulla:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ chiusa regolare a tratti}$$

**Corollario 6.6.** Sia  $E$  un dominio **semplicemente connesso**. Se  $f \in \mathcal{O}(E)$  allora  $f$  ammette primitiva.

*Dimostrazione.* Basta applicare la Proposizione precedente ed il Corollario 5.25. Notiamo però che il Corollario 5.25 è stato dato come diretta applicazione della caratterizzazione delle forme esatte e come tale non è particolarmente esplicito (a meno che si abbia presente la dimostrazione di questa caratterizzazione).

Diamo allora una dimostrazione diretta di questo Corollario. Vogliamo definire una primitiva  $g$  per  $f$ . Fissiamo un punto qualsiasi  $z_0 \in E$  e consideriamo  $z \in E$ . Prendiamo un arbitrario cammino che unisca  $z_0$  a  $z$ , sia esso  $\gamma_z$ , e consideriamo

$$g(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta. \quad (6.1)$$

Per il teorema di omotopia e l'ipotesi di semplice connessione vediamo che  $g(z)$  è ben definita, indipendente dalla scelta di  $\gamma_z$ , cammino che unisce  $z_0$  fissato e  $z$ . Possiamo scrivere

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\eta} f(\zeta) d\zeta$$

dove  $\eta$  è il segmento che unisce  $z$  a  $z+h$ . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = f(z).$$

Ma  $f(\zeta) = f(z) + \psi(\zeta)$ , con  $\psi(\zeta) \rightarrow 0$  quando  $\zeta \rightarrow z$ . Riprendiamo l'espressione

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\eta} f(\zeta) d\zeta$$

e otteniamo quindi

$$g(z+h) - g(z) = \int_{\eta} f(z) d\zeta + \int_{\eta} \psi(\zeta) d\zeta = hf(z) + \int_{\eta} \psi(\zeta) d\zeta$$

Quindi

$$\left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{\zeta \in \eta} |\psi(\zeta)| |\ell(\eta)| = \sup_{\zeta \in \eta} |\psi(\zeta)| |h|$$

da cui la tesi.

Notate che questa dimostrazione ci dà un metodo per definire la primitiva. Lo applicheremo fra poco.  $\square$

**Proposizione 6.7.** Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso,  $f \in \mathcal{O}(E)$ ,  $f(z) \neq 0 \forall z \in E$  allora:

- (a) Esiste  $g \in \mathcal{O}(E)$  tale che  $f(z) = e^{g(z)}$ .
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N}$  esiste  $h \in \mathcal{O}(E)$  tale che  $f(z) = h(z)^n$ .

*Dimostrazione.* (a). Sia

$$j = \frac{f'}{f}$$

olomorfa per costruzione. Dato che  $E$  è semplicemente connesso,  $j$  ammette primitiva e sia  $g_1$  tale primitiva. Valutiamo la seguente derivata:

$$\left( \frac{f}{e^{g_1}} \right)' = \frac{f' e^{g_1} - f g_1' e^{g_1}}{e^{2g_1}} = \frac{f' e^{g_1} - f \frac{f'}{f} e^{g_1}}{e^{2g_1}} = 0$$

Ma allora  $\frac{f}{e^{g_1}} = c$  è costante,  $c \neq 0$  per ipotesi, e ponendo  $g = g_1 + \bar{c}$  dove  $e^{\bar{c}} = c$  otteniamo la tesi.

(b). Segue da (a) ponendo  $h = e^{\frac{g}{n}}$   $\square$

Sia  $E$  un dominio,  $0 \notin E$ . Si ricorda che un ramo del logaritmo in  $E$  è una funzione continua  $L$  in  $E$  tale che  $e^{L(z)} = z$  per ogni  $z \in E$ . Ponendo  $f(z) = z$  in (a) della precedente Proposizione otteniamo il seguente Corollario:

**Corollario 6.8.** Sia  $E$  un dominio semplicemente connesso e  $0 \notin E$ . Allora esiste un ramo del logaritmo in  $E$ .

Notate che un ramo del logaritmo  $g$  in  $E$ ,  $0 \notin E$ , si ottiene direttamente dalla dimostrazione del corollario 6.6; possiamo semplicemente definire

$$g_1(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

dove  $\gamma_z$  è un cammino che unisce un fissato punto  $z_0$  a  $z$ . Abbiamo visto che  $ze^{-g_1(z)}$  è una costante  $c$ : se calcoliamo questa espressione in  $z_0$  otteniamo che  $c = z_0$  (perché ovviamente, per definizione,  $g_1(z_0) = 0$ ). Quindi, in conclusione,

$$\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \bar{c} \quad \text{con} \quad e^{\bar{c}} = z_0$$

è un ramo del logaritmo. Se  $z_0$  può essere scelto uguale a 1 allora  $\bar{c} = 0$  e

$$\int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta$$

con  $\gamma_z$  un cammino che unisce 1 a  $z$ , è un ramo del logaritmo.

#### 6.4. Appendice: risultati di approssimazione per le curve

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve regolari (analoghe considerazioni di ciò che stiamo per discutere valgono per curve regolari a tratti). Nella dimostrazione del teorema di omotopia per forme chiuse riportato in [Garroni Malusa] le omotopie  $H(s, t)$  che collegano  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  vengono prese con particolari proprietà di regolarità: sono esse stesse  $C^1$  nelle due variabili e  $\partial_s \partial_t H = \partial_t \partial_s H$ . Ovviamente quando parliamo di due curve omotope intendiamo che esse siano omotope attraverso un'omotopia *continua*, perché è questa nozione che viene utilizzata in topologia. In questa appendice <sup>4</sup> dimostriamo che se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  regolari sono omotope attraverso un'omotopia continua  $K(s, t)$ , allora lo sono anche attraverso un'omotopia  $H(s, t)$  con le ulteriori proprietà enunciate.

Questo risultato lo trovate discusso in forme leggermente diverse in altri testi: si veda ad esempio [Rudin] (argomenti dati nel corso della dimostrazione del Teorema 10.40) oppure [Conway] (argomenti dati nel corso della dimostrazione del Teorema 6.7 nel capitolo IV).

Cominciamo enunciando (senza dimostrare) una versione di un noto risultato di approssimazione.

**Teorema 6.9** (Stone-Weierstrass). Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  compatto e  $f \in C^0(K, \mathbb{R})$  allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $p$  tale che  $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$  dove  $\|\cdot\|_\infty = \sup |\cdot|$ .

A partire da questo risultato dimostriamo il seguente

**Corollario 6.10.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve chiuse di classe  $C^k$  omotope in  $U$  allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope tramite un'omotopia  $h \in C^k([0, 1] \times [0, 1], U)$ .

*Dimostrazione.* Prima di tutto osserviamo che Stone-Weierstrass può anche dare approssimazioni  $C^\infty$  di funzioni con immagine  $\mathbb{R}^n$ , infatti siano  $p_1, \dots, p_n$  le approssimazioni polinomiali a meno di  $\varepsilon$  di  $\pi_1 \circ f, \dots, \pi_n \circ f$  dove  $\pi_i$  è la proiezione sull' $i$ -esima coordinata, allora  $p = \times_1^n p_i$  approssima  $f$  a meno di  $\sqrt{n} \cdot \varepsilon$ .

Sia  $h$  l'omotopia data e sia  $\varepsilon$  la distanza dall'immagine di  $h$  al complementare di  $U$  che esiste in quanto  $h([0, 1] \times [0, 1])$  è un compatto.

Per quanto detto prima possiamo approssimare  $h$  a meno di  $\varepsilon$  con una funzione  $h_1$  polinomiale sulle componenti, osserviamo che però  $h_1$  non ci dà necessariamente  $\gamma_1$  in partenza e  $\gamma_2$  in arrivo, dunque dobbiamo "collegare"  $h_1$  con le curve iniziali in modo da ottenere un'omotopia tra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Poniamo per convenzione che le omotopie parametrizzano le curve sul secondo parametro, ovvero che  $h(0, s)$  parametrizza  $\gamma_1$  e così via.

Ora osserviamo che per costruzione  $|h_1(0, s) - h(0, s)| < \varepsilon$  e dunque l'omotopia  $S_1$  definita da

$$S_1(t, s) = (1 - t)h(0, s) + th_1(0, s)$$

<sup>4</sup>a cura di Filippo Birindelli

è contenuta in  $U$  ed è di classe  $C^k$  lo stesso vale in arrivo per

$$S_2(t, s) = (1 - t)h(1, s) + th_1(1, s)$$

Concatenando otteniamo un'omotopia

$$h_2 = S_1 * h_1 * S_2 = \begin{cases} S_1(3t, s) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ h_1(3t - 1, s) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ S_2(3t - 2, s) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Che è di classe  $C^k$  ovunque tranne al più in  $t = \frac{1}{3}$  e  $t = \frac{2}{3}$ .

A questo punto si tratta di "rallentare" l'omotopia nei punti problematici così da avere che le derivate rispetto a  $t$  coincidano, a tal fine sia:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{e^{-\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{1-t}}} & t \in (0, 1) \\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

$\psi$  è una funzione  $C^\infty$  con tutte le derivate nulle in 0 e 1, infatti è sufficiente osservare che in  $x=0$  si ha che il numeratore ha tutte derivate infinitesime e il denominatore ha derivate non nulle e per  $x=1$  si osservi che  $\psi(1 - x) = 1 - \psi(x)$ .

Sia dunque:

$$h_3 = \begin{cases} S_1(\psi(3t), s) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ h_1(\psi(3t - 1), s) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ S_2(\psi(3t - 2), s) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$h_3$  è un'omotopia di classe  $C^k$  di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , infatti è un facile esercizio verificare che se  $g$  è  $C^\infty$  allora  $g(\psi(t))$  ha tutte le derivate nulle in 0 e 1.

Rimane da costruirsi da  $h_3$  un'omotopia di curve chiuse, il ragionamento risulta del tutto analogo al precedente una volta osservato che sempre per costruzione

$$L(t, s) = sh_3(t, 0) + (1 - s)h_3(t, 1) \in U$$

Otteniamo l'omotopia desiderata:

$$\tilde{h} = \begin{cases} h_3(t, \psi(2s)) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ L(t, \psi(2s - 1)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

**Osservazione 6.11.** Per giustificare a pieno la proposizione in [Garroni-Malusa] è necessario mostrare che per  $k = 1$  si ha che  $\tilde{h}$  ammette le derivate seconde miste continue.

Per  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = 2\psi'(2s - 1) \frac{d}{dt} (h_3(t, 0) - h_3(t, 1))$$

Che esiste continua siccome  $h_3$  è  $C^1$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = 3\psi'(3t) \frac{d}{ds} (h_1(0, \psi(2s)) - h(0, \psi(2s)))$$

Che esiste e continua siccome  $h_1$  e  $h$  sono  $C^1$  in  $t = 0$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$

Come sopra.

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} h_1(\psi(3t - 1), \psi(2s))$$

Che esiste e continua siccome  $h_1$  è  $C^\infty$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

## 7. Formule di Cauchy globali

### 7.1. Formula di Cauchy in una regione regolare

**Definizione 7.1.**  $E$  è detta regione regolare se è un insieme aperto limitato tale che il bordo di  $E$  è unione disgiunta di curve semplici regolari a tratti.

**Osservazione 7.2.** Se prendiamo un dominio  $E$  con dei "buchi" l'orientazione del bordo è quella che "se percorsa lascia la parte esterna di  $E$  a destra" Scriveremo  $\partial E^+$  per il bordo con tale orientazione. Vi rimando al corso di Analisi II per una discussione dettagliata dell'orientazione del bordo di una regione regolare.

**Teorema 7.3.** Sia  $E$  un dominio. Sia  $f \in \mathcal{O}(E)$  e sia  $D$  una regione regolare la cui chiusura è contenuta in  $E$ . Allora

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz = 0.$$

*Dimostrazione.* Scriviamo  $\int_{\partial D^+} f(z) dz$  come  $\int_{\partial D^+} \omega_1 + i \int_{\partial D^+} \omega_2$ . Per il teorema di Gauss-Green (o, per alcuni testi, di Stokes)

$$\int_{\partial D^+} \omega_1 + i \int_{\partial D^+} \omega_2 = \int_D d\omega_1 + i \int_D d\omega_2$$

ed il membro a destra è uguale a zero perché  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme **chiuse**. □

Vale di fatto un teorema leggermente più generale ottenibile dal risultato precedente tramite un procedimento di limite (si veda, ad esempio, [Fichera-De Vito]):

**Teorema 7.4.** Sia  $E$  una regione regolare del piano e sia  $f \in \mathcal{O}(E)$  e  $f \in C^0(\overline{E})$ , allora

$$\int_{\partial E^+} f(z) dz = 0.$$

A partire dal Teorema 7.3 e dal Teorema 7.4 otteniamo il seguente risultato fondamentale:

**Teorema 7.5.** (Formula di Cauchy per regioni regolari.) Sia  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, e  $D$  una regione regolare la cui chiusura è contenuta in  $E$ . Allora per ogni  $z_0$  in  $D$  vale la formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{7.1}$$

Più in generale se  $E$  è una regione regolare del piano,  $f \in \mathcal{O}(E)$  e  $f \in C^0(\overline{E})$  allora per ogni  $z_0$  in  $E$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \tag{7.2}$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $D_r = D \setminus \overline{B_r(z_0)}$ , cosicché  $D_r$  è una regione regolare di  $\mathbb{C}$  con chiusura contenuta in  $E$ . Consideriamo  $\phi(x) = \frac{f(x)}{x - z_0}$ . È chiaro che per  $\phi$  in  $D_r$  valgono le ipotesi del Teorema 7.3 e quindi

$$\int_{\partial D_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

ma

$$\int_{\partial D_r^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\partial B_r^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$$

pertanto otteniamo

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B_r^-} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

La tesi si ottiene sfruttando la formula di Cauchy locale per il membro a destra. La (7.2) si ottiene con lo stesso metodo, sfruttando il Teorema 7.4. □

**Osservazione 7.6.** L'ultimo passo della dimostrazione si può ottenere senza utilizzare la formula di Cauchy locale, sfruttando la solita parametrizzazione della circonferenza, passando al limite e usando la (uniforme) continuità di  $f$  per scambiare limite e integrale. Questa osservazione sarà utile nel dimostrare una generalizzazione della formula di Cauchy per funzioni non necessariamente olomorfe (compito 5).

In generale abbiamo la formula di Cauchy per le derivate successive:

$$f^k(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (7.3)$$

La dimostrazione è del tutto simile a quella appena presentata e lasciata per esercizio (dovrete utilizzare in maniera cruciale (5.5)).

## 7.2. Indice di avvolgimento

Denotiamo con  $\bar{\gamma}$  il supporto della curva  $\gamma$ .

**Definizione 7.7** (Indice di avvolgimento). Sia  $\gamma$  curva chiusa regolare a tratti, l'indice di avvolgimento attorno a  $z \in \bar{\gamma}^c$  di  $\gamma$  è

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw$$

**Proposizione 7.8.** Valgono le seguenti proprietà per  $\text{ind}_\gamma(z)$  :

- (i)  $\text{Ind}_\gamma(z)$  è continua sulle componenti connesse di  $\bar{\gamma}^c$ .
- (ii)  $\text{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $z \in \bar{\gamma}^c$ .
- (iii)  $\text{Ind}_\gamma(z)$  è costante sulle componenti connesse di  $\bar{\gamma}^c$ .
- (iv)  $\text{Ind}_\gamma(z)$  è nulla sulla componente connessa illimitata di  $\bar{\gamma}^c$ .

*Dimostrazione.* (i) e (ii) implicano (iii) infatti l'immagine di un connesso è un connesso per applicazioni continue, (i) e (iii) implicano (iv) infatti l'integrando tende uniformemente a 0 per  $|z| \rightarrow \infty$ ; notare che la componente connessa illimitata esiste ed è unica poichè  $\bar{\gamma}$  è compatto e quindi contenuto in un disco di raggio abbastanza grande.

Dimostriamo (i): di fatto la funzione  $\text{Ind}_\gamma(z)$  è olomorfa in  $z$ , e ciò si dimostra sviluppando in serie  $\frac{1}{w-z}$ , come abbiamo fatto quando abbiamo dimostrato che la formula di Cauchy locale implica che la funzione è sviluppabile in serie di potenze localmente.

Resta da dimostrare (ii): consideriamo  $\mathbb{C} \setminus \{z\}$  e le curve

$$\beta_k(\theta) = z + e^{2\pi i \theta k}, \quad \theta \in [0, 1]$$

Dallo studio di  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z\}, p)$ , con  $p$  un punto base, sappiamo che esiste  $k \in \mathbb{Z}$  ed un'omotopia che connette  $\gamma$  a  $\beta_k$ . Dal teorema di omotopia segue che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k} \frac{1}{w - z} dw.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_k} \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i \theta k}} 2\pi i k e^{2\pi i \theta k} d\theta = k$$

Ne segue che  $\text{Ind}_\gamma(z)$  è un intero. □

Di fatto è possibile dimostrare (ii) con metodi puramente analitici: osserviamo che se  $\gamma$  è parametrizzata da  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  e

$$f(t) = \int_0^t \frac{\phi'(x)}{\phi(x) - z} dx$$

allora è possibile dimostrare  $e^{-f(t)}(\phi(t) - z)$  è costante, valutando in 0 e 1 si ottiene  $e^{f(1)} = e^{f(0)} = e^0$  e dunque  $f(1) = 2\pi i k$  per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ . Per i dettagli potete consultare [Garroni-Malusa] oppure [Rudin].

**Definizione 7.9.** Sia  $U$  un insieme aperto e  $\gamma$  una curva regolare a tratti con supporto in  $U$ . Diremo che  $\gamma$  è **omologa a zero in  $U$**  se

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U^c.$$

Scriveremo  $\gamma \approx_U 0$  o semplicemente  $\gamma \approx 0$  se è chiaro che stiamo considerando l'insieme  $U$ . Analogamente, diremo che due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , regolari a tratti e contenute in  $U$  sono **omologhe**, e scriveremo  $\gamma_1 \approx_U \gamma_2$  se

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z) \quad \forall z \in U^c.$$

**Proposizione 7.10.** Se  $\gamma \sim 0$  in  $U$ , e cioè  $\gamma$  è omotopo al cammino costante, allora  $\gamma \approx_U 0$ .

*Dimostrazione.* La funzione  $\frac{1}{w-z}$  è olomorfa in  $w \in U$  per ogni fissato  $z \in U^c$ . Ma allora per il teorema di omotopia e per l'ipotesi si ha che

$$\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U^c$$

che è la tesi. □

È anche interessante il seguente Teorema di Jordan; sebbene intuitivamente chiaro il teorema ha una dimostrazione piuttosto intricata (si veda ad esempio [SS], Appendice).

**Teorema 7.11.** (Jordan) Sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa

- (i)  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  ha 2 componenti connesse, una illimitata  $I$  e una limitata  $L$
- (ii)  $L$  è semplicemente connessa
- (iii)  $\text{Ind}_\gamma(z) = 1 \quad \forall z \in L$
- (iv)  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in I$

### 7.3. Teorema di Cauchy globale

**Teorema 7.12** (Teorema di Cauchy globale). Sia  $\gamma$  curva chiusa regolare a tratti,  $U$  un aperto qualsiasi tale che  $\bar{\gamma} \subset U$  e  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U^c$ . Sia  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Allora valgono le seguenti per  $z \in U \setminus \bar{\gamma}$ :

$$f(z)\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \tag{7.4}$$

e

$$\int_\gamma f(z) dz = 0 \tag{7.5}$$

*Dimostrazione.* Diamo un outline della dimostrazione per poi completare i dettagli in seguito. Iniziamo definendo la funzione "rapporto incrementale"  $g$  come segue:

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dimostreremo che  $g$  è continua in  $U^2$ . Poi definiamo:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w) dw$$

Osserviamo che la 7.4 è equivalente a  $h \equiv 0$  in  $U \setminus \bar{\gamma}$  infatti

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z)\text{ind}_\gamma(z)$$

Dunque dimostreremo che  $h$  è olomorfa in  $U$ . Ora sia  $U_1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \text{ind}_\gamma(z) = 0\}$  definiamo  $h_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  come segue:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Anch'essa come dimostreremo è olomorfa. Si ha che  $h_1$  e  $h_2$  coincidono su  $U_1 \cap U$ , inoltre  $U^c \subset U_1$  per definizione, ne segue che la funzione  $\phi$  che vale  $h_1$  su  $U_1$  e  $h$  su  $U$  è intera. A questo punto è sufficiente osservare che siccome  $U_1$  contiene l'unica componente illimitata di  $\bar{\gamma}^c$  vale:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \phi(z) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} h_1(z) = 0$$

Quindi possiamo applicare Liouville e ottenere  $\phi \equiv 0$ , dunque  $h(z) \equiv 0$  e la 7.4 .

A questo punto la seconda formula segue da una furba applicazione della prima, infatti sia  $a \in U \setminus \bar{\gamma}$  e  $F(z) = (z - a)f(z)$  allora:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)}{z - a} dz = F(a) \text{ind}_{\gamma}(a) = 0$$

poichè  $F(a) = 0$ .

Procediamo ora rigorosamente e cominciamo con il dimostrare che  $g$  è continua; naturalmente siccome  $f$  è continua ci è dato verificarlo solo in  $z = w$ , più precisamente nei punti del tipo  $(a, a) \in U^2$ . Allora siano  $z$  e  $w$  in una palla  $B$  centrata in  $a$  e  $\xi[0, 1] \subset B$  la parametrizzazione del segmento che li congiunge:

$$\xi(t) = (1 - t)z + tw$$

Si osserva che:

$$\int_0^1 f'(\xi(t)) dt = \int_0^1 \frac{(f(\xi(t)))'}{\xi'(t)} dt = \frac{1}{w - z} \int_0^1 (f(\xi(t)))' dt = g(z, w)$$

poichè  $\xi'(t) \equiv w - z$  ma allora

$$g(z, w) - g(a, a) = \int_0^1 f'(\xi(t)) - f'(a) dt$$

Perciò siccome  $f'$  è continua e l'immagine di  $\xi$  è contenuta nella stessa palla di  $z$  e  $w$ , l'integrando è infinitesimo e  $g$  è continua.

Dimostriamo ora che  $h$  è olomorfa, prima di tutto osserviamo che siccome  $g$  è continua allora  $g$  è uniformemente continua sui compatti, in particolare sia  $z_0 \in U$  e  $B$  una palla chiusa di centro  $z_0$  contenuta in  $U$ , si ha che  $g|_{B \times \gamma}$  è uniformemente continua, il che ci permette di passare il limite dentro le integrazioni di  $g$  ristrette a  $B \times U$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lim_{z \rightarrow z_0} g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z_0, w) dw$$

$h$  è dunque continua. Per l'olomorfia ci appoggiamo al teorema di Morera e dunque si integri  $h$  sulle curve  $\sigma \subset B \subset U$  dove  $B$  è un disco, per Fubini:

$$\int_{\sigma} h(z) dz = \int_{\sigma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w) dw dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\sigma} g(z, w) dz dw$$

Ma siccome, fissato  $w$ ,  $g|_w$  è continua in  $B$  e (per come è definita) olomorfa in tutti i punti di  $B$  tranne al più in  $z = w$  possiamo applicare il Teorema 8.28 [Garroni-Malusà] ( $g$  ammette primitiva in  $B$ ) e dunque  $\int_{\sigma} h(z) dz = 0$  e per Morera  $h \in \mathcal{O}(U)$ .

L'olomorfia di  $h_1$  in  $U_1 \setminus U$  può seguire da un ragionamento del tutto analogo, solo che in questo caso l'integrando risulta essere sempre olomorfo in quanto  $|z - w| \geq d > 0$  dove  $d$  è la distanza del compatto  $\gamma$  dal chiuso  $U^c$

□

**Proposizione 7.13.** Sia  $\gamma$  una curva chiusa regolare a tratti,  $U$  un aperto qualsiasi tale che  $\bar{\gamma} \subset U$  e  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in U^c$ . Sia  $f \in \mathcal{O}(U)$ . Allora per ogni  $z \in U \setminus \bar{\gamma}$ :

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è lasciata per esercizio. Cominciate con il caso  $n = 1$ . Potete prendere la derivata ad ambo i membri e passare la derivata sotto il segno di integrale a destra. Questo passaggio però è da giustificare. □

## 7.4. Omologia ed indice di allacciamento

Per maggiori dettagli riguardo a gli argomenti trattati in questo Capitolo si può consultare *Algebraic topology, a first course* di William Fulton e anche [T. Wedhorn], *Complex analysis* (disponibile in rete).

