

# Lezioni di Variabile Complessa

a.a. 2021-2022. Corso del prof. Paolo Piazza

Note a cura di

- Daniele Arbore
- Alessandra Vita
- Luigi De Filpo
- William Riccardo Duro
- Filippo Birindelli
- Giacomo Landi
- Valerio Ricciardi
- Leonardo Felicetti
- Carmine Imbriani
- Silvia Gangeri
- Marco Picerni
- Lucrezia Beatrice Lorenzi
- Federico Renzi
- Sara Rinaldi
- Giulio De Santis
- Domenico Marino
- Andrea Cesari

# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami sui numeri complessi</b>	<b>4</b>
1.1	Coordinate Polari . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Funzioni olomorfe</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Teorema di Cauchy-Riemann</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Funzioni analitiche</b>	<b>10</b>
4.1	Richiami: convergenza per serie di funzioni . . . . .	10
4.2	Teorema di Hadamard . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Analiticità e olomorfia</b>	<b>17</b>
5.1	Analiticità e primi risultati . . . . .	17
5.2	Funzione esponenziale . . . . .	18
5.3	Integrazione complessa . . . . .	20
5.4	Formula locale di Cauchy . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Verso la Formula di Cauchy</b>	<b>24</b>
6.1	Disuguaglianza di Cauchy . . . . .	24
6.2	Formula di Cauchy . . . . .	24
6.3	Appendice ed Esercizi . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Verso la Formula di Cauchy Globale</b>	<b>28</b>
7.1	Risultati di regolarità . . . . .	28
7.2	Teorema di Cauchy globale . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Teorema dell'applicazione aperta</b>	<b>33</b>
<b>9</b>	<b>Omologia ed indice di allacciamento</b>	<b>35</b>
<b>10</b>	<b>Singolarità isolate e residui</b>	<b>39</b>
<b>11</b>	<b>Applicazioni del Teorema dei Residui</b>	<b>44</b>
<b>12</b>	<b>Funzioni meromorfe, successioni di funzioni e teorema di Runge</b>	<b>47</b>
12.1	Funzioni Meromorfe . . . . .	47
12.2	Successioni di funzioni olomorfe: teorema di Weierstrass . . . . .	49
12.3	Teorema di Runge . . . . .	51
<b>13</b>	<b>Mappe conformi e bi-olomorfismi</b>	<b>53</b>
13.1	Mappe conformi . . . . .	53
13.2	Bi-olomorfismi . . . . .	54
13.3	Automorfismi di $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$ . . . . .	55
<b>14</b>	<b>Teorema della mappa di Riemann</b>	<b>59</b>
14.1	Teorema di Ascoli-Arzelà e Montel . . . . .	59
14.2	Teorema della mappa di Riemann . . . . .	60
<b>15</b>	<b>Caratterizzazione dei domini semplicemente connessi</b>	<b>63</b>
15.1	Sfera di Riemann . . . . .	63
15.2	Funzioni armoniche . . . . .	64
15.3	Teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi . . . . .	65
<b>16</b>	<b>Introduzione alle superfici di Riemann</b>	<b>67</b>
16.1	Definizioni di base e primi esempi . . . . .	67
16.2	Tori . . . . .	68
16.3	Mappe olomorfe su superfici di Riemann . . . . .	69
16.4	Classi di isomorfismo di tori . . . . .	72

<b>17</b>	<b>Prodotti infiniti</b>	<b>75</b>
<b>18</b>	<b>Teorema di fattorizzazione di Weierstrass e Teorema di Mittag-Leffler</b>	<b>80</b>
18.1	Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per funzioni intere . . . . .	80
18.2	La funzione $\sigma$ di Weierstrass . . . . .	81
18.3	Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass in domini generali . . . . .	82
18.4	Il Teorema di Mittag-Leffler . . . . .	82
18.5	La funzione $\wp$ di Weierstrass . . . . .	83
<b>19</b>	<b>La funzione gamma</b>	<b>85</b>
19.1	La funzione $\Gamma(s)$ in $\mathbb{C}$ . . . . .	85
19.2	Fattorizzazione di $\frac{1}{\Gamma(s)}$ . . . . .	87
<b>20</b>	<b>La funzione zeta di Riemann</b>	<b>89</b>
<b>21</b>	<b>Il teorema dei numeri primi</b>	<b>93</b>
21.1	La retta $\Re(s) = 1$ . . . . .	93
21.2	Andamento di $\zeta(s)$ vicino a $\Re(s) = 1$ . . . . .	94
21.3	Riduzione del problema alla funzione $\psi_1$ . . . . .	94
21.4	Dimostrazione di $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ . . . . .	95
<b>22</b>	<b>Il teorema dei numeri primi (continuazione)</b>	<b>98</b>
22.1	Stime di $\zeta(s)$ in prossimità di $\Re s = 1$ . . . . .	98
22.2	Il teorema dei numeri primi: fine della dimostrazione . . . . .	100
22.3	Appendice: un raffinamento delle stime vicino a $\Re s = 1$ . . . . .	102