L'obiettivo di questo capitolo è quello di definire il primo gruppo di omologia di uno spazio topologico  $X$  e di connettere questa nozione con l'indice di allacciamento. *Daremo solo le idee, perché una trattazione completa e totalmente rigorosa prenderebbe troppo tempo.*

**Definizione 7.14.** Dato un qualsiasi insieme  $S$  possiamo definire  $\mathbb{Z}^{(S)}$  come il gruppo abeliano costituito dalle applicazioni

$$f : S \rightarrow \mathbb{Z}$$

non nulle solo in un numero finito di punti.

$\mathbb{Z}^{(S)}$  è detto il gruppo abeliano libero generato da  $S$ , e può anche essere descritto come

$$\mathbb{Z}^{(S)} = \left\{ \sum_{s \in S} n_s s \mid n_s \in \mathbb{N}, n_s = 0 \text{ tranne per un numero finito} \right\}$$

dove la somma di due elementi di  $\mathbb{Z}^{(S)}$  è definita tramite

$$\sum n_s s + \sum n'_s s := \sum (n_s + n'_s) s$$

**Definizione 7.15** (Gruppi di catene). Dato uno spazio topologico  $X$  allora definiamo, rispettivamente, il gruppo delle  $0$ -catene,  $1$ -catene,  $2$ -catene come:

$$C_0(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = X$$

$$C_1(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = C^0([0, 1], X)$$

$$C_2(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = C^0(\Delta, X) \quad \text{dove } \Delta := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } 0 \leq y \leq 1 - x \leq 1 \right\}$$

**Definizione 7.16** (Operatori di bordo). Vogliamo definire degli omomorfismi di gruppi  $\partial_i$  tali che

$$\partial_i : C_i(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{i-1}(X, \mathbb{Z})$$

Definiamo allora  $\partial_1$  l'applicazione

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow C_0(X, \mathbb{Z}) \\ \Gamma = \sum n_i \gamma_i &\longmapsto \sum n_i (\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) \end{aligned}$$

Prima di definire  $\partial_2$  parametrizziamo il bordo di  $\Delta$  con

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1 - t, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_3 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (0, 1 - t) \end{aligned}$$

Allora possiamo definire  $\partial_2$  come:

$$\begin{aligned} \partial_2 : C_2(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow C_1(X, \mathbb{Z}) \\ \Lambda = \sum n_i \delta_i &\longmapsto \sum n_i \partial_2(\delta_i) := \sum n_i \sum_{i=k}^3 \delta_i \circ (\partial\Delta)_k \end{aligned}$$

Per finire si definisce  $\partial_0 \equiv 0$

Gli omomorfismi  $\partial_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , sono detti **omomorfismi di bordo**.

**Proposizione 7.17.** Considerando  $\partial_1$  e  $\partial_2$  gli omomorfismi di gruppi appena definiti si ha che

$$\partial_1 \circ \partial_2 \equiv 0$$

Dunque in particolare si ha che  $Im\partial_2 \subset Ker\partial_1$ .

**Definizione 7.18** (1-Cicli e 1-Bordi). Dato uno spazio topologico  $X$  definiamo gli *1-cicli* di  $X$  come

$$Z_1(X, \mathbb{Z}) := Ker\partial_1$$

e gli *1-bordi* di  $X$  come

$$B_1(X, \mathbb{Z}) := Im\partial_2$$

**Definizione 7.19** (Gruppi di omologia). Dato uno spazio topologico  $X$  definiamo il *primo gruppo di omologia* di  $X$  come

$$H_1(X, \mathbb{Z}) := \frac{Z_1(X, \mathbb{Z})}{B_1(X, \mathbb{Z})}$$

Se  $\Gamma$  è un 1-ciclo,  $\Gamma \in Z_1(X, \mathbb{Z})$ , allora denotiamo con  $[\Gamma]$  la sua classe nel gruppo  $H_1(X, \mathbb{Z})$ .

In modo analogo definiamo

$$H_0(X, \mathbb{Z}) := \frac{Z_0(X, \mathbb{Z})}{B_0(X, \mathbb{Z})}$$

con  $Z_0(X, \mathbb{Z}) = C_0(X, \mathbb{Z}) = Ker\partial_0$  (questi sono i 0-cicli) e  $B_0(X, \mathbb{Z}) := Im\partial_1$  (questi sono i 0-bordi).

**Osservazione 7.20.** Osserviamo che l'immagine attraverso un omomorfismo di un gruppo è un sottogruppo dello spazio di arrivo. Siccome  $C_1(X, \mathbb{Z})$  è un gruppo abeliano allora ogni suo sottogruppo è normale. Quindi la definizione di  $H_1(X, \mathbb{Z})$  è ben posta.

**Definizione 7.21.** Dato uno spazio topologico  $X$ , due 1-cicli che definiscono la stessa classe di omologia sono detti *omologhi*. Quindi, due cicli sono omologhi se e solo se la loro differenza è un bordo. Analogamente per due 0-catene (che sono automaticamente 0-cicli dato che  $\partial_0 \equiv 0$ ).

**Osservazione 7.22.** Dati  $x, y \in X$  (che sono 0-cicli), essi sono omologhi  $\iff x - y \in B_0(X, \mathbb{Z})$   $\iff \exists \gamma$  curva tale che  $\gamma(1) = x, \gamma(0) = y$ . Da ciò segue che se  $X$  è connesso per archi allora

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

Più in generale si ha che

$$H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$$

con  $A$  l'insieme che indicizza le componenti connesse per archi di  $X$ .

D'ora in poi consideriamo  $X = U \subset \mathbb{C}$ .

**Definizione 7.23** (Integrazione su 1-catene). Sia  $f$  una funzione su  $X$  e  $\Gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i$  una 1-catena di  $X$ . Se ogni  $\gamma_j$  è regolare a tratti allora definiamo l'integrale di  $f$  lungo  $\Gamma$  come

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{i=1}^k n_i \int_{\gamma_i} f dz$$

Diremo che  $\Gamma$  è regolare a tratti.

**Osservazione 7.24** (Indice di Allacciamento). Dalla Definizione precedente si capisce che possiamo definire l'indice di allacciamento  $Ind_{\Gamma}(z)$  di una 1- catena  $\Gamma$  regolare a tratti, analogamente a come avevamo definito l'indice di avvolgimento di una curva chiusa regolare a tratti. Non è al momento chiaro quali siano le proprietà di questo numero complesso associato a  $\Gamma$ .

**Teorema 7.25.** (vedere il libro di Fulton per la dimostrazione) Sia  $U \subset \mathbb{C}$  aperto,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1(U, \mathbb{Z})$  e regolari a tratti. Allora :

$$[\Gamma_1] = [\Gamma_2] \iff Ind_{\Gamma_1}(z) = Ind_{\Gamma_2}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$$

In particolare

$$\Gamma \in B_1(U, \mathbb{Z}) \iff Ind_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus U$$

Da cui segue che due curve chiuse regolari a tratti sono omologhe secondo la definizione data in questa sottosezione se e solo se sono omologhe rispetto alla definizione che avevamo dato con l'indice di avvolgimento.

**Osservazione 7.26.** Esiste un omomorfismo di gruppi  $h$  definito da

$$\begin{aligned} h : \pi_1(U, x_0) &\longrightarrow H_1(U, \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma + B_1(U, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

con  $x_0$  un punto base. Questa applicazione è ben definita perché se  $\gamma_1, \gamma_2$  sono laccetti puntati in  $x_0$ , allora

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \text{ in } U \Rightarrow \gamma_1 \approx_U \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \in B_1(U, \mathbb{Z})$$

con la prima implicazione già vista (Proposizione 7.10) e la seconda equivalenza ottenuta dal teorema 7.25.

Non è difficile dimostrare (ma non è banale) che questo omomorfismo è **surgettivo**. Si noti che, in generale,  $\pi_1(X, x_0) \neq H_1(X, \mathbb{Z})$ . Infatti si può ad esempio dimostrare che  $H_1(\mathbb{C} \setminus \{p, q\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$  mentre dal Teorema di Van-Kampen abbiamo che  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p, q\}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Di fatto si può dimostrare che  $\text{Ker } h = [\pi_1(U, x_0), \pi_1(U, x_0)]$ , il sottogruppo derivato<sup>5</sup>, generato da  $\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$  al variare di  $\gamma, \delta \in \pi_1(U, x_0)$ . A parole,  $H_1(U, \mathbb{Z})$  è isomorfo all'abelianizzazione di  $\pi_1(U, x_0)$ . Quindi

$$H_1(U, \mathbb{Z}) \simeq \frac{\pi_1(U, x_0)}{[\pi_1(U, x_0), \pi_1(U, x_0)]} =: \pi_1(U, x_0)_{\text{ab}}$$

Questi risultati valgono in generale, non solo per  $U \subset \mathbb{C}$ . Notare che se  $\pi_1(X, x_0)$  è abeliano, allora  $h$  è un isomorfismo.

**Osservazione 7.27.** Dalla suriettività di  $h$  segue che ogni 1-ciclo è omologo ad una concatenazione di laccetti, che per teoremi di approssimazione possiamo scegliere regolari a tratti. Sulla base di questo è possibile definire l'indice di avvolgimento per qualsiasi 1-ciclo  $\Gamma$  e valgono per tale indice tutte le proprietà della Proposizione 7.8. Se l'1-ciclo è regolare a tratti, allora l'indice di allacciamento è stato già definito nell'Osservazione 7.24, ma vediamo ora dalla suriettività di  $h$  che gode delle usuali proprietà enunciate nella Proposizione 7.8.

**Osservazione 7.28.** Consideriamo  $U = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  (e quindi  $\mathbb{C} \setminus U = \{z_0\}$ ). Sappiamo che

$$\Gamma \in B_1(U, \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Ind}_\Gamma(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \setminus U \text{ cioè } \text{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$$

Quindi  $\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0) : H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  è ben definita ed è surgettiva infatti  $\Gamma = \{z_0 + Re^{ik\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$  ha indice  $k$

Consideriamo un punto base  $p_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  e

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p_0) \xrightarrow{h} H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0)} \mathbb{Z}.$$

Capiamo subito che  $\varphi = \text{Ind}_{(\cdot)}(z_0) \circ h$  è surgettiva, in quanto composizione di applicazioni surgettive; d'altra parte  $\text{Ker } \varphi$  è banale perché sappiamo da Geometria 2 che  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p_0) = \mathbb{Z}$ . Ne segue che  $h$  e  $\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0)$  sono isomorfismi (già lo sapevano, ma qui non abbiamo utilizzato il risultato generale con l'abelianizzato). Riassumendo, abbiamo gli isomorfismi di gruppi abeliani

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p_0) \simeq H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

## 7.5. Formula omologica di Cauchy

**Teorema 7.29** (Formula omologica di Cauchy). Sia  $U \subset \mathbb{C}$  aperto,  $\Gamma \in Z_1(U, \mathbb{Z})$  regolare a tratti ed  $f$  olomorfa in  $U$ . Se  $\Gamma \in B_1(U, \mathbb{Z})$ , equivalentemente, se  $\text{Ind}_\Gamma(z) = 0 \forall z \in U^c$ , allora :

$$(i) \text{Ind}_\Gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta \quad \forall z \in U \setminus \Gamma$$

$$(ii) \int_\Gamma f = 0$$

$$(iii) \text{Ind}_\Gamma(z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall z \in U \setminus \Gamma$$

La dimostrazione procede come nel caso di un'unica curva chiusa.

Da (ii) segue subito il seguente

---

<sup>5</sup>anche denotato  $\pi_1(U, x_0)^{\text{der}}$

**Corollario 7.30.** Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono cicli regolari a tratti e  $[\Gamma_1] = [\Gamma_2] \implies \int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$

**Proposizione 7.31.**  $E \subset \mathbb{C}$  un insieme aperto,  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$  regolare a tratti,  $E^* := E \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ . Allora

$$\Gamma \approx_{E^*} \sum \text{Ind}_{\Gamma}(z_i) \partial B_{r_i}(z_i)$$

con  $r_i$  scelti in modo tale che i dischi  $B_{r_i}(z_i)$  siano tutti disgiunti.

*Dimostrazione.* Definiamo  $n_i = \text{Ind}_{\Gamma}(z_i)$ ,  $C_r(z_i) = \partial B_r(z_i)$ .  
Vogliamo dimostrare

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum n_i \text{Ind}_{C_r(z_j)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus E^* = (\mathbb{C} \setminus E) \cup \{z_1, \dots, z_m\}$$

Se  $z \in \mathbb{C} \setminus E \implies \text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$  perché  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$ ;

$\text{Ind}_{C_r(z_i)}(z) = 0$  perché  $z$  è esterno al disco;

Se  $z = z_i \implies \text{Ind}_{\Gamma}(z_i) = n_i$  per definizione e  $\text{Ind}_{C_r(z_j)}(z_i) = \delta_{ij}$  da cui la tesi.  $\square$

Diamo un'applicazione di questa proposizione.

**Corollario 7.32.** Sia  $E$  un aperto e  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$  regolare a tratti. Sia  $E^* := E \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$  e  $f$  olomorfa in  $E^*$ . Allora

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^m \text{Ind}_{\Gamma}(z_i) \int_{\partial B_{r_i}(z_i)} f(z) dz.$$

*Dimostrazione.* Basta applicare il Corollario 7.30 e la Proposizione precedente.  $\square$

## 8. Zeri di una funzione olomorfa

### 8.1. Ordine di uno zero.

Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(E)$  e non identicamente nulla,  $z_0 \in E$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Sappiamo che  $z_0$  è uno zero isolato, perché  $f$  è non nulla. Per il Teorema 5.29 esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(z_0) \subset E$  e  $\forall z \in B_r(z_0)$  vale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (8.1)$$

Sicuramente esiste  $k > 0$  tale che  $c_k \neq 0$ ; sia  $m$  il minimo di questi  $k$ , quindi  $c_m \neq 0$  ma  $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$ .

**Definizione 8.1** (Ordine di uno zero). L'intero positivo  $m$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_m \neq 0 \quad (8.2)$$

è per definizione l'ordine di  $z_0$ . L'intero positivo  $m$  è anche detta la *molteplicità* dello zero  $z_0$ .

Abbiamo anche visto nel corso della dimostrazione del principio d'identità per le funzioni analitiche che  $f$  ristretta a  $B_r(z_0)$  può essere scritta come  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ , con  $g \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$  e  $g(z_0) \neq 0$ . Vale di fatto un risultato globale:

**Proposizione 8.2.** Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(E)$  e non identicamente nulla,  $z_0 \in E$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Allora  $\exists m \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con  $g \in \mathcal{O}(E)$  e  $g(z_0) \neq 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $m$  l'ordine di  $z_0$  come zero. Definiamo:

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z), & \text{se } z \neq z_0 \\ c_m, & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

È chiaro che  $f(z) = (z - z_0)^m g(z) \forall z \in E$  e per come abbiamo definito  $c_m$  si ha che  $g(z_0) \neq 0$ .

Rimane solo da mostrare che  $g(z) \in \mathcal{O}(E)$ . Dalla definizione di  $g$  si vede che  $g(z) \in \mathcal{O}(E \setminus \{z_0\})$ . Per dimostrare la tesi è sufficiente far vedere che  $g(z)$  ammette uno sviluppo in serie di potenze in un intorno di  $z_0$ . Ma ciò è banale, infatti :

$$\begin{aligned} g(z) &\equiv (z - z_0)^{-m} f(z) \\ &\stackrel{(8.1)}{=} (z - z_0)^{-m} \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

□

### 8.2. Contare gli zeri

**Teorema 8.3** (Conto degli zeri). Sia  $E$  aperto,  $f \in \mathcal{O}(E)$ ,  $D$  una regione regolare contenuta in  $E$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}_f(D)$$

dove  $\mathcal{Z}_f(D)$  è il numero degli zeri di  $f$  in  $D$ , contati con molteplicità.

*Dimostrazione.* Sappiamo che se  $f$  ha un unico zero di ordine  $m$  in  $a$  si ha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \forall z \in D$  per unicità dello zero e  $g \in \mathcal{O}(D)$  per Proposizione 8.2. Ma allora

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1}g(z) + (z - a)^m g'(z)$$

per cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{m}{z - a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz.$$

Sappiamo che  $g'/g \in \mathcal{O}(E)$  e quindi per il Teorema di Cauchy globale

$$\int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$$

D'altra parte la funzione  $1/(z - a)$  è olomorfa in  $D \setminus \overline{B}_r(a)$  e quindi

$$\int_{\partial D^+} \frac{m}{z - a} dz = \int_{C_r(a)} \frac{m}{z - a} dz = m2\pi i$$

per un  $r$  abbastanza piccolo. Questo dimostra il risultato quando lo zero è unico.

Se più in generale  $\{a_1, \dots, a_k\}$  sono tutti gli zeri isolati di  $f$  con molteplicità algebrica  $m_j$  allora abbiamo, con ragionamento simile a quello fatto nella sezione precedente,

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_k)^{m_k} g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \forall z \in D$ ,  $g \in \mathcal{O}(D)$ . Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{m_j}{z - a_j} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \mathcal{Z}_f(D)$$

esattamente come sopra. □

La stessa dimostrazione stabilisce (esercizio):

**Teorema 8.4.**  $E$  dominio,  $f \in \mathcal{O}(E)$ ,  $\Gamma \approx 0$  in  $E$ ,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  gli zeri di  $f$  in  $E$  con molteplicità  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \text{Ind}_{\Gamma}(a_j) m_j$$

## 9. Teorema dell'applicazione aperta

**Proposizione 9.1.** Sia  $\varphi \in \mathcal{O}(E)$  con  $E$  aperto,  $z_0 \in E$  tale che  $\varphi'(z_0) \neq 0$ . Allora esiste un intorno  $V$  di  $z_0$  tale che :

(i)  $\varphi|_V$  è iniettiva .

(ii)  $\varphi(V) = W$  è aperto.

(iii) Se  $\psi : W \rightarrow V$  è l'inversa di  $\varphi|_V$  allora  $\psi$  è olomorfa e  $\psi'(w) = \frac{1}{\varphi'(z)}$  con  $w = \varphi(z)$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è del tutto simile a quella della Proposizione 5.8 ed utilizza il teorema della funzione inversa per la funzione  $F = (u, v)$ ,  $f = u + iv$ . Lascio a voi i dettagli.  $\square$

**Osservazione 9.2.** Per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  possiamo considerare l'applicazione  $\Pi_m$  tale che  $\Pi_m(z) := z^m$ . Allora  $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si ha che  $|\Pi^{-1}(w)| = m$  (ovvero le radici m-esime di  $z$ ). Inoltre  $\Pi_m$  è aperta , infatti preso  $V$  aperto tale che  $0 \notin V$  allora  $\forall z \in V$  si ha che  $\Pi'_m \neq 0$  ed usando la proposizione appena enunciata si ha che  $\Pi_m(V)$  è aperto. D'altro canto se consideriamo  $B_R(0)$  per qualche  $R > 0$  allora si vede facilmente che  $\Pi_m(B_R(0)) = B_{R^m}(0)$  che è un aperto.

**Teorema 9.3.** [Teorema di Struttura] Sia  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $z_0 \in E$ ,  $f \in \mathcal{O}(E)$  non costante con  $w_0 = f(z_0)$ . Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $f - w_0$  allora esiste un intorno sferico  $V$  di  $z_0$  ed una  $\varphi \in \mathcal{O}(V)$  tale che:

(i)  $f(z) = w_0 + \varphi(z)^m \forall z \in V$

(ii)  $\varphi'$  non ha zeri in  $V$  ed inoltre  $\varphi$  è una mappa invertibile da  $V$  su  $B_r(0)$  per qualche  $r > 0$  .

*Dimostrazione.* Consideriamo un disco  $\Omega$  (che è semplicemente connesso) intorno di  $z_0$ . A meno di restringere  $\Omega$  possiamo supporre che  $f(z) \neq w_0 \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$  (ricordiamo che gli zeri di una funzione  $g$  olomorfa non costante sono isolati).

Inoltre dato che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $f - w_0$  allora, per la Proposizione 8.2, vale

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$ .

Segue dalla proposizione 6.7 che esiste  $h \in \mathcal{O}(\Omega)$  tale che  $g(z) = e^{h(z)}$ . Dunque se definiamo  $\varphi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$  si vede facilmente che vale (i). Si può notare altrettanto facilmente che  $\varphi'(z_0) = \exp\left(\frac{h(z_0)}{m}\right) \neq 0$  dunque a meno di restringere  $\Omega$  si può supporre che  $\varphi'$  non abbia zeri in  $\Omega$  ed il resto della dimostrazione segue dalla Proposizione 9.1.  $\square$

**Osservazione 9.4.** Sotto le ipotesi del Teorema precedente si possono osservare alcune semplici conseguenze. La prima è che  $f(z) - w_0 = \Pi_m \circ \varphi(z)$  se  $z \in V$ . Segue che  $f(V \setminus \{z_0\}) = B_{r^m}^*(w_0)$  con  $B_R^*(w_0) := B_R(w_0) \setminus \{w_0\}$ , e quindi  $f(V) = B_{r^m}(w_0)$ . Inoltre

$$\forall w \in B_{r^m}^*(w_0) \text{ si ha che } |f^{-1}(w)| = m. \quad (9.1)$$

Inoltre per quanto detto fin'ora  $w_0 \in f(E)$  è un punto interno di  $f(E)$ ; analogamente, preso  $A$  aperto di  $E$  e  $w_0$  in  $f(A)$  si ha che  $w_0$  è un punto interno di  $f(A)$  e quindi  $f$  è un'applicazione aperta.

Riassumendo, abbiamo dimostrato fra le altre cose il seguente importante risultato:

**Teorema 9.5.** Sia  $E$  un dominio e  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Se  $f$  non è l'applicazione costante allora  $f$  è un'applicazione aperta. In particolare  $f(E)$  è un dominio.

Un'altra importante conseguenza della nostra analisi è il seguente

**Corollario 9.6.** Sia  $E \subset \mathbb{C}$  un dominio,  $f \in \mathcal{O}(E)$  ed iniettiva, allora  $f(z)' \neq 0 \forall z \in E$

*Dimostrazione.* Per assurdo esiste  $z_0 \in E$  tale che  $f(z_0)' = 0$ . Allora la funzione  $f(z) - f(z_0)$  ha uno zero di ordine  $m > 1$  (basti pensare al suo sviluppo di Taylor in  $z_0$ ). Ma allora per l'Osservazione 9.4, si veda in particolare (9.1),  $f$  è  $m$  ad 1 in un intorno di  $z_0$ , il che è assurdo dato che avevamo supposto  $f$  iniettiva.  $\square$

## 10. Singolarità isolate e residui

**Definizione 10.1** (Singolarità isolata).  $f$  in  $E$  ha una *singolarità isolata* in  $z_0$  se  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{z_0\})$

### 10.1. Sviluppo di Laurent

**Definizione 10.2** (Sviluppo in serie di Laurent). La serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

è detta *serie di Laurent centrata in  $z_0$*  e

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

è detta *parte principale*.

**Osservazione 10.3.**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = S_1 + S_2$$

con

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

usuale serie di potenze con raggio di convergenza  $R_1$  e

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

$S_2$  è assolutamente convergente per  $|z - z_0| > R_2$  con  $R_2 = \frac{1}{\rho_2}$  e  $\rho_2$  uguale al raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n \text{ con } \zeta = \frac{1}{z - z_0}$$

Se  $R_2 < R_1$  abbiamo convergenza della serie di Laurent per  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  mentre se  $R_2 > R_1$  non abbiamo convergenza.

Il ruolo delle serie di Laurent è messo in evidenza dal risultato che segue.

**Teorema 10.4.** Sia  $f \in \mathcal{O}(D)$  con  $D$  uguale alla corona circolare

$$\{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\}, \quad 0 \leq R_2 < R_1.$$

Allora  $f(z)$  è sviluppabile in serie di Laurent. Più precisamente esiste unica una successione di numeri complessi  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in D$$

Inoltre

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

con  $r$  un qualsiasi numero nell'intervallo  $(R_2, R_1)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $z \in D$ . Fissiamo  $\rho_2, \rho_1$  tali che  $0 \leq R_2 < \rho_2 < \rho_1 < R_1$  e tali che  $z$  sia contenuto nella regione regolare  $D(\rho_2, \rho_1) := \{\zeta \in \mathbb{C}, \rho_2 < |\zeta - z_0| < \rho_1\}$ . La funzione  $f$  è olomorfa

in  $D(\rho_2, \rho_1) := \{\zeta \in \mathbb{C}, \rho_2 < |\zeta - z_0| < \rho_1\}$  ed è continua fino al bordo di tale regione. Per il teorema di Cauchy per regioni regolari abbiamo allora che vale

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+(\rho_2, \rho_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Ora possiamo ragionare come già abbiamo fatto per lo sviluppo in serie di potenze ed osservare che nel primo integrale possiamo scrivere

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k \geq 0} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \text{ se } z \text{ è tale che } |z - z_0| < \rho_1 = |\zeta - z|$$

Analogamente, possiamo scrivere per il secondo integrale

$$\frac{1}{\zeta - z} = - \sum_{k \geq 0} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \text{ se } z \text{ è tale che } |z - z_0| > \rho_2 = |\zeta - z|$$

con convergenza uniforme sui compatti (ad esempio, rispettivamente, nelle regioni definite da  $|z - z_0| < \rho_1 - \varepsilon$  e  $|z - z_0| \geq \rho_2 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  piccolo a piacere). Possiamo quindi passare la somma sotto il segno d'integrale ed ottenere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}(z_0)} f(\zeta) \sum_{k \geq 0} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}(z_0)} f(\zeta) \left( - \sum_{k \geq 0} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

con

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & k \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta & k < 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

D'altra parte, per  $r \in (R_2, R_1)$  gli integrali che compaiono in (10.1) sono uguali ai rispettivi integrali su  $C_r(z_0)$  perché le funzioni integrande sono olomorfe e le curve sono ovviamente omotope. (Con lo stesso ragionamento capiamo che i coefficienti  $c_k$  sono anche uguali agli integrali che compaiono in (10.1) ma lungo una qualsiasi curva intorno a  $z_0$  che sia omotopa a  $C_r(z_0)$ .) Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

## 10.2. Classificazione delle singolarità

**Definizione 10.5** (Singolarità). Consideriamo  $f \in \mathcal{O}(B_R^*(z_0))$ ,  $B_R^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ ,  $R > 0$  ed il suo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Abbiamo definito  $z_0$  una *singolarità* per  $f$ .

Tale singolarità si dice

- (i) *eliminabile* se  $c_n = 0$ ,  $n < 0$
- (ii) *polo di ordine  $m$* ,  $m > 0$ , se  $c_{-m} \neq 0$  e  $c_{-k} = 0 \forall k > m$
- (iii) *essenziale* se  $c_n \neq 0$  per infiniti  $n$  negativi

**Teorema 10.6.**  $z_0$  è eliminabile  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0, \exists M > 0$  tali che  $|f(z)| \leq M \forall z \in B_\delta(z_0)$

*Dimostrazione.* La direzione  $\Rightarrow$  è chiara perché  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ .

Vediamo l'implicazione  $\Leftarrow$ . Consideriamo  $C_R(z_0)$ ,  $R < \delta$ . Sappiamo che

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

e tale numero non dipende da  $R$  per  $R \in (0, \delta)$ . Ma allora

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{i\theta})|}{R^{n+1}} R d\theta \leq \frac{M}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \text{ se } n < 0$$

Abbiamo allora dimostrato che  $c_n = 0$  se  $n < 0$  e quindi  $z_0$  è singolarità eliminabile.  $\square$

Se  $z_0$  è una singolarità eliminabile, possiamo definire la funzione  $\tilde{f}$  uguale a  $f$  in  $E_0$  ed uguale a  $c_0$  in  $z = z_0$ .  $\tilde{f}$  è olomorfa in  $E_0$  e continua nel disco  $D_R(z_0)$ . Una tale funzione ammette primitiva (per il Teorema 5.27) ed è quindi olomorfa.

Conclusione: possiamo eliminare una singolarità eliminabile.

**Esempio 10.7.** Data  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$  e  $z = 0$ , allora dallo sviluppo in serie del seno vediamo che  $z = 0$  è una singolarità eliminabile.

**Proposizione 10.8.**  $z_0$  è un polo  $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z) \end{aligned}$$

Ma allora  $\varphi(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$  è olomorfa e  $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} c_{-m} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

$\Leftarrow$ ) Per ipotesi  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $|f(z)| > M \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .

Definiamo  $\varphi(z) := \frac{1}{f(z)}$ . Allora  $\varphi \in \mathcal{O}(B_\delta^*(z_0))$  e  $|\varphi(z)| < \frac{1}{M}$  in  $B_\delta^*(z_0)$  e quindi, per il Teorema 10.6,  $\varphi$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$  da cui

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n$$

Per ipotesi  $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \Rightarrow d_0 = 0$

Sia  $m$  il primo indice non nullo nello sviluppo in serie di  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^{n+m} \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \psi(z) \end{aligned}$$

Ma allora  $\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n$  è olomorfa e  $\psi(z_0) = d_m \neq 0$

Inoltre risulta

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m \psi(z)}$$

e  $\frac{1}{\psi(z)}$  è ben definita e olomorfa in un intorno di  $z_0$

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{d}_n (z - z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{d}_n (z - z_0)^n \Rightarrow z_0 \text{ è un polo di ordine } m$$

□

**Osservazione 10.9.** La dimostrazione appena data stabilisce anche che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  per  $f(z) \Leftrightarrow z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $\frac{1}{f(z)}$

**Esempio 10.10.** Classifichiamo la singolarità in  $z = -1$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z + 1)^2}$$

Notiamo che

$$e^z = e^{-1} e^{z+1} = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + 1)^n}{n!}$$

A questo punto

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} e^{-1} \frac{(z + 1)^n}{(n + 2)!} = \frac{e^{-1}}{(z + 1)^{-2}} + \frac{e^{-1}}{(z + 1)^{-1}} + \dots$$

Quindi  $z = -1$  è un polo di ordine 2

**Teorema 10.11** (Casorati-Weierstrass).  $z_0$  è una singolarità essenziale per  $f$  se e solo se

$$\forall w \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon, \forall \delta, \exists z_\delta \in B_\delta^*(z_0) \text{ tale che } |f(z_\delta) - w| < \varepsilon. \quad (10.2)$$

*Dimostrazione.* La direzione  $\Leftarrow$  è ovvia dai due teoremi precedenti, perché se è vera (10.2) allora  $f$  non converge né ad un limite finito, né converge in modulo a  $+\infty$ .

Dimostriamo l'altra direzione. Per assurdo  $\exists w, \delta, \varepsilon$  tali che  $|f(z) - w| > \varepsilon \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .

Definiamo  $\varphi(x) = \frac{1}{f(z) - w}$  dove, per ipotesi,  $f(x) \neq w \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .

Ma allora  $\varphi \in \mathcal{O}(B_\delta^*(z_0))$  e  $|\varphi(z)| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow z_0$  è una singolarità eliminabile per  $\varphi$ . Supponiamo che  $z_0$  sia uno zero di ordine  $m$  per  $\varphi \Rightarrow$

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \psi(z) \text{ con } \psi(z_0) \neq 0 \text{ e } \psi \text{ olomorfa.}$$

Ma allora, per come è definita  $\varphi$ , risulta  $f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^m \psi(z)}$

Cioè se  $m = 0$ ,  $f$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ ; se  $m > 0$ ,  $f$  ha un polo di ordine  $m$ .

In entrambi i casi ciò è assurdo perché contraddice l'ipotesi che  $z_0$  sia singolarità essenziale. □

Notiamo che conseguentemente, se  $z_0$  è singolarità essenziale, allora l'immagine di  $f$  è densa in  $\mathbb{C}$ .

### 10.3. Residui

Sia  $z_0$  una singolarità isolata per  $f$ ,  $f \in \mathcal{O}(B_R^*(z_0))$ ; sappiamo che vale

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \text{ in } B_R^*(z_0) \text{ con } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Definizione 10.12** (Residuo). Il *residuo di  $f$  in  $z_0$*  è

$$Res[f, z_0] \equiv Res_{z_0}[f] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} f(z) dz$$

**Proposizione 10.13.** (i) Se  $z_0$  è eliminabile  $\Rightarrow Res_{z_0}[f] = 0$

(ii) Se  $z_0$  è un polo di ordine 1  $\Rightarrow Res_{z_0}[f] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$

(iii) Se  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $z_0$  zero di ordine 1 per  $\psi \Rightarrow Res_{z_0}[f] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

(iv) Se  $z_0$  è un polo di ordine  $m \Rightarrow Res_{z_0}[f] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

*Dimostrazione.* (i) Banale perché  $c_{-1} = 0$

(ii) Basta scrivere  $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$

(iii) Segue dal punto precedente:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

(iv) Basta scrivere  $(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$  □

**Esempio 10.14.**

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{(i + z)^2 (i - z)^2}$$

$z_0 = i$  è polo di ordine 2

$$\begin{aligned} Res_i[f] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} -2(z + i)^{-3} = -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

Se  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{z_0\})$  allora definiamo il tipo di singolarità che  $f$  ha in  $z_0$  rifacendoci allo sviluppo di Laurent di  $f$  in un intorno sferico bucato  $B_R^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ ,  $R > 0$ , tutto contenuto in  $E$ . Più in generale, possiamo considerare  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_m\})$  e studiare  $f$  nell'intorno di ogni  $z_j$  prendendo il corrispondente sviluppo di Laurent in opportuni intorni  $B_R^*(z_j)$ .

**Teorema 10.15** (dei residui).  $E$  aperto,  $D$  regione regolare contenuta in  $E$ ,  $\{z_1, \dots, z_m\} \subset D$ ,  $f \in \mathcal{O}(E \setminus \{z_1, \dots, z_m\}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} f(z) dz = \sum_{j=1}^m Res_{z_j}[f]$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $D_r := D \setminus \bigcup_{j=1}^m B_r(z_j)$ , con  $B_r(z_j)$  il disco di centro  $z_j$  e raggio  $r$ . Scegliamo  $r$  abbastanza piccolo in modo da assicurare che tutti questi dischi siano disgiunti. Allora  $f \in \mathcal{O}(D_r)$  e  $f$  è continua fino al bordo; quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D_r^+} f(z) dz \\ &= \int_{\partial D^+} f(z) dz - \sum_{j=1}^m \int_{C_r(z_j)} f(z) dz \\ &= \int_{\partial D^+} f(z) dz - 2\pi i \sum_{j=1}^m Res_{z_j}[f] \end{aligned}$$

□

**Teorema 10.16.**  $E$  aperto,  $\Gamma$  una 1-catena omologa a 0 in  $E$ .  $S = \{\text{singolarità di } f\} = \{z_1, \dots, z_m\}$ . Allora  $f \in \mathcal{O}(E \setminus S) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \text{Ind}_{\Gamma}(z_j) \text{Res}_{z_j}[f]$$

*Dimostrazione.* Basta applicare la definizione di residuo 10.12 ed il Corollario 7.32

□

## 10.4. Funzioni Meromorfe

**Definizione 10.17** (Funzione meromorfa). Sia  $E \subseteq \mathbb{C}$  un aperto.

Una funzione  $f$  si dice meromorfa in  $E$  se  $\exists \mathcal{P}(f) \subset E$ ,  $\mathcal{P}(f)$  discreto e senza punti di accumulazione, tale che

- $f(x)|_{E \setminus \mathcal{P}(f)}$  è olomorfa
- I punti di  $\mathcal{P}(f)$  sono poli

L'insieme delle funzioni meromorfe in  $E$  è denotato con il simbolo  $\mathcal{M}(E)$ . Somme e prodotti di funzioni meromorfe sono meromorfe; se  $f$  è meromorfa e non è identicamente nulla, allora  $1/f$  è anche meromorfa. Ne segue che  $\mathcal{M}(E)$  è un campo.

## 10.5. La sfera di Riemann

La sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  è la compattificazione di Alexandrov dello spazio topologico  $\mathbb{C}$ . Questo significa che la sfera di Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$  è definita dal punto di vista insiemistico come  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Osserviamo che questa non è altro che una modellizzazione della retta proiettiva complessa  $\mathbb{C}P^1$  (si veda ad esempio E. Sernesi *Geometria 1*) e quindi  $\mathbb{C}P^1$  è una notazione alternativa per la sfera di Riemann.

La sfera di Riemann può essere dotata della seguente topologia:  $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$  è un aperto se e solo se

- (i)  $U \cap \mathbb{C}$  è aperto in  $\mathbb{C}$  dotato dell'usuale topologia;
- (ii) se  $\infty \in U$  allora esiste un  $R > 0$  per cui  $(\overline{B_r(0)})^c \subset U$ .

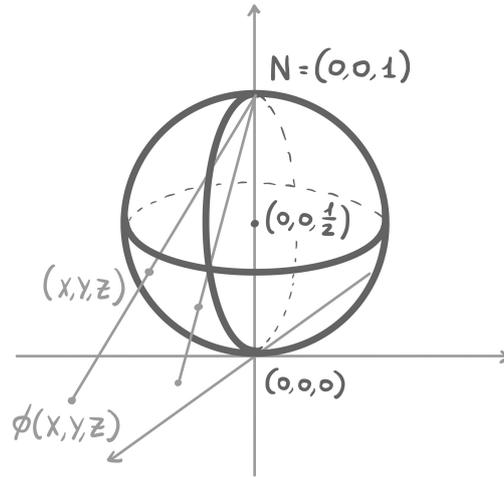
Il motivo per cui si parla di *sfera* di Riemann è che si può costruire un omeomorfismo tra  $S^2$  e  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Per costruirlo si parte dalla proiezione stereografica  $\phi: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  (dove si prende  $S^2$  centrata in  $(0, 0, \frac{1}{2})$  e di raggio  $\frac{1}{2}$  e  $N = (0, 0, 1)$ ) che ad ogni punto  $(X, Y, Z)$  della sfera associa l'intersezione tra la retta passante per tale punto e  $N$  con il piano  $\{z \in \mathbb{C} : z = 0\} \equiv \mathbb{C}$ . Questa  $\phi$  è un omeomorfismo e la sua espressione è

$$\phi(X, Y, Z) = \left( \frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}, 0 \right).$$

$\phi$  ammette un'inversa data esplicitamente da

$$(x, y, 0) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

La proiezione stereografica si estende ad un'applicazione  $\hat{\phi}: S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ponendo  $\hat{\phi}(N) = \infty$  e  $\hat{\phi}|_{S^2 \setminus N} = \phi$ . Non è difficile dimostrare che  $\hat{\phi}$  è un omeomorfismo. Quindi  $\widehat{\mathbb{C}}$  è uno spazio topologico compatto e semplicemente connesso.



## 10.6. Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann

Il materiale trattato in questa sottosezione è in verità un adattamento di nozioni che vengono date sulle superfici di Riemann (in questo caso la superficie di Riemann è  $\widehat{\mathbb{C}} \equiv \mathbb{C}P^1$ ) ma è possibile parlarne in maniera autonoma, senza introdurre tutte le definizioni inerenti alle Superfici di Riemann. Sia  $E \subseteq \mathbb{C}$  un aperto e supponiamo che  $E$  contenga il complementare di un disco  $B_r(0)$ , per un  $r$  opportuno.

**Definizione 10.18.** Una funzione  $f$  definita in  $E$  è analitica in un intorno di  $\{\infty\}$  se la funzione

$$\hat{f}(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

è analitica in un intorno di 0. Diremo brevemente che  $f$  è analitica in  $\{\infty\}$ .

Se  $f$  è analitica in  $\{\infty\}$  allora esiste  $\rho > 0$  tale che

$$\hat{f}(w) = \sum_{k \geq 0} a_k w^k, \quad |w| < \rho$$

e quindi

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^{-k}, \quad |z| > \rho^{-1}$$

Questa serie converge assolutamente per  $|z| > \rho^{-1}$  e totalmente per  $|z| \geq r$  con  $r > \rho^{-1}$ .

Estendiamo  $f$  ad una funzione in  $\widehat{E} = E \cup \{\infty\}$  ponendo  $f(\infty) := a_0$  se la somma inizia con  $k = 0$ , e  $f(\infty) = 0$  se la somma inizia con  $k > 0$ . Diremo che  $\{\infty\}$  è uno zero di ordine  $m$  per (l'estensione di)  $f$  se 0 è uno zero di ordine  $m$  per  $\hat{f}$  e cioè se  $a_k = 0$  per  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  e  $a_m \neq 0$ .

Vediamo qualche esempio:

- $f(z) = z^{-n}$ ,  $n \geq 0$  è analitica in  $\{\infty\}$  e se  $n > 0$  ha in  $\{\infty\}$  uno zero di ordine  $n$ ;
- $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ ,  $n \geq 0$  è analitica in  $\{\infty\}$  e se  $n > 0$  ha in  $\{\infty\}$  uno zero di ordine  $n$ ;
- $f(z) = 1/(1 + z^2)$  è analitica in  $\{\infty\}$  ed ha in  $\{\infty\}$  uno zero di ordine 2;
- $f(z) = z/(1 + z)$  è analitica in  $\{\infty\}$  ed  $f(\infty) = 1$ .

**Definizione 10.19.** Diremo che  $f$  ha una singolarità isolata in  $\{\infty\}$  se la funzione

$$\hat{f}(w) := f\left(\frac{1}{w}\right)$$

ha una singolarità isolata in 0.

Se  $\{\infty\}$  è una singolarità isolata allora esiste  $R > 0$  tale che

$$\hat{f}(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k w^k, \quad |w| < R$$

e quindi

$$f(z) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} b_\ell z^\ell, \quad |z| > 1/R$$

dove  $b_\ell = a_{-\ell}$ . Il punto  $\{\infty\}$  è una singolarità eliminabile, un polo di ordine  $m \geq 1$ , una singolarità essenziale, se rispettivamente,

- $b_\ell = 0 \forall \ell > 0$  (e quindi  $f(z) = \sum_{k \geq 1} b_{-k} z^{-k}$ ,  $|z| > 1/R$ );
- $b_m \neq 0$ ,  $b_{m+j} = 0 \forall j \geq 1$ ;
- $b_\ell \neq 0$  per infiniti  $\ell > 0$

Ad esempio:

- un polinomio di ordine  $m$  ha in  $\{\infty\}$  un polo di ordine  $m$ ;
- $e^z$  ha in  $\{\infty\}$  una singolarità essenziale.

Se  $\{\infty\}$  è un polo di ordine  $m$  per  $f$  allora

$$f(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0 + b_{-1} z^{-1} + \dots$$

Il polinomio

$$b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0$$

è detto *parte principale di  $f$  in  $\{\infty\}$* .

Estendiamo questi concetti ulteriormente e dimostriamo un classico risultato.

**Definizione 10.20.** Sia  $\hat{E} \subset \hat{\mathbb{C}}$  un aperto. Diremo che una funzione  $f : \hat{E} \rightarrow \mathbb{C}$  è meromorfa in  $\hat{E}$  se  $f$  è analitica in  $\hat{E}$  tranne che in un insieme discreto di punti, privo di punti di accumulazione, ognuno dei quali è un polo.

Denotiamo con  $\mathcal{M}(\hat{E})$  l'insieme delle funzioni meromorfe in  $\hat{E}$  (è un campo).

Ad esempio, una funzione razionale  $f(z) = P(z)/Q(z)$  definisce una funzione meromorfa in  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Un classico risultato stabilisce che queste sono *tutte* le funzioni meromorfe di  $\hat{\mathbb{C}}$ :

**Teorema 10.21.** Si ha

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \{P(z)/Q(z), \quad P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]\}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$ . I poli di  $f$  sono necessariamente in numero finito, perché  $\hat{\mathbb{C}}$  è uno spazio topologico connesso e compatto. Siano quindi  $\{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  i poli di  $f$ . Se  $f$  è analitica in  $\{\infty\}$  consideriamo  $P_\infty(z)$  uguale alla funzione costante  $f(\infty)$ . Altrimenti, supponiamo che ad esempio  $z_{k+1} = \{\infty\}$  e sia  $m$  l'ordine di  $\{\infty\}$  come polo. Sia  $P_\infty(z)$  la sua parte principale, un polinomio in  $z$  di grado  $m$ . Siano  $\{z_1, \dots, z_k\}$  i poli al finito, con  $z_j$  di ordine  $m_j$ , e siano  $P_1, \dots, P_k$  le associate parti principali:

$$P_j(z) = \frac{\alpha_1}{z - z_j} + \frac{\alpha_2}{(z - z_j)^2} + \dots + \frac{\alpha_{m_j}}{(z - z_j)^{m_j}}. \quad (10.3)$$

Sappiamo che  $P_j(z)$  è analitica in  $\{\infty\}$ . Consideriamo ora

$$g(z) = f(z) - P_\infty(z) - \sum_{j=1}^k P_j(z).$$

È facile capire che  $g$  è intera e che  $g(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ . Ma allora  $g$  è nulla per Liouville. Quindi

$$f(z) = P_\infty(z) + \sum_{j=1}^k P_j(z)$$

e la tesi è dimostrata. □

La decomposizione  $f(z) = P_\infty(z) + \sum_{j=1}^k P_j(z)$  è detta la decomposizione di  $f$  in frazioni semplici.

## 11. Applicazioni del Teorema dei Residui

Presentiamo in questa sezione una serie di applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali di funzioni reali di una variabile reale.

### 11.1. Valore principale

**Definizione 11.1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  integrabile secondo Riemann su ogni intervallo  $[-R, R]$ ,  $R > 0$ . Definiamo il **valore principale** di  $f$  come

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

se tale limite esiste.

Osserviamo che una funzione può avere valore principale finito ma non essere integrabile in senso improprio.<sup>6</sup> Ad esempio la funzione uguale ad 1 per  $x \geq 0$  ed uguale a  $-1$  per  $x < 0$  ha valore principale finito ed uguale a zero, ma non è integrabile in senso improprio. Più in generale, una funzione dispari ha sempre valore principale uguale a zero ma può non essere integrabile in senso improprio.

Analogamente se  $x_0$  è un punto singolare per  $f$ ,  $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiamo

$$\text{VP} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right]$$

Possiamo ovviamente anche definire il valore principale di  $f$  definita in  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ .

È ovvio che se  $f$  è integrabile in senso improprio allora il valore principale è finito ed uguale all'integrale improprio. È anche chiaro che per una funzione pari, integrale improprio e valore principale coincidono.

### 11.2. Integrali di funzioni razionali

Iniziamo con un esempio già visto durante la correzione degli esercizi.

**Esempio 11.2.** Calcolare il valore del seguente integrale

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

(La funzione è pari, quindi integrale improprio e valore principale coincidono...)

Definiamo la funzione di una variabile complessa  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)^2} = \frac{1}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$ .

La funzione  $f$  ha un polo di ordine 2 in  $ia$  poichè  $\frac{1}{(z+ia)}$  è olomorfa intorno a  $ia$  e non nulla.

$$\begin{aligned} \text{Res}[f(z), ia] &= \lim_{z \rightarrow ia} \left( \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} ((z-ia)^2 f(z)) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(z+ia)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow ia} \left( (-2) \frac{1}{(z+ia)^3} \right) \\ &= -2(2ia)^{-3} = \frac{1}{4ia^3} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) &= \frac{1}{4ia^3} \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile in senso improprio se esistono i limiti  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+R} f(x) dx$  e  $\lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^0 f(x) dx$  ed in tal caso si pone  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  uguale alla somma di questi due limiti

Qui  $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$  con  $\gamma_1 = t$ ,  $t \in [-R, R]$  e  $\gamma_2 = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . A questo punto, scrivendo in maniera esplicita l'integrale e moltiplicando per  $\frac{1}{2\pi i}$ , otteniamo

$$\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz = \frac{\pi}{2a^3}$$

Ci concentriamo ora sul secondo integrale e mostriamo che in modulo va come  $\frac{1}{R^3}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz \right| &\leq \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{|z^2 + a^2|^2} dz \leq \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{(|z|^2 - |a|^2)^2} dz \\ &\leq \max_{C_R^+(0)} \left( \frac{1}{(|z|^2 - |a|^2)^2} \right) \cdot L(C_R^+(0)) \sim \frac{1}{(R^2)^2} \cdot \pi R \sim \frac{1}{R^3} \\ &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \end{aligned}$$

Passiamo ora ad una generalizzazione di questo esempio. Consideriamo l'integrale

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

con  $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  e  $\delta(Q) \geq \delta(P) + 2$ .