# 1. Richiami sui numeri complessi

Iniziamo subito col definire una struttura di campo in  $\mathbb{R}^2$ . Introduciamo le operazioni di somma e prodotto

$$\begin{aligned} +: & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \\ \cdot: & (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \end{aligned} \quad (1.1)$$

e definiamo i rispettivi elementi neutri come  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . Infine, definiamo l'inverso di  $(a, b) \neq (0, 0)$  nel seguente modo:

$$(a, b)^{-1} = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad (1.2)$$

$\mathbb{R}^2$ , dotato di queste due operazioni, è denotato con il simbolo  $\mathbb{C}$  ed è un campo, il campo dei numeri complessi. La verifica che  $\mathbb{C}$  è un campo è elementare e lasciata per esercizio.

Consideriamo ora la coppia  $(0, 1)$  e identifichiamola con la lettera  $i$ ; notiamo subito che

$$i(b, 0) = (0, 1) \cdot (b, 0) = (0, b)$$

quindi è lecita la scrittura

$$(a, b) = (a, 0) + i(b, 0) \quad (1.3)$$

ed essendo  $\mathbb{R} \ni x \longleftrightarrow (x, 0) \in \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$  un'identificazione tra il campo dei reali ed un sottocampo di  $\mathbb{C}$ , è ben definita l'usuale scrittura

$$(a, b) = a + ib \quad (1.4)$$

Dalla definizione di prodotto e da come abbiamo definito  $i$  si ha subito che  $i^2 = (-1, 0) = -1$ . È immediato che le due operazioni in  $\mathbb{C}$  possono essere svolte operando formalmente con la scrittura  $a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , utilizzando le operazioni in  $\mathbb{R}$  e tenendo conto che  $i^2 = -1$

Posto  $z = a + ib$ , definiamo *parte reale* e *parte immaginaria* di  $z$  le immagini di  $z$  tramite le funzioni  $\Re(\cdot)$  e  $\Im(\cdot)$  dove

$$\begin{aligned} \Re: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}, & \Im: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ z = a + ib &\mapsto a & z = a + ib &\mapsto b \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\bar{z}$  il *coniugato* di  $z$  definito come  $\bar{z} = a - ib$  e notiamo subito che gode della proprietà involutiva:  $\bar{\bar{z}} = z \forall z \in \mathbb{C}$ . Il coniugio è additivo e moltiplicativo, pertanto

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si ha inoltre  $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$  ed è quindi ben definito  $|z| := \sqrt{z\bar{z}} \equiv \sqrt{a^2 + b^2}$ . Notiamo infine che

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Definiamo ora una struttura di spazio metrico in  $\mathbb{C}$ ; prendiamo come distanza tra due numeri complessi il modulo della differenza

$$d_{\mathbb{C}}(z, w) = |z - w| \quad (1.6)$$

Notiamo subito che  $(\mathbb{C}, d_{\mathbb{C}}(\cdot, \cdot))$  è uno spazio metrico, isometrico a  $(\mathbb{R}^2, d_2(\cdot, \cdot))$ , e ciò garantisce che in  $\mathbb{C}$  rimangono ben definite tutte le nozioni inerenti gli spazi metrici (quali la convergenza, ma non solo) già viste nei corsi di *Analisi I* e *Analisi II*.

Vediamo ora alcune importanti disuguaglianze.

$\forall z, w \in \mathbb{C}$  si ha:

1.  $|\Re(z)| \leq |z|, |\Im(z)| \leq |z|$
2.  $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
3.  $|z| - |w| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

**Osservazione 1.1.** Dalle prime due disuguaglianze capiamo che una successione  $\{z_n\}$  converge a  $z$  se e solo se  $\{\Re(z_n)\}$  e  $\{\Im(z_n)\}$  convergono a  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$  rispettivamente.

## 1.1. Coordinate Polari

Introduciamo le coordinate polari per  $z \neq 0$ .

**Definizione 1.2.** L'*argomento principale* di  $z$  è una funzione  $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$  tale che

$$\begin{aligned}\cos(\text{Arg}(z)) &= \frac{\Re(z)}{|z|} \\ \sin(\text{Arg}(z)) &= \frac{\Im(z)}{|z|}\end{aligned}\tag{1.7}$$

La definizione è ben posta dato che la somma dei quadrati dei membri a destra dell'uguaglianza è uguale a 1.