In questi casi si procede come nell'esempio appena visto. Si applica il teorema dei residui e si ottiene

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} \left[ \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \right), \text{ dove } z_j \in \{Zeri \text{ di } Q(z)\}$$

Quindi si calcolano i residui con i noti metodi ed infine si sfrutta che l'integrale su  $C_R^+(0)$  è infinitesimo per  $R \rightarrow \infty$  (ciò segue dall'ipotesi sui gradi dei due polinomi).

### 11.3. Lemma di Jordan e applicazioni

Il calcolo di integrali reali tramite integrali curvilinei complessi richiede spesso di stimare alcuni integrali curvilinei. Si veda l'esempio della sezione precedente. Un risultato elementare ma molto utile è il seguente.

**Lemma 11.3.** (*Lemma di Jordan*). Vale la stima

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R}. \quad (11.1)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta$$

Inoltre la funzione  $\sin \theta$  è concava in  $[0, \pi/2]$ : quindi vale  $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi} \theta$ . La dimostrazione si conclude ora con semplici passaggi.  $\square$

Vediamo un esempio.

Calcolare

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx, \quad a > 0$$

Notiamo che in questo caso non si può semplicemente considerare la funzione integranda come una funzione complessa, in quanto  $\cos(ax)$  è illimitato nella direzione verticale. D'altra parte

$$\frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) = \Re\left(\frac{1}{x^2 + 1} e^{iax}\right).$$

Consideriamo allora la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} e^{iaz} = \frac{1}{(z + i)(z - i)} e^{iaz},$$

la quale presenta poli semplici in  $\pm i$ , di cui solo  $i$  è contenuto nella superficie contenuta nell'usuale cammino  $\gamma_R$ :  $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$  con  $\gamma_1 = t$ ,  $t \in [-R, R]$  e  $\gamma_2 = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Ora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z)}{\psi(z)}, \text{ con } \phi(z) = \frac{e^{iaz}}{z + i} \text{ e } \psi(z) = z - i \\ \Rightarrow \text{Res}[f(z), i] &= \frac{\phi(i)}{\psi'(i)} = \frac{e^{-a}}{2i} \\ \Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z) &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a} \end{aligned}$$

Adesso ragioniamo sull'integrale su  $\gamma_R$  e mostriamo che la parte su  $C_R^+(0)$  è infinitesima per  $R \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{aligned} \pi e^{-a} &= \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R^+(0)} \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{i\theta}}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin(\theta)} e^{iaR \cos(\theta)}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^{+R} \frac{\sin(ax)}{x^2 + 1} dx + iR \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin(\theta)} e^{iaR \cos(\theta)}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Applichiamo il Lemma di Jordan ed otteniamo che

$$\left| iR \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin(\theta)} e^{iaR \cos(\theta)}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} e^{i\theta} d\theta \right| \leq \psi(R)$$

con  $\psi(R) \sim \frac{1}{R^2}$ . Quando  $R \rightarrow \infty$  otteniamo infine che

$$\pi e^{-a} = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx + i \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \sin(ax) dx$$

da cui

$$\pi e^{-a} = \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx.$$

Più in generale possiamo considerare il calcolo di integrali del tipo

$$\text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx, \quad a > 0$$

con  $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  e  $\delta(Q) \geq \delta(P) + 2$ ,  $a \geq 0$ .

Anche in questo caso non possiamo considerare la funzione integranda come una funzione complessa; consideriamo invece la funzione  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$  e procediamo come nell'esempio che abbiamo appena trattato.

## 11.4. Teorema del residuo frazionario

Un altro risultato utile è il seguente *teorema del residuo frazionario*:

Sia  $z_0$  un polo semplice <sup>7</sup> di  $f(z)$  e sia  $\gamma_\varepsilon^\alpha$  l'arco di circonferenza

$$\gamma_\varepsilon^\alpha(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}, t \in [\theta, \theta + \alpha]$$

con  $\theta$  fissato. Allora risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon^\alpha} f(z) dz = \alpha i \operatorname{Res}[f(z), z_0].$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio (suggerimento: scrivete lo sviluppo di Laurent di  $f$  intorno a  $z_0, \dots$ ).

Il teorema del residuo frazionario è utile nel contesto di questa sezione quando la funzione  $f(x)$  che compare in  $\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  ha una singolarità in un punto  $x_0$ . Abbiamo visto negli esercizi il caso di

$$\operatorname{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

## 11.5. Integrali di funzioni trigonometriche

Il teorema dei residui è anche utile nel calcolo del valore di integrali reali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

con  $R$  una funzione razionale.

Ci limitiamo a presentare un esempio.

**Esempio 11.4.** Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos(\theta)}, \quad |a| < 1, a \in \mathbb{R}$$

Consideriamo  $C_1(0)$ ; attraverso le sostituzioni

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} d\theta; \quad d\theta = iz d\theta \Rightarrow \frac{1}{i} \frac{dz}{z} = d\theta; \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

otteniamo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos(\theta)} = \int_{C_1(0)} \frac{1}{iz \left(1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} dz = \frac{2}{i} \int_{C_1(0)} \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz$$

Vogliamo applicare il teorema dei residui all'ultimo integrale. Siano  $z_\pm = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$  le soluzioni dell'equazione di secondo grado  $az^2 + 2z + a$ . Notiamo che  $z_- \notin B_1(0)$ , quindi solo  $z_+$  contribuisce al teorema dei residui. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2}{i} \int_{C_1(0)} \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz &= \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_+ \right] = \\ &= 4\pi \left( \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+) \frac{1}{a(z - z_+)(z - z_-)} \right) = 4\pi \frac{1}{a(z - z_-)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}. \end{aligned}$$

<sup>7</sup>e cioè del primo ordine

## 12. Contare zeri e poli. Teorema di Rouché.

### 12.1. Contare zeri e poli di una funzione meromorfa

Sia  $z_0 \in E$  l'unico zero di una funzione  $f \in \mathcal{O}(E)$  e sia  $m$  la sua molteplicità. Allora abbiamo visto che  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  con  $g(z) \neq 0$  in  $E$  e  $g(z) \in \mathcal{O}(E)$ . Ne avevamo dedotto che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{\text{ord}(z_0)}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Ora, sia più in generale  $f$  meromorfa in  $E$ ,  $z_0$  il suo unico zero, di ordine  $m$ , e  $w_0 \in E$  il suo unico polo, di ordine  $\ell$ ; allora possiamo scrivere

$$f(z) = (z - z_0)^m (z - w_0)^{-\ell} \psi(z)$$

con  $\psi \in \mathcal{O}(E)$ ,  $\psi(z) \neq 0$  in  $E$ . Ne segue, con facile calcolo, che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} - \frac{\ell}{z - w_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \frac{\text{ord}(z_0)}{z - z_0} - \frac{\text{ord}(w_0)}{z - w_0} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

Otteniamo subito il seguente risultato:

**Proposizione 12.1.** Sia  $D$  regione regolare (a tratti),  $D \subseteq E$ ,  $f$  meromorfa in  $E$ , con un unico zero  $z_0$  di ordine  $\text{ord}(z_0)$  ed un unico polo  $w_0$  di ordine  $\text{ord}(w_0)$ , entrambi contenuti in  $D$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ord}(z_0) - \text{ord}(w_0).$$

Più in generale, abbiamo i seguenti due risultati:

**Teorema 12.2.** Sia  $D$  regione regolare (a tratti),  $D \subseteq E$ ,  $f$  meromorfa in  $E$ , senza zeri e senza poli in  $\partial D$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}_f(D) - \mathcal{P}_f(D)$$

Con  $\mathcal{Z}_f(D)$  il numero di zeri in  $D$  contati con molteplicità e  $\mathcal{P}_f(D)$  il numero di poli in  $D$  contati con molteplicità.

**Teorema 12.3.** Sia  $E$  dominio,  $\Gamma \approx_E 0$ ,  $f$  meromorfa in  $E$  con zeri  $z_1, \dots, z_n$  e poli  $p_1, \dots, p_\ell$  con ordini, rispettivamente,  $m_1^0, \dots, m_n^0$  e  $m_1^\infty, \dots, m_\ell^\infty$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\Gamma}(z_j) m_j^0 - \sum_{i=1}^{\ell} \text{Ind}_{\Gamma}(p_i) m_i^\infty$$

### 12.2. Teorema di Rouché

Il seguente risultato, diretta conseguenza del Teorema 12.2, permette spesso di determinare il numero di zeri e poli di una funzione meromorfa in un disco o, più in generale, in una regione regolare  $D$ :

**Teorema 12.4.** [Rouché] Siano  $f, g$  funzioni meromorfe in  $E$ ,  $\overline{B_R(a)} \subseteq E$  senza zeri e senza poli su  $C_R(a)$ . Consideriamo il numero di zeri e poli, con molteplicità, di queste funzioni in  $B_R(a)$ , denotati brevemente  $\mathcal{Z}_f, \mathcal{P}_f$ ;  $\mathcal{Z}_g, \mathcal{P}_g$ .

Se

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in C_R(a)$$

allora

$$\mathcal{Z}_f - \mathcal{P}_f = \mathcal{Z}_g - \mathcal{P}_g \quad \text{in } B_R(a)$$

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi  $\Rightarrow \left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1$  su  $C_R(a)$ . Fissato  $z \in C_R(a)$ , definiamo  $\lambda(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$ . Allora  $\lambda(z) \notin (0, +\infty)$ , infatti se  $\lambda(z) \in (0, +\infty) \Rightarrow \lambda(z) + 1 < \lambda(z) + 1$ , il che è assurdo.

Sia  $\log_\Omega$  un ramo del logaritmo con il taglio  $[0, +\infty)$ . In  $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$   $\log_\Omega \left( \frac{f}{g} \right)$  è ben definita in un intorno dell'immagine di  $\gamma$  ed è ivi una primitiva di  $\left( \frac{f}{g} \right)'$ . Per il teorema fondamentale del calcolo abbiamo allora

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{\left( \frac{f}{g} \right)'}{\left( \frac{f}{g} \right)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f'}{f} dz - \int_{C_r(a)} \frac{g'}{g} dz = (\mathcal{Z}_f - \mathcal{P}_f) - (\mathcal{Z}_g - \mathcal{P}_g)$$

□

**Osservazione 12.5.** Come già enunciato, il teorema di Rouché vale anche, e con la stessa dimostrazione, se al posto di  $B_R(a)$  prendiamo una qualsiasi regione regolare  $D$  con chiusura contenuta in  $E$  e al posto di  $C_R(a)$  prendiamo  $\partial D$ . C'è anche una versione ancora più generale, dove consideriamo  $\gamma$  omologa a zero in  $E$ , ma ovviamente in tal caso dovremo correggere  $\mathcal{Z}_f$  e  $\mathcal{P}_f$  con gli indici di avvolgimento (come nel Teorema 12.3).

Esistono altre versioni del Teorema di Rouché.

In alcuni libri trovate la seguente versione:

**Teorema 12.6.** Siano  $f, g$  olomorfe in  $E$ , con  $B_R(a) \subset E$ . Supponiamo che  $f$  non ammetta zeri in  $C_R(a)$  e che

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)| \quad \text{in } C_R(a) \quad (12.1)$$

Allora  $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g$  in  $B_R(a)$ .

Questa versione è chiaramente più debole di quella da noi dimostrata, innanzitutto perché  $f$  e  $g$  sono olomorfe e poi perché se  $|f(z) + g(z)| < |g(z)|$  in  $C_R(a)$  allora sicuramente  $g(z)$  non ammette zeri in  $C_R(a)$  e  $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$  in  $C_R(a)$  (quindi, in conclusione, sono soddisfatte le nostre ipotesi).

Anche questa versione ammette una generalizzazione ad una regione regolare  $D$  ed al suo bordo  $\partial D$ .

In altri libri si trova anche il seguente risultato, che è probabilmente il più semplice da applicare:

**Teorema 12.7.** Siano  $\phi$  e  $\psi$  olomorfe in  $E$ , con  $B_R(a) \subset E$ . Supponiamo

$$|\phi(z)| < |\psi(z)| \quad \text{in } C_R(a). \quad (12.2)$$

Allora  $\mathcal{Z}_{\phi+\psi} = \mathcal{Z}_\psi$  in  $B_R(a)$ .

Questa versione si ottiene facilmente dal Teorema 12.6. Poniamo  $f := \phi + \psi$  e  $g := -\psi$ . Allora dall'ipotesi (12.2) segue che  $f$  non ammette zeri in  $C_R(a)$  e che  $|f(z) + g(z)| < |g(z)|$ , da cui la tesi applicando il Teorema 12.6. Anche questa versione, ovviamente, ammette una generalizzazione ad una regione regolare  $D$  ed al suo bordo  $\partial D$ .

### 12.3. Applicazioni del Teorema di Rouché

Il teorema di Rouché è estremamente utile per stimare il numero di zeri di una funzione olomorfa. Vediamo un esempio.

**Esempio 12.8.** Dimostrare che gli zeri di  $p(z) = z^4 + 6z + 3$  si trovano in  $B_2(0)$ .

$$\begin{aligned} \psi &:= z^4 \\ \phi &:= 6z + 3 \\ |\psi(z)| &= 16 \quad |\phi(z)| = 15 \quad \text{su } C_2(0) \\ \Rightarrow &|\phi(z)| < |\psi(z)| \quad \text{su } C_2(0) \\ \Rightarrow &\psi(z) + \phi(z) = p(z) \text{ ha 4 zeri in } B_2(0). \end{aligned}$$

Ci sono anche due belle applicazioni teoriche del Teorema di Rouché. La prima è una nuova dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

**Teorema 12.9** (Teorema fondamentale dell'algebra).  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso.

*Dimostrazione.* Sia  $p(z)$  un polinomio a coefficienti complessi di grado  $n$ . Senza perdita di generalità lo possiamo supporre monico:  $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . Si ha allora che

$$\exists R \gg 0 : \left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1 \quad \forall z \in C_R(0)$$

e quindi  $|p(z) - z^n| < |z|^n \quad \forall z \in C_R(0)$ .

Ne segue che (12.1) è soddisfatta. Dal teorema di Rouché segue che  $p$  deve avere  $n$  zeri in  $B_R(0)$ , perché  $z^n$  ha  $n$  zeri in  $B_R(0)$  (lavoriamo tenendo conto delle molteplicità).  $\square$

Una seconda applicazione del Teorema di Rouché è una nuova dimostrazione del teorema dell'applicazione aperta. Abbiamo già visto questo teorema come applicazione diretta del teorema di struttura, vedere la sezione 9 ed in particolare i Teoremi 9.3 e 9.5. Ora ne diamo una nuova trattazione utilizzando Rouché.

**Teorema 12.10** (Teorema dell'applicazione aperta). Sia  $E$  un dominio ed  $f \in \mathcal{O}(E)$  non-costante. Allora  $f$  è un'applicazione aperta.

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un aperto in  $E$  e sia  $w_0$  in  $f(A)$ ,  $w_0 = f(z_0)$ , con  $z_0 \in A$ . Dobbiamo dimostrare che  $w_0$  è un punto interno in  $f(A)$  e quindi che preso  $w$  in un opportuno intorno sferico di  $w_0$ , si ha che  $w$  appartiene all'immagine di  $f$  ristretta ad  $A$ .

Sia  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(z_0) \subset A$  e  $f(z) - w_0 \neq 0 \quad \forall z \in \partial B_\delta(z_0) \equiv C_\delta(z_0)$  ( $z_0$  è uno zero isolato). Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall z \in C_\delta(z_0)$ . Quindi  $|f(z) - w_0| \geq \varepsilon \quad \forall z$  tale che  $|z - z_0| = \delta$ . Fissiamo ora  $w$  tale che  $|w - w_0| < \varepsilon$ . Sia  $g(z) = f(z) - w$ . Basta dimostrare che  $g(z)$  ha uno zero in  $B_\delta(z_0)$ .

Possiamo scrivere

$$g(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$$

Poniamo  $\psi(z) := f(z) - w_0$  e  $\phi(z) := w_0 - w$  (quindi  $\phi(z)$  è una funzione costante). Per costruzione si ha che

$$|\psi(z)| > |\phi(z)|, \quad \forall z \in C_\delta(z_0).$$

Quindi, per il Teorema di Rouché,  $\psi(z)$  e  $\psi(z) + \phi(z)$  hanno lo stesso numero di zeri in  $B_\delta(z_0)$ . Ma  $\psi$  ha uno zero in  $B_\delta(z_0)$  e quindi  $\psi(z) + \phi(z)$ , e cioè  $f(z) - w =: g(z)$  ha almeno uno zero in  $B_\delta(z_0)$ .  $\square$

Possiamo anche dimostrare il Teorema dell'applicazione aperta tramite il seguente ragionamento alternativo.

*Dimostrazione.* Consideriamo come nella dimostrazione appena data  $f(z) - w_0$ , con  $w_0 = f(z_0) \in f(A)$ ,  $z_0 \in A$ . Quindi la funzione  $f(z) - w_0$  ha uno zero in  $z_0$ . Sia  $m$  l'ordine di tale zero. Esiste  $d > 0$  tale che  $f(z) - w_0 \neq 0$  per  $0 < |z - z_0| \leq d$ , perché  $z_0$  è isolato. Sia  $\eta > 0$  tale che  $|f(z) - w_0| \geq \eta$  per  $|z - z_0| = d$ . Ne segue che

$$\mathcal{Z}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_d(z_0)} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz, \quad |w - w_0| < \eta$$

è ben definito;  $\mathcal{Z}(w)$  è il numero di zeri della funzione  $f(z) - w$  in  $B_d(z_0)$ , con  $w$  verificante  $|w - w_0| < \eta$ . Ovviamente  $\mathcal{Z}(w_0) = m$ . D'altra parte  $\mathcal{Z}(w)$  dipende in maniera continua (di fatto, olomorfa) da  $w$  tale che  $|w - w_0| < \eta$  e quindi, avendo valori discreti, è costante in  $w$ . Quindi

$$\mathcal{Z}(w) = \mathcal{Z}(w_0) = m.$$

Sia  $w$  tale che  $|w - w_0| < \eta$ ; allora  $f(z) - w$  ha  $m$  zeri  $z_1(w), \dots, z_m(w)$  in  $B_\delta(z_0)$ , contati con molteplicità; in particolare,  $w$  è nell'immagine di  $f$  ristretta ad  $A$ .  $\square$

Direttamente dall'argomento appena dato otteniamo una nuova dimostrazione del seguente risultato <sup>8</sup> :

<sup>8</sup>già visto come Corollario 9.6 e dimostrato a partire dal Teorema di struttura

**Proposizione 12.11.** Sia  $E$  un dominio,  $f \in \mathcal{O}(E)$  ed  $f$  iniettiva. Allora  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo esiste  $z_0$  tale che  $f'(z_0) = 0$ . Questo vuol dire che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m \geq 2$  per la funzione  $f(z) - w_0$ , con  $f(z_0) = w_0$ . Osserviamo che  $z_0$  è uno zero di una funzione olomorfa, la derivata di  $f$ , e come tale è isolato. Quindi esiste  $a > 0$  tale che  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B'_a(z_0)$ . Nella seconda dimostrazione data qui sopra del teorema dell'applicazione aperta possiamo allora scegliere  $d > 0$  in modo tale che, in aggiunta,  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B'_d(z_0)$ . Questo vuol dire che gli  $m$  zeri,  $z_1(w), \dots, z_m(w)$  in  $B_\delta(z_0)$ , devono essere zeri semplici. Ma allora  $f$  non è iniettiva (perché  $m \geq 2$ ) e questo è contro l'ipotesi.  $\square$

## 13. Successioni di funzioni olomorfe

### 13.1. Teorema di Weierstrass

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass presentiamo due lemmi preliminari (il primo dei quali caso particolare di risultati più generali a voi noti da Analisi II).

**Lemma 13.1.** Sia  $f_n$  una successione di funzioni continue in  $E$ . Supponiamo che  $f_n$  converga ad  $f$  uniformemente in  $E$ . Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti di lunghezza finita contenuta in  $E$ . Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \quad (13.1)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f_n(z) - f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| dz \\ &\leq L(\gamma) \sup_{\gamma} |f_n - f| \leq L(\gamma) \sup_E |f_n - f| \leq L(\gamma) \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Osservazione 13.2.** La stessa dimostrazione stabilisce che se  $f_n$  converge ad  $f$  uniformemente sui compatti e  $\gamma$  è una curva con immagine contenuta in un compatto, allora vale (13.1).

**Lemma 13.3.** Sia  $E$  un aperto,  $K \subset E$ ,  $K$  compatto,  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Allora  $\exists$  una regione regolare (a tratti)  $D$  t.c.  $\partial D \subset E \setminus K$ . Conseguentemente

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{e} \quad f^{(k)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in K$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\delta = d(K, E^c)$ . Consideriamo una partizione dell'insieme  $E$  tramite rette, orizzontali e verticali, a distanza  $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ . Otteniamo quindi  $Q_1, \dots, Q_m$  quadrati che hanno intersezione

non vuota con il compatto  $K$ . Consideriamo  $D = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ ; allora  $\partial D$  gode della proprietà richiesta e

le formule integrali seguono dalle formule di Cauchy su regioni regolari a tratti.

In alternativa, consideriamo il ricoprimento di  $K$  dato da  $B_d(z)$ , con  $d = \delta/2$  e  $z \in K$ . Dalla compattezza segue che esiste un sottoricoprimento finito  $\{B_d(z_j), j = 1, \dots, n\}$ . È chiaro che due dischi si intersecano in un aperto oppure non si intersecano. Poniamo  $D = \bigcup_{j=1}^n \overline{B_d(z_j)}$ ; allora  $D$  è una regione regolare a tratti con le proprietà richieste. □

Possiamo ora enunciare e dimostrare il seguente

**Teorema 13.4** (Weierstrass). Siano  $E$  un dominio,  $f_n$  una successione di funzioni,  $f_n \in \mathcal{O}(E)$ , t.c.  $f_n \rightrightarrows f$  (i.e., uniformemente sui compatti). Allora

1.  $f \in \mathcal{O}(E)$  ;
2.  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$  ;
3.  $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$

*Dimostrazione.* Dimostriamo (i). Consideriamo  $z_0 \in E$ ; sia  $\delta > 0$  tale che  $B_{\delta}(z_0) \subset E$ ; sia  $\gamma$  regolare a tratti,  $\gamma \subset B_{\delta}(z_0)$ . Sappiamo che

$$\int_{\gamma} f_n = 0$$

per il teorema di Cauchy. Ma allora per Lemma 13.1 abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

e quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Inoltre  $f(x)|_{\overline{B_{\delta}(z_0)}}$  è  $C^0$  per i noti teoremi sulla convergenza di successioni di funzioni. Utilizzando il Teorema di Morera vediamo che  $f \in \mathcal{O}(E)$ .

(ii) Sia  $z_0 \in E$ ;  $B_{\delta}(z_0)$  come in (i). Allora esiste  $D$  regione regolare t.c.  $z_0 \in D$  e  $\overline{B_{\delta}(z_0)} \subseteq D$ <sup>9</sup>. Definiamo  $\gamma := \partial D^+$ . Ovviamente  $|z - z_0| > \delta, \forall z \in \gamma$ . Dalla formula di Cauchy per le derivate possiamo scrivere

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad ; \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| &= \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| \\ &\leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \varepsilon \end{aligned}$$

(iii) Sia  $K$  un compatto contenuto in  $E$ . Ragionando come sopra, per il Lemma 13.3

$$\exists \eta > 0; \exists \gamma \subset E : |z - z_0| \geq \eta \quad \forall z \in \gamma, \quad \forall z_0 \in K.$$

Dunque  $\forall z_0 \in K$ , con le stesse stime del punto 2,

$$|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\eta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|$$

E quindi

$$\sup_{z_0 \in K} |f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\eta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)|$$

da cui segue subito la tesi. □

## 13.2. Teorema di Runge

**Teorema 13.5** (Runge). Sia  $E$  aperto,  $K$  compatto,  $K \subset E$   $f \in \mathcal{O}(E)$ . Allora

1.  $f|_K$  è approssimabile con funzioni razionali con poli in  $K^c$ ;
2. Se  $K^c$  è connesso  $\Rightarrow f|_K$  è approssimabile (uniformemente) con polinomi.

*Dimostrazione.* Dimosteremo i due punti del teorema di Runge tramite due lemmi, Intanto evidenziamo che l'ipotesi aggiuntiva del punto 2 del teorema ci fa capire che la geometria del compatto su cui avviene l'approssimazione è cruciale.

Come già osservato il Lemma 13.3 ci dice che per  $E$  aperto,  $K \subset E$ ,  $K$  compatto e  $f \in \mathcal{O}(E)$  esiste  $\gamma$  regolare (a tratti) tale che  $\gamma \cap K = \emptyset$  e

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in K.$$

La prima parte del Teorema di Runge segue allora dal seguente Lemma:

<sup>9</sup>Per questo secondo punto del teorema possiamo tranquillamente scegliere  $D = \overline{B_{\delta}(z_0)}$

**Lemma 13.6.** Sia  $\gamma$  regolare (a tratti),  $K$  compatto,  $\gamma \cap K = \emptyset$ . Allora  $\exists$  una funzione razionale

$$R \text{ con poli in } \gamma \text{ tale che } \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \varepsilon$$

*Dimostrazione.* Consideriamo una tale  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ . Allora  $\exists r : 0 < r < d(\gamma, K)$ . Se  $0 \leq s, t \leq 1$  e  $z \in K$  allora

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| &= \left| \frac{f(\gamma(t))(\gamma(s) - z) - f(\gamma(s))(\gamma(t) - z)}{(\gamma(t) - z)(\gamma(s) - z)} \right| \\ &\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z(f(\gamma(t)) - f(\gamma(s)))| \\ &\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))||\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)||f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\ &\quad + \frac{z}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \quad (*) \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo aggiunto e sottratto  $f(\gamma(t))\gamma(t)$ , raccolto e sfruttato la disuguaglianza triangolare. È chiaro che per uniforme continuità

$$\begin{aligned} \exists c > 0 : \\ |z| &< c, \quad z \in K \\ |\gamma(t)| &< c, \quad t \in [0, 1] \\ |f(\gamma(t))| &< c, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Quindi proseguendo la disuguaglianza

$$(*) \leq \frac{c}{r^2} |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{2c}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|$$

Riassumendo

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| \leq \frac{c}{r^2} |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{2c}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \quad (13.2)$$

Dall' uniforme continuità di  $\gamma$  e  $f \circ \gamma$  vediamo che  $\forall \varepsilon > 0$  esiste una partizione di  $[0, 1]$ ,  $\{t_j\}$ , con  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$  tale che

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t)| < \varepsilon, \quad |f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \forall j.$$

Da cui

$$\forall \eta > 0, \exists \{t_j\} \text{ partizione di } [0, 1] \text{ tale che } \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| \leq \frac{\eta}{L(\gamma)} \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j] \quad \forall j.$$

Definiamo

$$R(z) = \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_{j-1})) \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1}) - z}. \quad (13.3)$$

I poli di  $R$  sono  $\{\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_{n-1})\}$  e sono esterni a  $K$ . Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo,  $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ , abbiamo allora

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}) - z} \right] \gamma'(t) dt \right| \leq \frac{\eta}{L(\gamma)} L(\gamma) = \eta.$$

Dato che  $\eta$  era arbitrario, il Lemma (e quindi la prima parte del Teorema di Runge) è dimostrato.  $\square$

**Osservazione 13.7.** Nella dimostrazione del lemma si vede che le singolarità delle funzioni razionali approssimanti sono, per costruzione, su curve esterne al compatto  $K$ . I polinomi sono

funzioni razionali sulla sfera di Riemann con un unico polo a  $\{\infty\}$ . Quindi, quando le singolarità si possono scegliere arbitrariamente distanti dal compatto  $K$ , sembrerebbe possibile operare un procedimento di spostamento all'infinito delle singolarità che permette di passare, intuitivamente, dall'approssimazione mediante funzioni razionali a quella tramite funzioni polinomiali. Questo è esattamente quanto afferma il punto 2 del teorema di Runge. Il Lemma che segue ne dà una trattazione rigorosa.

Prendiamo in considerazione la funzione razionale approssimante  $R(z)$  che compare in (13.3). Il Lemma seguente ci permette di chiudere la dimostrazione del teorema di Runge.

**Lemma 13.8.** Sia  $K$  un compatto come nell'enunciato del teorema di Runge. Se  $K^c$  è connesso,  $z_0 \in K^c$ , allora  $\frac{1}{z-z_0}$  è approssimabile uniformemente in  $K$  tramite polinomi.

*Dimostrazione.* Siano  $R \gg 0$ ,  $C_R(0)$  e  $z_1 \in C_R^c(0)$ ,  $\forall z \in K$  vale

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = -\frac{1}{z_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

Siccome  $|z_1| > R \gg 0$  questa serie converge uniformemente in  $K$  (in altre parole  $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ ), quindi le somme parziali, che sono polinomi, approssimano  $\frac{1}{z-z_1}$ . Ovviamente anche  $\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^k$ ,  $k \geq 1$  è approssimato con polinomi, quindi se  $Q$  è un polinomio  $Q(S_n(z))$  converge uniformemente a  $Q\left(\frac{1}{z-z_1}\right)$ . Vogliamo connettere  $\frac{1}{z-z_0}$  con  $\frac{1}{z-z_1}$ , che è approssimabile tramite polinomi.

Sia  $\gamma$  una curva t.c.  $\gamma(0) = z_0$  e  $\gamma(1) = z_1$ ; sia  $\rho = \frac{1}{2}d(\gamma, K) > 0$ , siano  $\{w_0, \dots, w_l\}$  punti su  $\gamma$ :  $w_0 = z_0$ ,  $w_l = z_1$  e  $|w_j - w_{j-1}| < \rho$ .

Se  $w$  è uno di questi punti e  $w'$  è un qualsiasi punto t.c.  $|w - w'| < \rho \Rightarrow \frac{1}{z-w}$  è approssimabile tramite polinomi in  $\frac{1}{z-w'}$ . Vediamo perchè:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1-\frac{w-w'}{z-w'}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}$$

che converge uniformemente poichè  $\forall z \in K$

$$|z-w'| = |(z-w) - (w'-w)| \geq ||z-w| - |w'-w|| > |2\rho - \rho| = \rho$$

e quindi  $\left|\frac{w-w'}{z-w'}\right| < 1$ . Utilizzando questo argomento per ogni  $j = 0, \dots, l-1$  si possono determinare  $l$  polinomi nelle variabili  $\frac{1}{z-w_{j+1}}$  che approssimano le funzioni  $\frac{1}{z-w_j}$  per ogni  $j = 0, \dots, l-1$ . Ricapitolando quanto appena visto,  $\forall \varepsilon > 0$ , esistono  $l$  polinomi  $\{P^j\}$  tali che :

1.  $\left|P^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K$
2.  $\left|P^j\left(\frac{1}{z-w_{j+1}}\right) - P^{j-1}\left(\frac{1}{z-w_j}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K \quad \forall j = 1, \dots, l-1$
3.  $\left|P^l(z) - P^{l-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K$

Ma allora  $\forall z \in K$ , uniformemente, abbiamo la seguente stima che completa la dimostrazione:

$$\begin{aligned} \left|P^l(z) - \frac{1}{z-z_0}\right| &\leq \left|P^l(z) - P^{l-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right| \\ &+ \left|P^{l-1}\left(\frac{1}{z-w_l}\right) - P^{l-2}\left(\frac{1}{z-w_{l-1}}\right)\right| \\ &\dots \\ &+ \left|P^1\left(\frac{1}{z-w_2}\right) - P^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right)\right| \\ &+ \left|P^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

## 14. Mappe conformi e bi-olomorfismi

### 14.1. Mappe conformi

**Definizione 14.1** (Mappe conformi). Siano  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di classe  $C^1$ .  $f$  è conforme in  $z_0 \in E$  se  $f$  conserva gli angoli.

Diamo un senso preciso a questa frase.

Siano

$$\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow E \text{ e } \gamma_2: [-1, 1] \rightarrow E$$

due curve differenziabili in 0 e con

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0 \quad \text{e} \quad \gamma_1'(0) \neq 0 \quad \gamma_2'(0) \neq 0.$$

Sia  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  è l'angolo orientato fra  $\gamma_1'(0)$  e  $\gamma_2'(0)$ ; allora  $f$  è conforme in  $z_0$  se  $\alpha$  è anche l'angolo orientato fra  $(f \circ \gamma_1)'(0)$  e  $(f \circ \gamma_2)'(0)$ .

$f$  è conforme in  $E$  se è conforme per ogni  $z \in E$ .

**Proposizione 14.2.** Se  $f \in \mathcal{O}(E)$  e  $f'(z_0) \neq 0$ , allora  $f$  è conforme in  $z_0$ .

*Dimostrazione.* Se  $\gamma$  è una curva differenziabile in 0 con  $\gamma(0) = z_0$  si ha che

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$$

Ma l'operazione di moltiplicazione per  $f'(z_0) \neq 0$  è la rotazione di  $\theta$  seguita dalla dilatazione di  $r$  se  $f'(z_0) = re^{i\theta}$ . Allora ogni vettore velocità di una curva in  $z_0$  viene ruotato di  $\theta$ , in particolare  $f$  preserva gli angoli in  $z_0$ .  $\square$

Vale una sorta di viceversa:

**Teorema 14.3.** Sia  $f \in C^1(E)$  conforme e con  $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \neq (0, 0)$ . Allora  $f$  è olomorfa e  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $z_0 \in E$ . Utilizzando Taylor possiamo scrivere

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(z - z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{z - z_0}) + O(|z - z_0|^2)$$

infatti, scrivendo  $z = x + iy$  e  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , si ha

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(z - z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{z - z_0}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0 + iy_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0 + iy_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0)(y - y_0) = \\ &= u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + i(v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \end{aligned}$$

cioè la parte lineare dello sviluppo di Taylor associato a  $f$ . Da questa formula otteniamo, prendendo  $\gamma(t)$  una curva differenziabile in 0 e con  $\gamma(0) = z_0$ ,

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(\gamma(t) - \gamma(0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{\gamma(t) - \gamma(0)}) + O(|\gamma(t) - \gamma(0)|^2)$$

Quindi facendo il limite del rapporto incrementale

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma(t))\right|_{t=0} = (f \circ \gamma)'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)\gamma'(0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)\overline{\gamma'(0)}$$

Sia  $\gamma(t)$  la retta per  $z_0$  di angolo  $\theta$ , si ha

$$(f \circ \gamma)'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)e^{i\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)e^{-i\theta}$$

Per ipotesi  $f$  è conforme, quindi  $\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)}$  deve essere indipendente da  $\theta$ .

Ma

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)} = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) (z_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) (z_0) e^{-2i\theta}$$

Ne segue che  $\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) (z_0) = 0$ .

Allora  $f$  è olomorfa e  $f'(z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) (z_0) \neq 0$  per ipotesi □

**Osservazione 14.4.** Se  $f: E \rightarrow \Omega$  è olomorfa e bigettiva, allora  $f$  è conforme.

Infatti se  $f$  è olomorfa e bigettiva allora  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$  (si veda il Corollario 9.6 o, in alternativa, la Proposizione 12.11) e basterà allora applicare la Proposizione 14.2.

## 14.2. Bi-olomorfismi

Siamo interessati ai bi-olomorfismi cioè applicazioni bigettive olomorfe con inversa olomorfa. Come già richiamato alla fine della sottosezione precedente una funzione  $f: E \rightarrow \Omega$  bigettiva ed olomorfa ha derivata diversa da zero in ogni punto di  $E$  e quindi, si veda la Proposizione 9.1, essa ha automaticamente inversa  $f^{-1}$  olomorfa. Possiamo quindi definire un **bi-olomorfismo**  $f: E \rightarrow \Omega$  come un' **applicazione olomorfa e bigettiva**.

## 14.3. Trasformata di Cayley

Siano

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &:= B_1(0) \\ \mathbb{H} &:= \{z \mid \Im(z) > 0\} \end{aligned}$$

Consideriamo l'applicazione, detta *trasformata di Cayley*,

$$\begin{aligned} F: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{i-z}{i+z} \end{aligned} \tag{14.1}$$

Questa è ben definita ed è un bi-olomorfismo con inversa

$$\begin{aligned} G: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} \\ w &\mapsto i \frac{1-w}{1+w} \end{aligned} \tag{14.2}$$

*Dimostrazione.*

$$|i-z| = d_{\mathbb{C}}(z, i) < d_{\mathbb{C}}(z, -i) = |i+z| \quad \text{se } z \in \mathbb{H}$$

quindi  $F(z) \in \mathbb{D}$ , cioè  $F$  è ben definita.

Inoltre è quoziente di funzioni olomorfe con  $i-z \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{H}$ .

Basta mostrare che

$$F \circ G = Id_{\mathbb{D}} \quad \text{e} \quad G \circ F = Id_{\mathbb{H}}$$

Ma per ogni  $w \in \mathbb{D}$

$$F(G(w)) = \frac{i - i \frac{1-w}{1+w}}{i + i \frac{1-w}{1+w}} = \frac{i(1+w) - i(1-w)}{i(1+w) + i(1-w)} = w$$

e per ogni  $z \in \mathbb{H}$

$$G(F(z)) = i \frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = i \frac{i+z - (i-z)}{i+z + i-z} = z$$

□

## 14.4. Trasformazioni lineari fratte

Un esempio importante di bi-olomorfismi sono le *trasformate di Möbius*. Consideriamo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det(M) = 1 \right\}$$

La trasformata di Möbius associata a  $M \in SL(2, \mathbb{R})$  è

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (14.3)$$

Se, più in generale,  $M \in GL(2, \mathbb{C})$  allora possiamo ancora definire un'applicazione  $f_M$  detta *trasformazione lineare fratta*<sup>10</sup>. Osserviamo che  $M$  e  $\alpha M$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  definiscono la stessa trasformazione lineare fratta.

Sulle trasformazioni lineari fratte si hanno i seguenti risultati.

**Proposizione 14.5.** Siano  $M, M' \in GL(2, \mathbb{C})$ , allora

$$f_M \circ f_{M'} = f_{MM'} \quad (14.4)$$

*Dimostrazione.*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad MM' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$f_M \circ f_{M'}(z) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'}$$

□

**Proposizione 14.6.**

$$M \in GL(2, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad f_M \text{ è un bi-olomorfismo da } \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad \text{a} \quad \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

*Dimostrazione.* Dalla proposizione precedente si ha che  $f_{M^{-1}}$  è l'inversa di  $f_M$  e

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

□

## 14.5. Automorfismi di $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$

Sia  $E$  un dominio, definiamo

$$Aut(E) = \{ f: E \rightarrow E \mid f \text{ bi-olomorfismo} \} \quad (14.5)$$

il gruppo degli automorfismi di  $E$  con prodotto uguale alla composizione. Ci chiediamo chi sono  $Aut(\mathbb{D})$  e  $Aut(\mathbb{H})$

**Esempio 14.7** (Automorfismi notevoli di  $\mathbb{D}$ ). **1.** La rotazione di angolo  $\theta$

$$r_\theta(z) = e^{i\theta} z \quad (14.6)$$

è un automorfismo di  $\mathbb{D}$  con inversa  $r_{-\theta}$ .

**2.** L'applicazione

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{D} \quad (14.7)$$

è un automorfismo di  $\mathbb{D}$ .

Infatti se  $z = e^{i\theta}$

$$|\psi_\alpha(z)| = \left| \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\theta}} \right| = 1$$

<sup>10</sup>o anche, nuovamente, trasformazione di Möbius, le definizioni variano a seconda dei libri...

Quindi, per il principio del massimo modulo,

$$|\psi_\alpha(z)| < 1 \quad \text{per } |z| < 1$$

Allora  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ed è olomorfa dato che  $|\alpha| < 1$ .

Ma un semplice conto dimostra che

$$\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = Id_{\mathbb{D}} \quad (14.8)$$

Quindi  $\psi_\alpha$  è un bi-olomorfismo e  $\psi_\alpha^{-1} = \psi_\alpha$

**Osservazione 14.8.**

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \quad \psi_\alpha(\alpha) = 0 \quad (14.9)$$

Prima di enunciare i teoremi di struttura per gli automorfismi di  $\mathbb{D}$  e  $\mathbb{H}$  proviamo un lemma molto utile. Preliminarmente diamo una differente versione del principio del massimo modulo:

*Sia  $E \subset \mathbb{C}$  un dominio, non necessariamente limitato, e sia  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Se  $|f(\cdot)|$  ha un massimo in  $E$  allora  $f$  è costante.*

La dimostrazione segue facilmente dal teorema dell'applicazione aperta (è un esercizio del nono compito a casa !)

**Lemma 14.9 (Schwarz).** Sia  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e con  $f(0) = 0$ . Allora

(i)  $|f(z)| \leq |z|$  per ogni  $z \in \mathbb{D}$

(ii) Se esiste  $z_0 \in \mathbb{D}$  tale che  $|f(z_0)| = |z_0|$  allora  $f$  è una rotazione

(iii)  $|f'(0)| \leq 1$  e se si ha uguaglianza  $f$  è una rotazione

*Dimostrazione.* (i) Dato che  $f$  è olomorfa, in un intorno di 0

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Ma  $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ .

Quindi

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{è olomorfa e } g(0) = a_1 = f'(0)$$

Sia  $z \in C_r(0)$  con  $r < 1$ ; poiché per ipotesi  $f(z) \in \mathbb{D}$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{z} \right| &\leq \frac{1}{r} \\ \xrightarrow[\text{mod}]{\text{max}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| &\leq \frac{1}{r} \quad \text{per } z \in \overline{B_r(0)} \end{aligned}$$

Questo è vero per ogni  $r < 1$ , quindi mandando  $r$  a 1

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

(ii) per ipotesi  $z_0$  è un massimo di  $\frac{f(z)}{z}$  in  $\mathbb{D}$  e quindi  $\frac{f(z)}{z} = c$  con  $c$  una costante. Se  $c = \rho e^{i\theta}$   $f$  è la rotazione di angolo  $\theta$  composta con la dilatazione per  $\rho$ .

Ma

$$|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow f \quad \text{è una rotazione}$$

(iii) sappiamo che  $|g(z)| \leq 1$  per  $z \in \mathbb{D}$ ; inoltre

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

e se c'è uguaglianza

$$|g(0)| = 1 \Rightarrow g(z) = c \quad (\text{principio max mod.}) \Rightarrow f(z) = cz \quad \text{con } |c| = 1$$

e come sopra questo implica che  $f$  è una rotazione □

Ora possiamo caratterizzare gli automorfismi del disco e del semipiano.

**Teorema 14.10** (Automorfismi di  $\mathbb{D}$ ). Sia  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora esistono  $\theta \in (-\pi, \pi]$  e  $\alpha \in \mathbb{D}$  tali che

$$f = r_\theta \circ \psi_\alpha$$

*Dimostrazione.*  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , in particolare  $f$  è surgettiva, allora esiste  $\alpha \in \mathbb{D}$  tale che  $f(\alpha) = 0$ . Consideriamo

$$g = f \circ \psi_\alpha$$

dall'osservazione 14.8 abbiamo

$$g(0) = f(\psi_\alpha(0)) = f(\alpha) = 0$$

Da Schwartz

$$|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Ma anche  $g^{-1}$  manda zero in zero, allora

$$|g^{-1}(w)| \leq |w| \quad \forall w \in \mathbb{D}$$

Quindi se  $w = g(z)$  mettendo insieme si ha

$$|z| = |g(z)|$$

e sempre per Schwartz  $g$  è una rotazione.

Per la 14.8

$$f \circ \psi_\alpha = r_\theta \quad \Rightarrow \quad f = r_\theta \circ \psi_\alpha$$

□

**Corollario 14.11** (Schwarz). Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $f(0) = 0$ , allora  $f$  è una rotazione.

*Dimostrazione.*

$$\psi_\alpha(0) = 0 \quad \iff \quad \alpha = 0$$

e in questo caso  $\psi_0 = -Id_{\mathbb{D}}$ .

Quindi se  $f(0) = 0$

$$f = r_\theta \circ \psi_0 = r_\theta \circ (-Id_{\mathbb{D}}) = r_{\theta+\pi}$$

□

**Teorema 14.12** (Automorfismi di  $\mathbb{H}$ ). 1. Sia  $M \in SL(2, \mathbb{R})$  e  $f_M$  la trasformata di Möbius associata a  $M$ . Allora  $f_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$

2. Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  allora

$$\exists M \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad f = f_M$$

Prima di iniziare la dimostrazione traiamo alcune conseguenze. Per la proposizione 14.5 ed il punto 2 appena enunciato

$$\begin{aligned} \Psi: SL(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ M &\mapsto f_M \end{aligned} \tag{14.10}$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo.

Inoltre è facile vedere che  $\ker \Psi = \{\pm I\}$  e quindi, in definitiva

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I\}} =: PSL(2, \mathbb{R}) \tag{14.11}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto 1. Supponiamo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sappiamo già che  $f_M$  è un bi-olomorfismo da  $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$  a  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ . Dato che i poli non sono contenuti in  $\mathbb{H}$  basta provare che

$$z \in \mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad f_M(z) \in \mathbb{H}$$

Infatti

$$f_M(z) = \frac{az + b \overline{cz + d}}{cz + d \overline{cz + d}} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}$$

Quindi se  $z = x + iy$  con  $y > 0$  allora

$$\Im(f_M(z)) = \frac{ady - bcy}{|cz + d|^2} = \frac{\det(M)y}{|cz + d|^2} > 0$$

poiché  $\det(M) = 1$ .

Dimostriamo ora il punto 2. Iniziamo con due osservazioni generali.

**Osservazione 14.13.**  $SL(2, \mathbb{R})$  agisce transitivamente su  $\mathbb{H}$  tramite  $f_M$  cioè

$$\forall z, z_0 \in \mathbb{H} \quad \exists M \in SL(2, \mathbb{R}) \quad t.c. \quad f_M(z_0) = z$$

Infatti basta osservare che per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  la matrice

$$M_z = \begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & -xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

appartiene a  $SL(2, \mathbb{R})$  ed è tale che

$$f_{M_z}(z) = \frac{zy^{-\frac{1}{2}} - xy^{-\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{iy^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = i$$

quindi basta prendere

$$M = M_z^{-1}M_{z_0}$$

**Osservazione 14.14.** Consideriamo  $F$  la trasformata di Cayley

$$F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto \frac{i - z}{i + z}$$

con inversa

$$F^{-1}(w) = i \frac{1 - w}{1 + w} \quad F^{-1}(0) = i$$

Se

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

allora

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1} = r_{-2\theta} \quad \text{in } \mathbb{D}$$

Infatti se  $w \in \mathbb{D}$

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(w) = F \left( \frac{i \cos \theta (1 - w) - \sin \theta (1 + w)}{i \sin \theta (1 - w) + \cos \theta (1 + w)} \right) = F \left( \frac{i e^{i\theta} - w e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + w e^{-i\theta}} \right) = e^{-2i\theta} w$$

Armati di queste due osservazioni, possiamo ora dimostrare la tesi.

Sia  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ ; si ha  $f(\beta) = i$  per un certo  $\beta \in \mathbb{H}$ . Per transitività

$$\exists N \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad f_N(i) = \beta$$

Sia  $g = f \circ f_N$ ; allora  $g(i) = i$ . Consideriamo

$$F \circ g \circ F^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}.$$

Si ha

$$F \circ g \circ F^{-1}(0) = 0$$

quindi, per il corollario (Schwarz)

$$F \circ g \circ F^{-1} = r_{\tilde{\theta}} = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1} \\ \Rightarrow g = f_{M_\theta} \quad \Rightarrow f \circ f_N = f_{M_\theta} \quad \Rightarrow f = f_{M_\theta N^{-1}}$$

□

## 15. Teorema della mappa di Riemann

In questa sezione studieremo un classico teorema sui domini semplicemente connessi. Iniziamo con dei richiami e dei risultati preliminari.

### 15.1. Teorema di Ascoli-Arzelà e Montel

**Definizione 15.1.** Siano  $X \subseteq V$  aperto di uno spazio vettoriale normato di dimensione finita e  $(Y, d)$  spazio metrico.

$$C(X, Y) = \{\text{funzioni continue da } X \text{ a } Y\}; \quad \Phi \subseteq C(X, Y)$$

1.  $\Phi$  è *normale* se ogni successione in  $\Phi$  ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti (non si richiede che il limite appartenga a  $\Phi$ ).
2.  $\Phi$  è *uniformemente limitata sui compatti* se per ogni  $K \subseteq X$  compatto il sottoinsieme di  $Y$  definito da

$$\{f(z), z \in K, f \in \Phi\}$$

è un insieme limitato.

3.  $\Phi$  è *uniformemente equicontinua sui compatti* se per ogni  $K \subseteq X$  compatto

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \|z - w\| < \delta, \quad z, w \in K, \quad \Rightarrow \quad d(f(z), g(z)) < \varepsilon \quad \forall f \in \Phi$$

**Teorema 15.2** (Ascoli-Arzelà). Sia  $X \subseteq V$  aperto di uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare e  $Y = \mathbb{R}^n$  con distanza euclidea.

Se  $\Phi \subseteq C(X, Y)$  è uniformemente limitato sui compatti e uniformemente equicontinuo sui compatti, allora  $\Phi$  è normale

La dimostrazione si può trovare in [SS] o in [R].

**Teorema 15.3** (Montel). Siano  $E \subseteq \mathbb{C}$  e  $\Phi \subseteq \mathcal{O}(E)$ . Se  $\Phi$  è uniformemente limitata sui compatti, allora  $\Phi$  è normale

*Dimostrazione.* Per Ascoli-Arzelà basta dimostrare che  $\Phi$  è uniformemente equicontinua sui compatti.

Consideriamo  $K \subseteq E$  compatto,  $r > 0$  tale che  $B_{3r}(z) \subseteq E$  per ogni  $z \in K$ .

Siano  $z$  e  $w$  in  $K$  tali che  $|z - w| < r$ , fissiamo  $\gamma = C_{2r}(w)$ . Se  $\zeta \in \{\gamma\}$

$$|\zeta - w| = 2r$$

$$|\zeta - z| \geq r$$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\zeta - z| |\zeta - w|} \leq \frac{|z - w|}{2r^2}$$

Sia

$$K' = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq 2r\} \subseteq E$$

$K'$  è compatto, allora per ipotesi

$$\exists B \in \mathbb{R}^+ \quad \text{tale che} \quad |f(z)| \leq B \quad \forall z \in K' \quad \forall f \in \Phi$$

Allora per ogni  $z, w \in K$  con  $|z - w| < r$  si ha, per ogni  $f \in \Phi$

$$|f(z) - f(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}(w)} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi 2r B \frac{|z - w|}{2r^2} = \frac{B}{r} |z - w|$$

Quindi  $\Phi$  è equicontinua sui compatti. □

**Osservazione 15.4.** Montel è falso in ambito reale.

Per esempio

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

è una famiglia di funzioni uniformemente limitata, ma non normale.

**Proposizione 15.5.** Sia  $G$  un dominio e  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(G)$  con  $f_n$  iniettiva per ogni  $n$ . Se  $f_n$  converge uniformemente sui compatti a  $f$ , allora  $f$  è iniettiva o una costante

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $f$  non sia iniettiva

$$\Rightarrow \exists z_1 \neq z_2 \text{ tali che } f(z_1) = f(z_2)$$

per ogni  $n$  definiamo

$$g_n = f_n - f_n(z_1).$$

Per ipotesi di iniettività  $g_n$  ha un unico zero in  $z_1$  per ogni  $n$ , e le  $g_n$  convergono uniformemente sui compatti a

$$g = f - f(z_1)$$

Se  $g$  non è identicamente nulla, allora  $z_2$  è uno zero di  $g$  necessariamente isolato. Quindi esiste  $r > 0$  tale che  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B'_r(z_2)$ , quindi

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_n} &\longrightarrow \frac{1}{g} && \text{uniformemente sui compatti in } C_r(z_2) \\ g'_n &\longrightarrow g' && \text{uniformemente sui compatti in } C_r(z_2) \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta &\longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = 1 \end{aligned}$$

Ma  $g_n$  non ha zeri in  $B_r(z_2)$  e quindi il risultato dell'ultimo limite è assurdo. □

## 15.2. Teorema della mappa di Riemann

**Teorema 15.6** (Mappa di Riemann). Sia  $G \subset \mathbb{C}$  un dominio semplicemente connesso,  $G \neq \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \forall z_0 \in G \quad \exists! F: G \rightarrow \mathbb{D} & \text{ bi-olomorfismo} \\ \text{tale che } F(z_0) = 0 \quad F'(z_0) \in \mathbb{R}^+ & \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dividiamo la dimostrazione dell'esistenza in quattro passi.

**Passo 1** Proviamo che  $G$  è bi-olomorfo con un dominio in  $\mathbb{D}$  che contiene 0.

Per ipotesi

$$G \subsetneq \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus G \Rightarrow z - \alpha \text{ non si annulla mai in } G$$

E dato che  $G$  è semplicemente connesso sappiamo che esiste un ramo del logaritmo in  $G$  per  $(z - \alpha)$ , cioè

$$\exists \log_G(z - \alpha) \text{ olomorfa e tale che } e^{\log_G(z - \alpha)} = z - \alpha$$

Chiamiamo

$$L: G \rightarrow \mathbb{C}; \quad L(z) = \log_G(z - \alpha)$$

In particolare  $L$  è ovviamente iniettiva e vale

$$\text{fissato } w \in G \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } B_\varepsilon(L(w) + 2\pi i) \cap L(G) = \emptyset; \quad (15.1)$$

se così non fosse esisterebbe  $\{z_n\} \subseteq G$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(z_n) = L(w) + 2\pi i$$

Ma per la continuità di  $\exp$  si avrebbe

$$\lim_n \exp(L(z_n)) = \exp(L(w)) \Rightarrow \lim_n z_n = w \Rightarrow \lim_n L(z_n) = L(w)$$

che è una contraddizione.

In conclusione grazie a (15.1) possiamo definire l'applicazione

$$F: G \rightarrow \mathbb{C}; \quad F(z) = \frac{1}{L(z) - (L(w) + 2\pi i)}$$

iniettiva, poiché  $L$  è iniettiva. Quindi

$$F: G \rightarrow F(G) \quad \text{è un bi-olomorfismo}$$

e sempre per (15.1)

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z \in G.$$

$F$  è olomorfa e limitata, quindi, a meno di riscaldamenti e traslazioni, possiamo supporre

$$F(G) \subseteq \mathbb{D} \quad \text{e} \quad 0 \in F(G)$$

**Passo 2** Grazie al passo 1 possiamo assumere  $G \subseteq \mathbb{D}$  e  $0 \in G$ . Consideriamo la famiglia

$$\Phi = \{f: G \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ olomorfa, iniettiva, } f(0) = 0\}.$$

L'inclusione di  $G$  in  $\mathbb{D}$  è un elemento di  $\Phi$  che quindi non è vuoto.

Dato che ogni  $f \in \Phi$  ha valori in  $\mathbb{D}$ ,  $\Phi$  è uniformemente limitata; inoltre dalle stime di Cauchy su  $f^{(n)}$  per  $f$  olomorfa sappiamo che

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad \text{tale che} \quad |f'(0)| \leq c, \quad \forall f \in \Phi; \\ \Rightarrow s = \sup_{f \in \Phi} |f'(0)| \quad \text{esiste finito} \end{aligned}$$

**Passo 3** Mostriamo ora che esiste  $f \in \Phi$  tale che  $s = |f'(0)|$ .

Per definizione di estremo superiore

$$\exists \{f_n\} \subseteq \Phi \quad \text{tale che} \quad \lim_n |f'_n(0)| = s$$

Per Montel esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge uniformemente sui compatti a una funzione  $f$ .

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che  $f$  è olomorfa e che

$$f_{n_k}^{(l)} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} f^{(l)} \quad \text{uniformemente sui compatti}$$

quindi ovviamente

$$|f'(0)| = s$$

Notiamo che  $s > 0$ , perché la funzione  $z \rightarrow z$  è in  $\Phi$ , e quindi  $f$  non è costante; per la proposizione 15.5  $f$  è iniettiva, e  $f(0) = 0$  poiché  $f_{n_k}(0) = 0$  per ogni  $n_k$ . Inoltre, per continuità, dato che  $f_{n_k}$  ha valori in  $\mathbb{D}$ ,

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in G.$$

Ma allora dall'olomorfia di  $f$  e dal principio del massimo modulo segue che

$$|f(z)| < 1 \quad \forall z \in G$$

Quindi  $f(z) \in \mathbb{D} \quad \forall z \in G$  e possiamo concludere che  $f \in \Phi$ .

**Passo 4** Abbiamo costruito una particolare  $f: G \rightarrow \mathbb{D}$ , con  $G \subset \mathbb{D}$ ,  $0 \in G$ , che è iniettiva e olomorfa e con  $f(0) = 0$ .  $f$  è un bi-olomorfismo con la sua immagine ed è tale che

$$|f'(0)| = \sup_{\phi \in \Phi} |\phi'(0)| < +\infty.$$

Vogliamo dimostrare che  $f$  è surgettiva.

Supponiamo per assurdo che non lo sia

$$\exists \alpha \in \mathbb{D} \quad \alpha \notin f(G)$$

Consideriamo

$$\psi_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \quad \psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Sia  $G' = \psi_\alpha(f(G)) \subseteq \mathbb{D}$ .  $G'$  è semplicemente connesso e  $0 \notin G'$ , poiché  $0 = \psi_\alpha(\alpha)$  e  $\alpha \notin f(G)$ . Ne segue che esiste un ramo della radice in  $G'$ , cioè

$$\exists g \text{ olomorfa e tale che } g^2(w) = w \quad \forall w \in G'$$

Scritto diversamente, se  $h$  è la funzione di elevazione al quadrato allora

$$h \circ g(w) = w \quad \forall w \in G'.$$

Definiamo

$$F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$$

$F \in \Phi$  poiché  $F(0) = 0$  ed è composizione di funzioni olomorfe, iniettive e a valori in  $\mathbb{D}$ .

Se  $h(w) = w^2$

$$f = \underbrace{\psi_\alpha \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}}_H \circ F = H \circ F$$

$H: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  è olomorfa e  $H(0) = 0$ , valgono quindi le ipotesi del lemma di Schwarz e dato che  $H$  non è iniettiva non può essere una rotazione. Allora da Schwarz

$$\begin{aligned} |H'(0)| &< 1 \\ \text{ma si ha } f'(0) &= H'(0)F'(0) \\ \Rightarrow |f'(0)| &< |F'(0)| \end{aligned}$$

che contraddice la massimalità di  $|f'(0)|$ . Assurdo. Quindi  $f: G \rightarrow \mathbb{D}$  è un bi-olomorfismo, e per avere  $f'(0) \in \mathbb{R}^+$  basta comporre con  $r_\theta$  opportuo.

Per dimostrare l'unicità ora consideriamo

$$F, \tilde{F}: G \rightarrow \mathbb{D} \text{ bi-olomorfismi tali che } F(z_0) = \tilde{F}(z_0) = 0 \text{ e } F'(z_0), \tilde{F}'(z_0) \in \mathbb{R}^+$$

Allora  $F \circ \tilde{F}^{-1}$  è un automorfismo di  $\mathbb{D}$ ; dal corollario-Schwarz

$$F \circ \tilde{F}^{-1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F \circ \tilde{F}^{-1} \text{ è una rotazione, } F \circ \tilde{F}^{-1}(z) = e^{i\theta}z.$$

Quindi

$$\left( F \circ \tilde{F}^{-1} \right)'(0) = e^{i\theta}$$

ed è reale positivo

$$\Rightarrow \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \tilde{F}$$

□

**Corollario 15.7.** Dati due domini semplicemente connessi e diversi da  $\mathbb{C}$  essi sono bi-olomorficamente equivalenti.

## 16. Caratterizzazione dei domini semplicemente connessi

L'obiettivo principale di questa sezione, che segue [R], capitolo XIII, e [C], capitolo VIII, Sezione 2, è dimostrare un teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi di  $\mathbb{C}$ . La dimostrazione del teorema sfrutta molti degli argomenti trattati fino ad ora nel corso, ma richiede, in aggiunta, l'introduzione delle funzioni armoniche, un argomento molto importante che in dimensione reale due è strettamente collegato alle funzioni olomorfe, come vedremo.

### 16.1. Funzioni armoniche

**Definizione 16.1.** Una funzione  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice armonica se è di classe  $C^2$  e se è nel nucleo del laplaciano, ossia se  $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0$ .

L'interesse per le funzioni armoniche nel contesto della teoria delle funzioni di variabile complessa viene dal fatto che se  $f$  è olomorfa e si scrive come  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  allora le due funzioni  $u$  e  $v$  sono armoniche. Infatti  $u$  e  $v$  sono di classe  $C^\infty$  (dunque in particolare  $C^2$ ) e da C-R vale che

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Derivando la prima equazione per  $x$  e la seconda per  $y$  e sfruttando il teorema di Schwarz per le derivate miste si ottiene

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx} \end{cases} \Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{yx} = 0$$

L'analogo vale per  $v$ .

**Definizione 16.2.** Se la funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  è la parte reale di una funzione olomorfa  $f \in \mathcal{O}(E)$  allora si dice che  $u$  ammette armonica coniugata e la funzione  $v: E \rightarrow \mathbb{R}$  per cui vale  $f = u + iv$  si dice un'armonica coniugata di  $u$ .

Verrebbe da chiedersi se ci sono delle condizioni che assicurino l'esistenza di un'armonica coniugata e se esistono quali sono. Un primo teorema assicura l'esistenza dell'armonica coniugata in due tipi di domini.

**Teorema 16.3.** Se  $E = \mathbb{C}$  oppure  $E = B_r(0)$  allora una funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  ammette un'armonica coniugata.

*Dimostrazione.* Sia  $E$  come nell'ununciato e sia  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  armonica. Poniamo

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t) dt + \phi(x)$$

con  $\phi(x)$  da determinare. Imponiamo che valga  $v_x = -u_y$  (Cauchy-Riemann). Derivando parzialmente rispetto a  $x$  ed utilizzando che  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  abbiamo

$$v_x(x, y) = \int_0^y u_{xx}(x, t) dt + \phi'(x) = - \int_0^y u_{yy}(x, t) dt + \phi'(x) = -u_y(x, y) + u_y(x, 0) + \phi'(x).$$

Omettiamo la giustificazione del passaggio della derivata sotto il segno di integrale (facile). Poniamo allora  $\phi'(x) = -u_y(x, 0)$  e quindi

$$\phi(x) = - \int_0^x u_y(s, 0) ds.$$

È facile verificare che

$$v(x, y) := \int_0^y u_x(x, t) dt - \int_0^x u_y(s, 0) ds$$

è un'armonica coniugata per  $u$ . □

**Osservazione 16.4.** Supponendo che la funzione armonica  $u$  ammetta armonica coniugata, due sue armoniche coniugate  $v_1$  e  $v_2$  differiscono per una costante. Infatti si ha che le due funzioni  $f_1 = u + iv_1$  e  $f_2 = u + iv_2$  sono olomorfe per ipotesi. Dunque lo è anche la loro differenza  $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ . Questa funzione ammette solo valori immaginari quindi è costante (da Cauchy-Riemann). Ne segue che  $v_1 - v_2$  è una costante.

## 16.2. Enunciato del teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi

**Teorema 16.5.** Sia  $E$  un dominio in  $\mathbb{C}$ . Sono equivalenti

1.  $E$  è semplicemente connesso
2.  $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  in  $E$  e per ogni  $a \in \mathbb{C} \setminus E$
3.  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso
4. Per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  esiste una successione di polinomi  $\{p_n\}$  tali che  $p_n \rightarrow f$  uniformemente sui compatti
5. per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  si ha  $\int_\gamma f(z)dz = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma \subset E$
6. ogni funzione  $f \in \mathcal{O}(E)$  ammette primitiva
7. per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  con  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$  esiste una funzione  $g$  olomorfa in  $E$  tale che  $\exp(g(z)) = f(z)$
8.  $E$  è omeomorfo al disco unitario  $\mathbb{D}$
9. ogni funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  ammette un'armonica coniugata

## 16.3. Dimostrazione del teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue il seguente schema. Si mostra che

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (1)$$

Per poi mostrare che l'affermazione (9) è equivalente all'affermazione (7).

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Sia  $\gamma$  una qualunque curva chiusa in  $E$ . Visto che  $\pi_1(E) = \{0\}$ , sappiamo che  $\gamma$  è omotopa a 0 e che dunque vale che  $\text{Ind}_\gamma(a) = \int_\gamma \frac{1}{z-a} = 0$  per ogni  $a \in \mathbb{C} \setminus E$  (questo perché  $\frac{1}{z-a}$  è olomorfa in  $E$ ). E questo è quanto si voleva dimostrare.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Vogliamo dimostrare che  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso quindi supponiamo che non lo sia e che dunque si possa scrivere  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E = A \cup B$  con  $A$  e  $B$  due chiusi in  $\hat{\mathbb{C}}$  disgiunti. Sia  $B$  il chiuso che contiene  $\{\infty\}$ . Allora  $A$  è un compatto di  $\mathbb{C}$  poiché è sia chiuso che limitato ( $B$  si è fatto carico della parte illimitata). Chiamiamo a questo punto  $E_1 = E \cup A = \hat{\mathbb{C}} \setminus B$  che è un aperto in  $\mathbb{C}$  e che contiene  $A$ . Per dimostrare il teorema di Runge avevamo dimostrato il seguente lemma:

*Dato  $E$  un aperto e  $K \subset E$  un compatto, esiste una regione regolare  $D$  tale che  $D \subset E \setminus K$  e*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Applichiamo questo lemma all'aperto  $E_1$  ed al suo compatto  $A$ . Questa regione  $D$  di cui nel lemma ha come bordo l'unione di una collezione di curve regolari a tratti  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\} \subset E_1 \setminus A = E$

approssimanti la frontiera del compatto  $A$  e vale che  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^l \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  per ogni  $z \in A$  e

per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Scegliendo  $f = 1$  si ottiene che

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^l \int_{\gamma_j} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{i=1}^l \text{Ind}_{\gamma_j}(z) \quad \text{per } z \in A$$

Uno degli addendi nella sommatoria è sicuramente diverso da 0. Tuttavia  $A \subset \mathbb{C} \setminus E$  quindi abbiamo trovato  $a \in A \subset \mathbb{C} \setminus E$  per cui  $\sum_{i=1}^l \text{Ind}_{\gamma_i}(a) \neq 0$ . Questo è assurdo quindi  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso.

(3)  $\Rightarrow$  (4)

Per dimostrare questo passaggio enunciamo un lemma (dimostrazione in [R], pp 267/268 oppure [Conway, Cap. VII, Prop. 1.2]).

**Lemma 16.6.** Sia  $K \subset E$  un compatto. Allora esiste  $\tilde{K}$  un compatto tale che  $K \subset \tilde{K} \subset E$  e che ogni componente connessa di  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  contiene una componente connessa di  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ .

Siccome per ipotesi  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  ha un'unica componente connessa (poiché è connesso) allora anche  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  ha un'unica componente connessa. In particolare si ha che  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  è connesso e contiene  $\{\infty\} \cup \left(\overline{B_R(0)}\right)^c$  per un certo  $R \gg 0$ . Dunque per ogni punto  $p \in \tilde{K}^c$  esistono un  $R \gg 0$ , un  $\varepsilon > 0$  e una curva  $\gamma$  contenuta in  $\tilde{K}^c$  tali che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) \in C_{R+\varepsilon}(0)$ . Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Runge si riesce allora ad affermare che  $f|_{\tilde{K}}$  è approssimabile uniformemente con polinomi. Dunque anche  $f|_K$  è approssimabile uniformemente con polinomi.

(4)  $\Rightarrow$  (5)

Data l'uniforme convergenza sui compatti, si passa il limite sotto al segno di integrale e si sfrutta che  $\int_{\gamma} p_n = 0$  (che vale perché i polinomi ammettono primitiva). Dunque

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} p_n = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \rightarrow \int_{\gamma} f = 0$$

(5)  $\Rightarrow$  (6)

Già visto durante il corso, vedere il Corollario 5.25.

(6)  $\Rightarrow$  (7)

Già visto durante il corso, vedere la dimostrazione della Proposizione 6.7.

(7)  $\Rightarrow$  (8)

Nella dimostrazione del teorema della mappa di Riemann l'ipotesi di semplice connessione del dominio  $G$  viene sfruttata solo per garantire l'esistenza del ramo del logaritmo in  $G$  (nel passo 1) e della radice quadrata (nel passo 2). L'esistenza di un ramo del logaritmo implica anche l'esistenza della radice quadrata. Dunque, se vale l'ipotesi (7), il teorema della mappa di Riemann continua a valere anche per domini per i quali non viene fatta l'ipotesi di semplice connessione. Esiste dunque un bi-olomorfismo  $F: E \rightarrow \mathbb{D}$ . In particolare  $F$  è un omeomorfismo quindi  $E$  è omeomorfo a  $\mathbb{D}$ . Se  $E = \mathbb{C}$  allora si sfrutta l'omeomorfismo  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  tale che  $z \mapsto \frac{z}{|z|+1}$ .

(8)  $\Rightarrow$  (1)

Questo passaggio è ovvio poiché  $\mathbb{D}$  è semplicemente connesso e se due spazi topologici sono omeomorfi allora hanno gruppo fondamentale isomorfo (dunque  $\pi_1(E) = \{0\}$ ).

(7)  $\Rightarrow$  (9)

Se  $E \neq \mathbb{C}$  e assumendo l'ipotesi (7) si può applicare il teorema della mappa di Riemann e affermare che esiste un bi-olomorfismo  $h: E \rightarrow \mathbb{D}$ . Sia ora  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica e consideriamo la funzione  $u_1 = u \circ h^{-1}$ .

**Osservazione 16.7.** In generale vale che se  $u$  è  $C^2(E)$  e se  $\phi: \tilde{E} \rightarrow E$  è un bi-olomorfismo allora

$$\Delta(u \circ \phi) = (\Delta u \circ \phi)|\phi'|^2$$

La dimostrazione è un conto non difficile basato sull'applicazione ripetuta della regola di derivazione per le funzioni composte. In particolare vediamo che se  $u$  è armonica allora anche  $u \circ \phi$  è armonica.

Essendo  $u_1$  un'armonica sul disco e ricordando il teorema 16.3 si ha che  $u_1$  ammette un'armonica coniugata (la chiamiamo  $v_1$ ). Quindi  $f = u_1 + iv_1$  è olomorfa sul disco. Ponendo  $f = f_1 \circ h$  si ha che  $f = u + iv$  con  $v = v_1 \circ h^{-1}$ . Dunque  $f$  è olomorfa e  $v$  è l'armonica coniugata di  $u$ . Se  $E = \mathbb{C}$  basta appellarsi al teorema 16.5.

(9)  $\Rightarrow$  (7)

Sia  $f \in \mathcal{O}(E)$  e  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ . Consideriamo  $u = \operatorname{Re}(f)$  e  $v = \operatorname{Im}(f)$ . Sia  $U = \log |f|$ ; un conto mostra che  $U$  è armonica. Per ipotesi esiste  $V$  armonica coniugata di  $U$  tale che  $g = U + iV$  è una funzione olomorfa. Sia  $h = \exp(g)$ . Si osserva che  $h$  è olomorfa e mai nulla. Si ha inoltre

$$\left| \frac{f(z)}{h(z)} \right| = \frac{|f(z)|}{|e^U e^{iV}|} = \frac{|f(z)|}{|e^U|} = \frac{|f(z)|}{|f(z)|} = 1$$

Dunque  $\frac{f}{h}$  è olomorfa (poiché rapporto di funzioni olomorfe) e ha  $|\frac{f}{h}| = \text{costante}$ . Dunque  $\frac{f}{h}$  è una funzione costante (si veda la parte finale del teorema del massimo modulo) e vale che

$$f(z) = c \cdot h(z) = c \exp(g(z)) = \exp(g(z + c_1)) \quad \text{con } c, c_1 \in \mathbb{C}$$

Che è quello che volevamo dimostrare. □

## 17. Prodotti infiniti

Questa sezione, che segue principalmente [SS], si occuperà di dare un senso a formule del tipo

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (17.1)$$

In questo caso, si ha a che fare con una fattorizzazione della funzione seno tramite funzioni che si annullano precisamente dove essa si annulla ed allo stesso ordine. Questo tipo di studi è motivato dal teorema di Weierstrass che informalmente ci dice che dato un insieme discreto di punti si può definire una funzione che si annulla sui punti di questo insieme, unicamente definita a meno di un esponenziale.

**Definizione 17.1** (Convergenza dei prodotti). Data  $\{a_n\} \in \mathbb{C}$  successione, si dice che  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  converge se esiste  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n)$ .

**Proposizione 17.2.** Se la serie definita da  $\{a_n\}$  converge assolutamente, allora  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  converge, e quest'ultima converge a zero se e solo se esiste un fattore uguale a zero

*Dimostrazione.* Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge allora per  $n > \tilde{n}$  si ha  $|a_n| < \frac{1}{2}$ , dunque senza perdita di generalità si può assumere che lo siano tutti gli  $a_n$ , da cui risulta che  $\text{Log}(1 + a_n)$  è ben definito, con  $\text{Log}$  il logaritmo principale.

Poiché  $(1 + a_n) = e^{\text{Log}(1+a_n)}$ ,

$$\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = \prod_{n=1}^N e^{\text{Log}(1+a_n)} = e^{\sum_{n=1}^N \text{Log}(1+a_n)} = e^{B_N} \quad (17.2)$$

con  $B_N = \sum_{n=1}^N b_n$  e  $b_n = \text{Log}(1 + a_n)$ .

Si ricordi che per  $|z| < 1$  si ha  $\text{Log}(1 + z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ , da cui segue facilmente che

$$|\text{Log}(1 + z)| < 2|z|$$

se  $|z| < \frac{1}{2}$ ; quindi  $|b_n| = |\text{Log}(1 + a_n)| \leq 2|a_n|$ , quindi  $\sum_{n=1}^N b_n$  converge a  $B$ . Per continuità,  $e^{B_N} \rightarrow e^B$ , e da (17.2) segue la prima asserzione.

La seconda affermazione segue da un semplice ragionamento: se  $\forall n, 1 + a_n \neq 0$ , il prodotto è diverso da zero perché è uguale ad un esponenziale, mentre se almeno uno è uguale a 0, il prodotto è zero.  $\square$

Passiamo a prodotti infiniti di funzioni olomorfe.

**Proposizione 17.3.** Siano  $\Omega$  un aperto ed  $F_n$  una successione di funzioni olomorfe tale che  $\exists c_n \mid \sum_n c_n < \infty$ , tale che  $|F_n(z) - 1| < c_n \forall z \in \Omega$ , allora:

1.  $\prod_n F_n$  converge uniformemente in  $\Omega$  ad una funzione olomorfa;
2. se  $F_n$  non ha zeri in  $\Omega$ , neanche  $F$  ne ha e

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}$$

uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.* 1. Ponendo  $F_n(z) = 1 + a_n(z)$ , si ha che  $|a_n(z)| < c_n$  uniformemente in  $\Omega$ , dunque si ha convergenza assoluta della serie associata, uniformemente in  $\Omega$ , e si può ripetere la dimostrazione proposta nel caso numerico. Segue l'olomorfia della funzione  $F(z) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_i(z), \text{ dal teorema di Weierstrass.}$$

2. Sia  $G_N = \prod_{n=1}^N F_i(z)$ : dall'uniforme convergenza in tutto  $\Omega$  abbiamo in particolare l'uniforme convergenza sui compatti. Sappiamo allora (Weierstrass) che  $G'_N(z) \rightarrow F'(z)$  uniformemente sui compatti. Fissiamo un compatto  $K \subseteq \Omega$ ; poiché  $F_n$  non ha zeri,  $G_N$  non si annulla in  $K$ , dunque neanche  $F$  si annulla (se esistesse  $z \in K$  con  $F(z) = 0$ , allora dalla precedente proposizione esisterebbe un  $n$  con  $1 + a_n(z) = 0$ , contro l'ipotesi). Quindi

$$\frac{G'_N}{G_N} \rightarrow \frac{F'}{F}$$

uniformemente in  $K$ . Si può infine dimostrare induttivamente che  $\frac{G'_N}{G_N} = \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}$ . Ad esempio per  $N = 2$  si ha che

$$\frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2} = \frac{F'_1 F_2 + F_1 F'_2}{F_1 F_2} = \frac{(F_1 F_2)'}{F_1 F_2}.$$

Dunque

$$\frac{F'}{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{G'_N}{G_N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}$$

uniformemente in  $K$ , che è quello che dovevamo dimostrare. □

**Osservazione 17.4.** In generale, se  $F$  ha uno zero di ordine  $m$  in  $z_0 \in \Omega$  allora  $z_0$  è uno zero di un numero finito di fattori, la cui somma degli ordini è  $m$ . Infatti, si consideri  $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$  e sia  $F_n(z) = 1 + a_n(z)$ : per ipotesi esiste  $\tilde{n}$  con  $|a_n(z)| < \frac{1}{2} \forall n \geq \tilde{n}$  uniformemente in  $B_R(z_0)$  (per cui si ha  $1 + a_n(z) \neq 0$ ), e spezzando la produttoria

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^{\tilde{n}} F_n \prod_{n=\tilde{n}+1}^N F_n$$

capiamo allora che tutti gli zeri si trovano nella prima produttoria, mentre la seconda è diversa da zero. Segue la tesi perché  $\prod F_n = (F_1) \dots (F_{\tilde{n}}) H$ , dove  $H(z_0) \neq 0$ .

**Osservazione 17.5.** Nella precedente proposizione abbiamo fatto ipotesi molto forti sulle  $F_n$ <sup>11</sup>. In generale si può solo assumere che  $\sum F_n - 1$  converga assolutamente ed uniformemente sui compatti e dimostrare che, conseguentemente,  $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$  converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa; la dimostrazione precedente si può adattare senza problemi. In questo contesto è utile la seguente osservazione:

sia  $X \subset \Omega$  e sia  $\{h_n(x)\}$  una successione di funzioni in  $X$  convergente uniformemente ad  $h(x)$ ; se esiste  $a \in \mathbb{R}$  con  $\text{Re}(h(x)) \leq a \forall x \in X$  allora si ha anche  $e^{h_n(x)} \rightarrow e^{h(x)}$  uniformemente.

La dimostrazione è elementare (la trovate in [C]). Per noi  $X = K$ ,  $h_n(z) = \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 + a_n(z))$  e

$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_n(z))$  (e ovviamente  $\text{Re} h(z)$  è uniformemente limitata su  $K$  perché limite uniforme di funzioni continue).

Si vuole tornare ora allo studio di

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Per dimostrare che vale l'uguaglianza, ci si serve di una formula ponte, che ha un interesse intrinseco e che verrà illustrata nella seguente proposizione.

<sup>11</sup>  $\exists c_n \mid \sum c_n < \infty$ , tale che  $|F_n(z) - 1| < c_n \forall z \in \Omega$

**Proposizione 17.6.** Vale la seguente espansione della cotangente

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (17.3)$$

*Dimostrazione.* Sono fornite due dimostrazioni:

1) È chiaro che vale la seguente riscrittura della formula che vogliamo dimostrare:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{z-n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n} \right) \quad (17.4)$$

Si noti anzitutto che la serie è assolutamente convergente  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ :  
se  $R > |z|$  allora

$$\left| \frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n} \right| = \frac{2}{|z - \frac{n^2}{z}|} \leq \frac{2}{|R - \frac{n^2}{R}|} \sim \frac{1}{n^2}$$

che ci dà la convergenza per il criterio del confronto.

Per  $z$  fissato si consideri la funzione ausiliaria

$$f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w),$$

la quale ha poli semplici in  $w = z, w = n \in \mathbb{Z}^*$  ed un polo doppio nell'origine: l'obiettivo è di dimostrare che il suo integrale sul bordo del quadrato di vertici

$$\left\{ \left(N + \frac{1}{2}\right) + i\left(N + \frac{1}{2}\right), \left(N + \frac{1}{2}\right) - i\left(N + \frac{1}{2}\right), -\left(N + \frac{1}{2}\right) + i\left(N + \frac{1}{2}\right), -\left(N + \frac{1}{2}\right) - i\left(N + \frac{1}{2}\right) \right\}$$

è zero; come vedremo fra poco, da ciò seguirà la tesi. Tale integrale è uguale alla somma dei residui di  $f$  contenuti all'interno del quadrato, i quali risultano essere collegati al primo e secondo membro di (17.3). Più precisamente è lasciata per esercizio la seguente verifica:

- $\text{Res}[f, w = z] = -\pi \cot(\pi z)$
- $\text{Res}[f, w = n \neq 0] = \frac{z}{n(z-n)}$
- $\text{Res}[f, w = 0] = \frac{1}{z}$

che sono appunto i termini che compaiono in (17.4). Sia  $|z| < N$ . Per il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_N} f(\zeta) d\zeta = \sum \text{Res} = -\pi \cot(\pi z) + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{z}{n(z-n)} + \frac{1}{z};$$

dunque è sufficiente dimostrare che il membro a sinistra va a zero per  $N \rightarrow +\infty$ . Facciamo innanzitutto vedere che  $\cot(\pi z)$  è uniformemente limitato sul bordo di  $Q_N$ . Poiché si ha che  $\cot(\pi z) = \cot(\pi(z+1))$ , si può studiare la limitatezza solo nella fascia  $|\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ . Si noti anche che se si prende l'intersezione di questa regione con  $|\text{Im}(z)| \leq 1$  ci si trova su un compatto, dunque si può supporre che la parte immaginaria sia maggiore di 1 in valore assoluto. Un conto mostra che

$$\cot(\pi z) = \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}} \cdot i$$

da cui segue che nella fascia presa in considerazione  $|\cot(\pi z)| \leq \frac{1+e^{-2\pi|y|}}{1-e^{-2\pi|y|}}$ : in conclusione

$$\left| \int_{\partial Q_N} f(\zeta) d\zeta \right| < c \cdot \ell(Q_N) \cdot \frac{|z|}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\left(|z| - \left(N - \frac{1}{2}\right)\right)}$$

da cui l'asserto che il limite dell'integrale sul quadrato è 0 (perché  $\ell(Q_N) = 4(2N+1)$ ).

2) Vediamo la seconda dimostrazione. Si consideri  $F(z) = \pi \cot(\pi z)$  e si osservi la validità delle seguenti tre proprietà:

- $F(z) = F(z + 1)$  (è periodica di periodo 1);
- ha poli semplici in  $\mathbb{Z}$ , e non ne ha altri
- in prossimità dell'origine si può scrivere come  $\frac{1}{z} + g(z)$ , con  $g$  olomorfa.

Si può mostrare che il membro a destra dell'enunciato di (17.4) condivide le stesse proprietà. La seconda e la terza sono immediate, mentre la prima viene dal seguente ragionamento:

Si osservi che

$$\frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n}$$

intesa come  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$ , e la periodicità segue dall'uguaglianza di

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n+1}$$

a

$$\frac{1}{z+1-N} - \frac{1}{z-N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$$

e prendendo il limite per  $N$  tendente ad  $\infty$ .

Sia ora  $H(z) = F(z) - \left( \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right)$ : essendo entrambi gli addendi di periodo 1,  $H$  è di periodo 1, dunque la singolarità eliminabile nell'origine è per periodicità eliminabile su tutti gli interi, da cui  $H$  è intera. Si vuole dimostrare che è anche limitata, per poi applicare Liouville ed ottenere la tesi. Si può studiare  $H$  solo nella regione  $|\Re(z)| \leq \frac{1}{2}, |\Im(z)| > 1$ , ed avendo già verificato la limitatezza per  $F$  è sufficiente dimostrarla per l'altro addendo. Fissiamo ad esempio  $\Im z > 1$ . Nella regione identificata, con  $z = x + iy$ , quindi  $|x| \leq 1/2, y > 1$ , vale la seguente stima:

$$\left| \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq c_1 + c_2 \sum \frac{y}{y^2 + n^2} \leq c_1 + \tilde{c} \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2 + x^2} dx$$

La prima disuguaglianza è elementare (qualche semplice conto scrivendo esplicitamente  $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ); la seconda disuguaglianza segue dall'osservazione che l'integrando è decrescente in  $x$ ; notare poi che l'integrale non dipende da  $y$  ed è dunque limitato in  $y$ ; infatti effettuando la sostituzione  $x \leftrightarrow xy$  si ha:

$$\int \frac{y}{y^2 + x^2} dx = \int \frac{y^2}{y^2 + y^2 x^2} dx = \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$

Una simile argomentazione vale nella regione  $|x| \leq 1/2, y < -1$ .

La funzione risulta essere intera e limitata, dunque costante per Liouville. Tuttavia, essendo la funzione dispari,  $H(-z) = -H(z)$ ,  $\implies H \equiv 0$ . Segue la tesi.

Si può ora dimostrare:

**Proposizione 17.7.** Vale la fattorizzazione

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

*Dimostrazione.* Il membro a destra risulta essere convergente: infatti, fissato  $z \in B_R(0)$  si ha  $|1 - \frac{z^2}{n^2} - 1| = |\frac{z^2}{n^2}| < \frac{R^2}{n^2}$  che dà una serie convergente.

Siano  $G(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$  e  $P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$ . Dalla proposizione 17.3, al di fuori di  $\mathbb{Z}$  si ha:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum \frac{F'_n(z)}{F_n(z)} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (17.5)$$

D'altra parte è ovvio che  $\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \cot(\pi z)$ . Da (17.3) e (17.5) otteniamo quindi

$$\left(\frac{P(z)}{G(z)}\right)' = \frac{P'G - PG'}{G^2} = \frac{P}{G} \left(\frac{P'}{P} - \frac{G'}{G}\right) = 0$$

Segue che  $\frac{P(z)}{G(z)}$  è costante, dunque  $P(z) = cG(z)$ , ma essendo  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{P(z)}{z} = 1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{cG(z)}{z}$ , con la prima uguaglianza facile da giustificare e la seconda ben nota, si ha che  $c = 1$ , da cui la tesi.

## 18. Teorema di fattorizzazione di Weierstrass

### 18.1. Fattori elementari e loro proprietà

**Definizione 18.1** (Fattore elementare). Un fattore elementare è una funzione  $E_p(z)$ , con  $p = 0, 1, \dots$ , definita da

$$E_0 = (1 - z), \quad E_p = (1 - z) \cdot \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right).$$

**Osservazione 18.2.**  $E_p(\frac{z}{a})$  è intera con solamente uno zero in  $a$ , il quale è semplice.

**Lemma 18.3.** Per  $|z| \leq 1$ ,  $p \geq 1$ , si ha  $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$

*Dimostrazione.* Essendo  $E_p$  intera può essere riscritta come  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \implies -z^p \cdot \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right) = E_p'(z) = \sum k a_k z^{k-1} \implies a_1 = \dots = a_p = 0$ . Inoltre, poiché  $a_k \leq 0 \forall k \geq p+1$ ,  $|a_k| = -a_k \forall k \geq p+1$ , quindi da  $0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k$  segue che  $\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1$ .

Se  $|z| \leq 1$ ,  $|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1} \cdot 1. \quad \square$

### 18.2. Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per funzioni intere

**Teorema 18.4.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{C}$  senza punti di accumulazione tale che

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  e tale che non vi siano elementi nulli. Allora data una successione di interi  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < +\infty \quad \forall r > 0 \quad (18.1)$$

la funzione

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa con zeri solo in  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ . Inoltre ogni  $a_i$  è uno zero della funzione limite di molteplicità  $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{a_i\}}(a_n) < +\infty$ .

Infine, se  $p_n = n - 1$  allora (18.1) è soddisfatta.

*Dimostrazione.* Per il lemma sappiamo che

$$|1 - E_p(z/a_n)| \leq |z/a_n|^{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^+$$

quando  $|z| \leq r$  e  $r \leq |a_n|$ .

Fissato  $r > 0$  poichè  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ ,  $\exists N > 0$  tale che per  $n > N$  allora  $r \leq |a_n|$ .

Ma quindi, per  $r > 0$  fissato e per  $z \in B_r(0)$  per ipotesi si ottiene che

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |1 - E_{p_i}(z/a_i)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |z/a_i|^{p_i+1} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |r/a_i|^{p_i+1} < +\infty$$

quindi la serie  $\sum_{i=N+1}^{\infty} |1 - E_{p_i}(z/a_i)|$  converge uniformemente in  $B_r(0)$ . È ora facile dimostrare che

la funzione

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n) = \prod_{n=1}^N E_{p_n}(z/a_n) \prod_{n=N+1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

soddisfa tutte le proprietà che compaiono nell'enunciato del teorema.

Rimane da dimostrare che se  $p_n = n - 1$  allora la condizione

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < +\infty \quad \forall r > 0$$

è soddisfatta: per mostrarlo basta notare che  $\forall r > 0 \exists M \in \mathbb{N}$  tale che se  $n > M$  allora  $|a_n| > 2r$ , ma quindi possiamo concludere la dimostrazione notando che

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1+1}} < +\infty$$

□

**Teorema 18.5.** (di fattorizzazione di Weierstrass).

Sia  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  con 0 zero di ordine  $m$ , sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{C}$  zeri di  $f$  che soddisfano le stesse ipotesi del teorema precedente, allora esiste  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  come prima tali che

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente  $\exists (p_n)_n$  e  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  tale che

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

inoltre  $h$  ha gli stessi zeri di  $f$  con le stesse molteplicità, quindi la funzione  $\frac{f(z)}{h(z)}$  è meromorfa con solo singolarità eliminabili e mai nulla, ma quindi esiste  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  tale che  $\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$  da cui la tesi. □

**Esempio 18.6.** Consideriamo ora  $f(z) = \sin(\pi z)$ .

Gli zeri di  $f$  sono semplici e sono tutti e soli i numeri interi, notiamo inoltre che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left( \frac{r}{n} \right)^2 < +\infty \quad \forall r > 0$$

quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass con  $p_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  e ottenere che esiste  $g$  olomorfa tale che

$$f(z) = \sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} E_1(z/n) = e^{g(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Lascio a voi la giustificazione che il riordinamento dei termini della produttoria è permesso. Notiamo che siamo arrivati molto vicini all'identità che avevamo già ottenuto in precedenza in modo indipendente.

Per trovare  $g$  utilizziamo nuovamente lo sviluppo della cotangente, infatti:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

quindi  $g'(z) \equiv 0$ , perciò  $g(z) = a$  costante, e facendo tendere  $z$  a 0 nell'uguaglianza

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

otteniamo  $e^a = \pi$ , abbiamo così nuovamente ottenuto l'identità già trovata nei capitoli precedenti.

### 18.3. La funzione $\sigma$ di Weierstrass

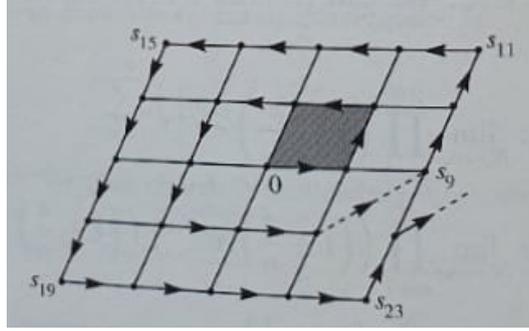
Consideriamo  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linearmente indipendenti su  $\mathbb{R}$ , sia

$$\Gamma := \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$$

il reticolo del piano generato da  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in \mathbb{C}$ .

Vogliamo costruire una funzione complessa olomorfa che ha come zeri tutti e soli gli elementi di  $\Gamma$ . Considereremo la partizione di  $\Gamma$  nei sottoinsiemi

$$\Gamma_k := \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad \max(|a|, |b|) = k\}$$



Possiamo vedere facilmente dalla figura e poi, rigorosamente, tramite pochi conti che per ogni  $k$  intero positivo  $\Gamma_k$  conta  $8k$  elementi.

Siano  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gli elementi di  $\Gamma^*$  elencati induttivamente tramite  $\Gamma_k$  (vedere la figura; quindi i primi 8 elementi,  $s_1, \dots, s_8$  saranno gli elementi di  $\Gamma_1$  ordinati secondo le frecce, i successivi 16,  $s_9, \dots, s_{24}$  quelli di  $\Gamma_2$ , anche ordinati secondo le frecce, etc. etc).

Notiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = +\infty$

**Lemma 18.7.**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 < +\infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$

*Dimostrazione.* Notiamo dalla costruzione geometrica con la quale abbiamo definito  $\Gamma_k$  che  $\exists d > 0$  tale che  $|x| > kd$  per  $x \in \Gamma_k$  quindi:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \sum_{s_n \in \Gamma_k} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 \leq \sum_{n \leq 1} 8k \left| \frac{z}{kd} \right|^3 \sim \sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

□

Dato che abbiamo una serie a termini positivi, possiamo riordinare e quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 = \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left| \frac{z}{\omega} \right|^3$$

e quindi per il lemma precedente possiamo applicare il teorema di fattorizzazione di Weierstrass con  $p_n = 2$  e ottenere la funzione con le proprietà desiderate nota come funzione  $\sigma$  di Weierstrass:

$$\sigma(z, \Gamma) = z \prod_{\omega \in \Gamma / \{0\}} \left( 1 - \frac{z}{\omega} \right) \exp\left( \frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\omega^2} \right)$$

La derivata logaritmica di  $\sigma$  è

$$\xi(z, \Gamma) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Gamma / \{0\}} \left( \frac{1}{\omega} + \frac{z}{z - \omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

La derivata cambiata di segno di  $\xi$  è chiamata la funzione  $\wp$  di Weierstrass:

$$\wp(z, \Gamma) = -\xi(z, \Gamma)'$$

Si ha quindi, in definitiva,

$$\wp(z, \Gamma) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma / \{0\}} \left( \frac{z}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Questa funzione ha un ruolo molto importante nella teoria delle funzioni di variabile complessa. Notiamo sin da ora che  $\wp(z, \Gamma)$  è una funzione meromorfa con poli di ordine 2 nei punti di  $\Gamma$ .

## 18.4. Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass in domini generali

Enunciamo senza dimostrarlo il seguente importante risultato, rimandando a [Conway] per la dimostrazione :

**Teorema 18.8.** (Teorema di fattorizzazione di Weierstrass per domini generali) Sia  $E$  dominio,  $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$  senza punti di accumulazione,  $(m_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ , allora esiste  $f \in \mathcal{O}(E)$  con zeri solo in  $(a_n)_n$  di ordine  $(m_n)_n$ .

**Corollario 18.9.**  $\mathcal{M}(E)$  è il campo dei quozienti di  $\mathcal{O}(E)$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{M}(E)$ , siano  $(a_n)_n$  i suoi poli di ordine rispettivamente  $(m_n)_n$ , per il teorema precedente esiste  $h \in \mathcal{O}(E)$  con zeri nei poli di  $f$  e ordine l'ordine dei poli di  $f$ , ma quindi tutti i poli di  $f \cdot h$  sono eliminabili, perciò  $f \cdot h(z) = g(z) \in \mathcal{O}(E)$  e  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  con  $g, h \in \mathcal{O}(E)$ , la tesi segue dall'arbitrarietà di  $f \in \mathcal{M}(E)$ .  $\square$

## 19. Il Teorema di Mittag-Leffler

### 19.1. Preliminari topologici

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Mittag-Leffler premettiamo il seguente lemma tecnico (dimostrazione in [Conway, Cap. VII, Prop. 1.2]):

**Lemma 19.1.** Sia  $E \subseteq \mathbb{C}$  un aperto, allora esiste  $(K_n)_n$ , esaustione di  $E$  in compatti, tale che:

1.  $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$
2.  $\bigcup K_n = E$
3. ogni componente di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$  contiene una componente di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$

### 19.2. Ancora sul teorema di Runge

Abbiamo dato la definizione di funzione meromorfa in  $\widehat{E} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ ; abbiamo denotato con  $\mathcal{M}(\widehat{E})$  il campo delle funzioni meromorfe in  $\widehat{E}$  ed abbiamo visto che le funzioni razionali appartengono a  $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Richiamiamo anche il metodo di spostamento dei poli di una funzione razionale lungo una curva, si veda la dimostrazione della seconda parte del Teorema di Runge. Esattamente la stessa dimostrazione stabilisce la seguente

**Proposizione 19.2.** Sia  $K$  un compatto in  $\mathbb{C}$ . Sia  $U$  un sottoinsieme **connesso** di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ . Sia  $z_0$  un punto in  $U$ . Allora ogni funzione razionale con poli in  $U$  può essere approssimata uniformemente in  $K$  con una funzione razionale con un unico polo in  $z_0$ .

Osserviamo incidentalmente che se  $z_0$  può essere scelto uguale a  $\infty$  allora la funzione approssimante sarà una funzione meromorfa con un unico polo in  $\infty$ , e cioè un polinomio.

Dalla precedente proposizione e dalla dimostrazione del teorema di Runge segue subito il seguente risultato.

**Teorema 19.3.** (Teorema di Runge, versione 2). Sia  $K$  un compatto in  $\mathbb{C}$  e sia  $f$  una funzione olomorfa in un insieme aperto che contiene  $K$ . Sia  $S \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  un insieme con la proprietà che ogni componente connessa di  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$  contiene un punto di  $S$ . Allora  $f|_K$  è approssimabile uniformemente con funzioni razionali con poli in  $S$ .

### 19.3. Teorema di Mittag-Leffler e primi esempi

**Teorema 19.4.** (Mittag-Leffler).

Sia  $E$  un aperto e  $(z_n)_n \subseteq E$  una successione senza punti di accumulazione,  $p_k$  polinomi in  $\frac{1}{z-z_k}$ , allora esiste una funzione meromorfa in  $E$  con poli in  $(z_n)_n$  e con parti principali nei poli  $z_k$  uguali a  $p_k$ .

*Dimostrazione.* Osserviamo preliminarmente che il problema è di ovvia soluzione se la successione  $(z_n)_n$  è costituita da un numero finito di punti; basterà prendere la somma finita delle parti principali assegnate. Il problema è interessante quando la successione  $(z_n)_n$  è costituita da un numero infinito di punti.

Consideriamo  $(K_n)_n$  come nel lemma. Sia  $f_1 = \sum_{z_k \in K_1} p_k$  e per ogni  $n \geq 2$   $f_n = \sum_{z_k \in K_n/K_{n-1}} p_k$ .

La funzione  $f_n \in \mathcal{O}(K_{n-1})$  per ogni  $n$ <sup>12</sup>, quindi per il teorema di Runge (versione 2) e la terza parte del lemma topologico, esistono funzioni razionali  $R_n$  con poli in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$  che approssimano le  $f_n$  ristrette a  $K_{n-1}$ . Scegliamo  $R_n$  in modo che  $\|R_n - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$  in  $K_{n-1}$ . Sia

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n>1} (f_n(z) - R_n(z)).$$

La funzione  $f$  converge uniformemente sui compatti infatti, dato  $K$  compatto, per costruzione  $\exists N > 0$  t.c.  $K \subseteq K_N$ , ma quindi in  $K$

$$\sum_{n>N} \|f_n(z) - R_n(z)\| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \leq \infty$$

<sup>12</sup>con ciò intendiamo che è olomorfa in un insieme aperto che contiene il compatto  $K_{n-1}$

Possiamo quindi concludere che  $f$  è una funzione meromorfa che per costruzione ha tutti e soli i poli in  $(z_n)_n$  con le rispettive parti principali come richieste dall' enunciato, quindi  $f$  è la funzione desiderata.  $\square$

**Osservazione 19.5.** Se  $E = \mathbb{C}$  allora possiamo prendere  $K_n = \overline{B_n(0)}$  e risulta  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C} = \{\infty\}$ . Quindi per  $n > 1$  possiamo scegliere  $R_n$  uguale ad un'opportuna somma finita dello sviluppo di Taylor di  $f_n$  in  $z = 0$  (un polinomio è una funzione razionale con unico polo a  $\{\infty\}$ ).

**Esempio 19.6.** Ponendo  $\{z_n\} = \mathbb{N}^*$ ,  $p_k = \frac{1}{z-k}$ , vogliamo costruire una funzione  $f$  meromorfa con poli in  $\mathbb{N}^*$  e con parti principali  $p_k$ .

Notiamo che non basterà sommare le parti principali poichè

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{1}{z-n} \right| \sim \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{1}{n} \right| \rightarrow +\infty$$

In compenso, seguendo l'osservazione appena fatta, sarà sufficiente sottrarre alle parti principali un opportuno trocamento dello sviluppo di Taylor in  $z = 0$ ; proviamo a sottrarre il primo termine della serie di Taylor. Ci rendiamo conto che ciò è già sufficiente per assicurare la convergenza; ciò segue dalla seguente disuguaglianza:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{1}{z-n} - \left(-\frac{1}{n}\right) \right| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \sim \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \frac{C}{n^2} \right| < +\infty$$

#### 19.4. La funzione $\wp$ di Weierstrass

**Definizione 19.7.** Sia  $\Gamma := \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$  un reticolo. Una funzione  $f$  è  $\Gamma$ -periodica se

$$f(z + \omega) = f(z), \quad \forall \omega \in \Gamma.$$

Una funzione meromorfa e  $\Gamma$ -periodica è detta una funzione **ellittica**.

Ci prefiggiamo come obiettivo di trovare, tramite il teorema di Mittag-Leffer, una funzione ellittica con poli in  $\Gamma \equiv \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

**Osservazione 19.8.** Un teorema di Liouville afferma che i poli della funzione cercata devono essere di ordine maggiore o uguale a 2. Dettagli nello Stein-Sharaki.

Come nell' esempio precedente provando semplicemente a sommare le parti principali desiderate, e quindi considerando

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{z^2}$$

si otterrà una serie che in generale non convergerà: ad esempio, se  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = i$  e  $z = 0$  allora

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

va come

$$\sum_{n, m \in \mathbb{Z}^2 / (0,0)} \frac{1}{n^2 + m^2}$$

che non converge, dato che va come

$$\int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

che diverge (coordinate polari). Proviamo quindi nuovamente a sottrarre i primi termini della serie di Taylor.

**Proposizione 1.**  $\sum_{\omega \in \Gamma^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$  converge assolutamente e uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.*

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| \sim \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left| \frac{C}{\omega^3} \right| < +\infty$$

dove l'ultima disuguaglianza è stata già ottenuta precedentemente.  $\square$

**Definizione 19.9.** La seguente funzione, ben definita, è chiamata funzione  $\wp$  di Weierstrass <sup>13</sup>:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

**Osservazione 19.10.** In virtù della proposizione precedente la serie presente nella definizione è convergente, quindi  $\wp$  è meromorfa con poli di ordine 2.

**Proposizione 2.** La funzione  $\wp$  è  $\Gamma$ -periodica e definisce quindi una funzione ellittica

*Dimostrazione.* Per definizione  $\wp$  è pari.

La derivata

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

è  $\Gamma$ -periodica, infatti  $\forall \bar{\omega} \in \Gamma$

$$\wp'(z + \bar{\omega}) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z + \bar{\omega} - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \wp'(z)$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo utilizzato il fatto che per  $\bar{\omega}$  fissato l'applicazione

$$\Gamma \ni \omega \rightarrow \bar{\omega} - \omega \in \Gamma$$

è un automorfismo del reticolo (un reticolo è un gruppo abeliano). Quindi  $\wp(z+\omega) - \wp(z)$  è costante per ogni  $\omega \in \Gamma$ , e ponendo  $z = -1/2\omega$  otteniamo  $\wp(-1/2\omega + \omega) - \wp(-1/2\omega) = \wp(1/2\omega) - \wp(-1/2\omega) = 0$  per parità. Quindi  $\wp(z + \omega) - \wp(z) \equiv 0$  e  $\wp$  è  $\Gamma$  periodica.  $\square$

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente importante teorema che mostra l'importanza della funzione  $\wp$  di Weierstrass nello studio delle funzioni ellittiche:

**Teorema 19.11.** Ogni funzione ellittica  $f$  è esprimibile nella forma:

$$f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z)S(\wp(z))$$

con  $R, S$  funzioni razionali.

---

<sup>13</sup>l'abbiamo già incontrata quando abbiamo parlato della funzione  $\sigma$  di Weierstrass

## 20. La funzione gamma

### 20.1. La funzione $\Gamma(s)$ in $\mathbb{C}$

**Definizione 20.1.** Preso  $s \in \mathbb{R}, s > 0$  si definisce la funzione gamma

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Notiamo che l'integrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$  converge perchè per  $t \sim 0$  la funzione  $e^{-t}$  è limitata e la funzione  $t^{s-1}$  è integrabile; d'altra parte per  $t$  grande  $e^{-t}$  va a 0 più velocemente di ogni potenza; scrivendo

$$e^{-t} t^{s-1} = e^{-t/2} (e^{-t/2} t^{s-1}) \leq C e^{-t/2}$$

è elementare capire che si ha convergenza dell'integrale anche a  $t = \infty$ .

Estendiamo ora  $\Gamma(s)$  in  $\mathbb{C}$  per  $\Re(s) > 0$ ; vale il seguente risultato:

**Proposizione 20.2.**  $\Gamma(s)$  si estende ad una funzione olomorfa in  $\Re(s) > 0$  che è ancora data da  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ .

*Dimostrazione.* Presi  $M > \delta > 0$  e l'insieme  $S_{\delta, M} = \{s \in \mathbb{C} \text{ tali che } \delta < \Re(s) < M\}$  mostriamo che l'enunciato vale per  $s = (\sigma + i\tau) \in S_{\delta, M}$ . Siccome (per  $t > 0$ )

$$t^s = e^{\log(t^s)} = e^s \log(t) = e^{(\sigma+i\tau)\log(t)}$$

si ha

$$\begin{aligned} |t^s| &= |t^\sigma| = t^\sigma \\ |e^{-t} t^{s-1}| &= e^{-t} t^{\sigma-1} \end{aligned} \quad (20.1)$$

Ne segue che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$$

è assolutamente convergente.

Preso la funzione

$$F(\varepsilon, s) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$$

si ha che  $F(\varepsilon, s)$  è olomorfa in  $S_{\delta, M}$ ; basta verificare che  $F(\varepsilon, s)$  verifica le equazioni di Cauchy-Riemann, il che è immediato una volta giustificato il passaggio delle derivate sotto il segno di integrale (il che è standard). Possiamo in alternativa utilizzare Morera + Fubini.

Notiamo ora che  $F(\varepsilon, s)$  converge uniformemente a  $\Gamma(s)$ ; vale infatti:

$$|\Gamma(s) - F(\varepsilon, s)| = \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt. \quad (20.2)$$

Ora, per  $t$  abbastanza piccolo vale la stima  $|e^{-t} t^{\sigma-1}| \leq t^{\sigma-1}$  e quindi:

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\sigma-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\delta-1} dt = \frac{\varepsilon^\delta}{\delta} \quad (20.3)$$

che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  converge uniformemente a 0. Per quel che concerne invece il secondo termine si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| &\leq \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} |e^{-t} t^{\sigma-1}| dt \leq \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt = \\ &\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{M-1} dt \leq C \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt \end{aligned} \quad (20.4)$$

con  $C$  una costante positiva. Tale termine converge a 0 per  $\varepsilon \rightarrow 0$  indipendentemente da  $s$ , e quindi  $F(\varepsilon, s)$  converge uniformemente a  $\Gamma(s)$ ; ne segue che  $\Gamma(s)$  è olomorfa in  $S_{\delta, M}$  in quanto limite uniforme di funzioni olomorfe.

Dall'arbitrarietà di  $\delta$  e  $M$  si ha che  $\Gamma(s)$  è olomorfa per  $\Re(s) > 0$ .  $\square$

**Corollario 20.3.** Se  $\Re(s) > 0$  allora  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

*Dimostrazione.*

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt = e^{-t} t^s \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

ma vale anche:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt = - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} (e^{-t} t^s) dt + s \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} (e^{-t} t^{s-1}) dt \longrightarrow -\Gamma(s+1) + s\Gamma(s) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

da cui segue direttamente la tesi.  $\square$

**Lemma 20.4.**  $\Gamma(n+1) = n!$

*Dimostrazione.* È immediato verificare che  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ; allora dal corollario 20.3 segue direttamente il risultato.  $\square$

**Proposizione 20.5.** (Estensione meromorfa di  $\Gamma(s)$ )

$\Gamma(s)$  (definita in  $\Re(s) > 0$ ) si può estendere ad una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  con poli semplici solo in  $-n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , e residuo in  $s = -n$  pari a

$$\text{Res}[\Gamma(s), -n] = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (20.5)$$

*Dimostrazione.* Iniziamo ad estendere  $\Gamma(s)$  per  $s \in \Re(s) > -1$ . Consideriamo la funzione:

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \quad (20.6)$$

Siccome  $\Gamma(s+1)$  è olomorfa in  $\Re(s+1) > 0$  cioè per  $\Re(s) > -1$ , vediamo che  $F_1(s)$  è meromorfa in  $\Re(s) > -1$ , con unico polo in  $s = 0$ .

Dalla proposizione precedente sappiamo anche che  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  per  $\Re(s) > 0$  e quindi  $F_1|_{\Re(s) > 0} = \Gamma(s)$ .

$F_1$  è dunque un'estensione meromorfa di  $\Gamma(s)$  a  $\Re(s) > -1$ .

In generale preso  $m > 1, m \in \mathbb{N}$  si definisce:

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+(m+1))(s+(m-2)) \cdots s}$$

e con argomenti simili a quelli appena dati per  $F_1$  si vede facilmente che  $F_m$  è meromorfa in  $\Re(s) > -m$  con poli in

$$s \in \{-(m-1), -(m-2), \dots, 0\}$$

e  $F_m|_{\Re(s) > 0} = \Gamma(s)$ . Inoltre queste estensioni sono compatibili:  $F_m = F_k$  per  $1 \leq k < m$  sul dominio di definizione di  $F_k$ .

Vogliamo ora calcolare il residuo in  $s = -n$ . Dal corollario 20.3 si ha che

$$\Gamma(-n+m) = \Gamma((-n+m-1)+1) = (-n+m-1)!$$

È allora elementare dimostrare che

$$\text{Res}[F_m, -n] = \frac{(-1)^n}{n!}$$

I dettagli, che sono elementari ma un minimo laboriosi, sono lasciati per esercizio.  $\square$

**Osservazione 20.6.** L'estensione verifica ancora l'equazione funzionale  $F_m(s+1) = sF_m(s)$  con  $m \in \mathbb{N}$ . Infatti:

$$F_m(s+1) = \frac{\Gamma(m+s+1)}{(s+1)(m-1) \cdots (s+1)} = \frac{(s+m)\Gamma(m+s)}{(s+m) \cdots (s+1)} = \frac{\Gamma(m+s)}{(s+m-1) \cdots (s+1)} = sF_m(s)$$

Denotiamo ancora con  $\Gamma(s)$  l'estensione meromorfa che abbiamo appena definito.

## 20.2. Fattorizzazione di $\Gamma(s)$

Dimostreremo ora una fattorizzazione per  $\Gamma(s)$ .

Consideriamo  $\Gamma_n := \int_0^n t^{s-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$  per  $\Re(s) > 0, n \geq 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\leq e^{-t} \quad \text{per } n \geq t, \\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\rightarrow e^{-t} \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La seconda è ben nota, mentre la prima discende dall'osservazione che per  $t \geq 0, t \leq n$

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) - (-t) = -t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^{k-1} \leq 0 \quad (20.7)$$

e quindi

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$$

da cui la tesi dato che la funzione esponenziale è monotona. La (20.7) si ottiene dall'espansione del logaritmo

$$\text{Log}(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k}, \quad |w| < 1$$

prendendo  $w = -t/n$  e moltiplicando per  $n, n \geq t$ .

Allora per Lebesgue

$$\Gamma_n(s) \rightarrow \Gamma(s). \quad (20.8)$$

Diamo una formula esplicita per  $\Gamma_n(s)$ . Cambiando coordinate con  $\tau = \frac{t}{n}$

$$\Gamma_n(s) = \int_0^1 (\tau n)^{s-1} (1-\tau)^n n d\tau = n^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^n d\tau \quad (20.9)$$

Per  $n=1$  si ha quindi:

$$\int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau) d\tau = \int_0^1 (\tau^{s-1} - \tau^s) d\tau = \left[ \frac{\tau^s}{s} - \frac{\tau^{s+1}}{s+1} \right]_0^1 = \frac{1}{s(s+1)} \quad (20.10)$$

Faremo uso di questa informazione fra poco. In particolare, siccome

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-1}(s+1) &= \int_0^1 \left( \tau^s (n-1)^s (1-\tau)^{n-1} (n-1) \right) d\tau = (n-1)^s \int_0^1 \left( \tau^s (1-\tau)^{n-1} \right) d\tau = \\ &= (n-1)^s \left[ \left( \frac{-\tau^s (1-\tau)^n}{n} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau \right] = (n-1)^s \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau \end{aligned}$$

si può scrivere:

$$\Gamma_n(s) = n^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^n d\tau = \frac{n^{s+1}}{s(n-1)^s} (n-1)^s \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau = \left( \frac{n}{n-1} \right)^s \frac{n}{s} \Gamma_{n-1}(s+1) \quad (20.11)$$

Applicando induttivamente (20.11)  $n-1$  volte otteniamo

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-2)} \Gamma_1(s+n-1)$$

e quindi, infine, utilizzando (20.10)

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

Riassumendo, se utilizziamo (20.8), possiamo enunciare la seguente

**Proposizione 20.7.** Si ha

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} \quad (20.12)$$

Questa formula è molto utile; vediamo perché. Con calcoli elementari abbiamo

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = \frac{1}{n^s} s(1+s)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

Prendiamo ora la funzione  $G$  con zeri semplici solo in  $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$  costruita durante lezione sul teorema di fattorizzazione di Weierstrass:

$$G(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

$G(s)$  è intera e si ha

$$G(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}};$$

Possiamo anche scrivere

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = s e^{\gamma_n s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

dove  $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$

**Proposizione 20.8.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$  esiste ed è per definizione la costante di Eulero-Mascheroni  $\gamma$ .

Omettiamo la semplice dimostrazione della proposizione (la trovate in [SS]).

Il valore di  $\gamma$  è approssimativamente  $0,57721\dots$ . Non è noto se  $\gamma$  sia razionale o irrazionale.

Ma allora vale:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s e^{\gamma_n s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} = s e^{\gamma s} G(s)$$

Questa identità vale per  $\Re s > 0$  ma poi per continuità analitica vale su tutto  $\mathbb{C}$ . Riassumendo

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} \quad (20.13)$$

Osserviamo che  $1/\Gamma(s)$  è intera, con zeri in  $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Segue anche con semplice ragionamenti l'importante formula, valida in  $\mathbb{C} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ ,

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}} \quad (20.14)$$

In alternativa, manipolazioni algebriche del tutto simili a quelle che abbiamo fatto per  $1/\Gamma(s)$  permettono di ottenere la formula (20.14) direttamente da (20.12) e dalla Proposizione 20.8. Vediamo per completezza i dettagli:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{s \log n}}{s(1+\frac{s}{1})(1+\frac{s}{2})\cdots(1+\frac{s}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{s(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n})}}{s} \frac{e^{s(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})}}{(1+\frac{s}{1})(1+\frac{s}{2})\cdots(1+\frac{s}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{s(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n})}}{s} \frac{e^s e^{\frac{s}{2}} \cdots e^{\frac{s}{n}}}{(1+\frac{s}{1})(1+\frac{s}{2})\cdots(1+\frac{s}{n})} \end{aligned} \quad (20.15)$$

che è precisamente (20.14).

**Osservazione 20.9.** Alcuni testi, ad esempio il Conway, prendono questa espansione come *definizione* di  $\Gamma(s)$ .

**Osservazione 20.10.** Utilizziamo ora la (20.14) per ottenere una classica formula dovuta ad Eulero (formula di riflessione). Dalla (20.14) e dall'espansione del seno in prodotto infinito abbiamo:

$$\frac{\sin(\pi s)}{\pi s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right) = G(s)G(-s)$$

$$\implies \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} = -s^2 G(s)G(-s) = -s \frac{\sin(\pi s)}{\pi}$$

e da quanto osservato precedentemente,  $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$ , capiamo che vale la **formula di Eulero o formula di riflessione**:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{20.16}$$

Quindi,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s) \frac{\sin(\pi s)}{\pi}$$

Osserviamo che  $\Gamma(1-s)$  ha poli in  $s \in \mathbb{N}^+$  e che essi vengono cancellati dagli zeri di  $\sin(\pi s)$ . Ritroviamo allora che  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  è intera con zeri in  $s = -n$  con  $n \in \mathbb{N}$  (questi sono gli zeri di  $\sin(\pi s)$  che non vengono cancellati dai poli di  $\Gamma(1-s)$ ).

**Osservazione 20.11.** Da quanto visto sino ad ora segue anche l'importante osservazione che  $\Gamma(s)$  **non ha zeri**.

**Osservazione 20.12.** Per un approccio diverso alla formula di Eulero potete consultare [SS].

## 21. La funzione zeta di Riemann

Sappiamo dai corsi elementari che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge per  $\alpha > 1$ ; estendiamo questo risultato ai complessi:

**Proposizione 21.1.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  converge per  $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$ , e definisce una funzione olomorfa.

*Dimostrazione.* Dimostriamo la proposizione in  $\{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 1 + \delta\}$  per  $\delta > 0$ ; per l'arbitrarietà di  $\delta$  seguirà la tesi. Sia  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > 1 + \delta$ , allora:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta+1}}$$

Quindi la serie converge uniformemente e per il teorema di Weierstrass la serie definisce una funzione olomorfa. □

Questa funzione, molto celebre, è detta **Zeta di Riemann** ed è denotata con:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Elenchiamo senza dimostrazione alcune delle principali proprietà di  $\zeta(s)$ .

**Teorema 21.2.**  $\zeta(s)$  si estende ad una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  che ha un'unica singolarità (semplice) in  $s = 1$ .

Enunciamo poi un famoso teorema che lega la funzione zeta ai numeri primi.

**Teorema 21.3** (Eulero). Per  $\Re(s) > 1$  vale la seguente uguaglianza:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Osservando che i termini della produttoria non sono mai nulli in  $\Re(s) > 1$ , utilizzando i risultati sui prodotti infiniti, segue il prossimo corollario.

**Corollario 21.4.**  $\zeta(s)$  non si annulla in  $\Re(s) > 1$ .

Cosa possiamo dire degli altri zeri? Vale la seguente importante **equazione funzionale**:

**Teorema 21.5.**

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(1-s). \tag{21.1}$$

Utilizziamo l'equazione funzionale per ottenere informazioni sugli zeri di  $\zeta(s)$  nel semipiano  $\Re(s) < 0$ . Per il Corollario 21.4 capiamo che  $\zeta(1-s)$  non ha zeri in  $\Re(s) < 0$ ; sappiamo poi che la funzione  $\Gamma$  non si annulla mai e che  $\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)$  si annulla in  $s \in -2\mathbb{N}$ . Capiamo allora che per  $\Re(s) < 0$  gli unici zeri di  $\zeta(s)$  sono in  $-2\mathbb{N}^*$ ; questi sono detti *gli zeri banali di  $\zeta(s)$* . Riassumendo:

**Teorema 21.6** (zeri banali). Gli zeri di  $\zeta(s)$  fuori dalla striscia  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  sono quelli in  $-2\mathbb{N}^*$ .

La striscia  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  è detta *striscia critica*. Quella che segue è una delle congetture più famose in matematica e riguarda gli zeri non banali della Zeta di Riemann. È ormai aperta da circa 150 anni.

**Congettura.** (Ipotesi di Riemann) Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  è uno zero di  $\zeta(s)$  e  $0 \leq \Re(z_0) \leq 1$ , allora  $\Re(z_0) = \frac{1}{2}$ .

La validità dell'ipotesi di Riemann avrebbe varie conseguenze, fra le quali un risultato molto preciso sulla distribuzione dei numeri primi. Diamo una definizione:

Se  $x \in \mathbb{R}, x > 0$ , indichiamo con  $\pi(x)$  il numero di primi minori o uguali a  $x$ .

Come già accennato, l'ipotesi di Riemann implica informazioni molto precise su  $\pi(x)$ . Ad ogni modo, con i metodi di questo corso, è possibile dimostrare il seguente risultato.

Ricordiamo che  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

---

<sup>14</sup> $|n^{-s}| = |e^{-s \text{Log} n}| = |e^{-\sigma \text{Log} n}| = n^{-\sigma}$ .

**Teorema 21.7** (Teorema dei numeri primi).  $\pi(x) \sim x/\log(x)$

Cruciale per la dimostrazione del Teorema dei numeri primi è la seguente informazione:

**Teorema 21.8.** La funzione  $\zeta(s)$  non ha zeri sulla retta  $\Re s = 1$ .