Siamo dunque pronti a scrivere un numero complesso nella sua forma polare nel seguente modo:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)\tag{1.8}$$

dove chiaramente abbiamo posto  $\theta = \text{Arg}(z)$ .

La funzione *argomento* di  $z$  viene definita come

$$\text{arg}(z) = \text{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\tag{1.9}$$

Dalle già note formule trigonometriche ricaviamo che

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))\tag{1.10}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|} (\cos \theta - i \sin \theta)\tag{1.11}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\tag{1.12}$$

da cui segue l'espressione fondamentale

$$\boxed{z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))}\tag{1.13}$$

Quest'ultima ci consente di scrivere tutte le soluzioni <sup>1</sup> dell'equazione

$$z^n = w, \quad \text{con } w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi)\tag{1.14}$$

Queste sono:

$$z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{n}} \left[ \cos \left( \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0 : n-1\tag{1.15}$$

Dalla loro espressione si evince che sono tutte giacenti sulla circonferenza di centro 0 e raggio  $\sqrt[n]{|w|}$ , disposte in modo da occupare i vertici di un  $n$ -agono regolare.

---

<sup>1</sup>il *Teorema fondamentale dell'algebra* ci assicura che ce ne sono precisamente  $n$ , contando molteplicità

## 2. Funzioni olomorfe

Iniziamo con un paio di definizioni preliminari.

**Definizione 2.1** (Dominio).  $E$  è un dominio di  $\mathbb{C}$  se e solo se  $E$  è un aperto connesso di  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 2.2** (Derivata). Sia  $E$  un dominio di  $\mathbb{C}$ ,  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  funzione complessa di variabile complessa,  $z_0 \in E$ . Allora  $f$  si dice derivabile (in senso complesso) in  $z_0$  se esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C} \quad (2.1)$$

In tal caso  $f'(z_0)$  si dice *derivata complessa* di  $f$  in  $z_0$ .

**Definizione 2.3** (o-piccolo). Diremo che una funzione  $\phi(x)$  è  $o(\psi(x))$  se e soltanto se la funzione  $\psi$  tende a 0 più velocemente di  $\phi$ , ossia

$$\phi(x) = o(\psi(x)) \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\psi(x)}{\phi(x)} = 0 \quad (2.2)$$

**Proposizione 2.4.**  $f$  derivabile in  $z_0 \implies$

- (i)  $f$  è continua in  $z_0$
- (ii) detta  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione vettoriale  $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$  corrispondente a  $f$ , allora  $F$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.*

- (i)  $f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$  passando al limite per  $z \rightarrow z_0$  si ha che il LHS diventa un prodotto tra un fattore che tende a  $f'(z_0)$  e un altro che tende a 0 quindi tutto quanto tende a 0. Si ottiene quindi  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - f(z_0) = 0$  da cui la tesi.
- (ii) l'ipotesi innanzitutto è che esista il limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$  e ciò è equivalente a dire che

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(|h|) \quad (2.3)$$

Osserviamo che la moltiplicazione complessa per un fissato numero complesso  $z$ ,  $\mathbb{C} \ni w \rightarrow zw \in \mathbb{C}$ , definisce un'applicazione che è lineare dallo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^2$  in se stesso (una volta utilizzata l'identificazione di  $\mathbb{C}$  con i vettori colonna di  $\mathbb{R}^2$ ). Più precisamente, se  $z = a + ib$  e  $w = c + id$  allora

$$zw = (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

il che mostra anche che la matrice associata alla moltiplicazione per  $z$  è di una forma molto speciale. Ponendo  $h = \alpha + i\beta$ ,  $f'(z_0) = a + ib$  si ottiene quindi

$$F(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \quad (2.5)$$

che, per definizione, ci dice che  $F$  è differenziabile e la Jacobiana di  $F$  in  $(x_0, y_0)$  vale proprio

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

□

**Definizione 2.5.** Sia  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione complessa di variabile complessa su un aperto  $E \subset \mathbb{C}$ ; diremo che  $f$  è *olomorfa* in  $E$  se è derivabile in ogni punto di  $E$ . Diremo inoltre che  $f$  è olomorfa in un insieme, non necessariamente aperto,  $F \subset \mathbb{C}$  se esiste un insieme  $E$  aperto tale che  $F \subset E$  e una funzione  $f_E$  olomorfa in  $E$  che estende  $f$ . Una funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$  viene detta *intera*.

**Proposizione 2.6.** Siano  $f_1, f_2$  funzioni olomorfe in  $E$ , allora

- $f = f_1 + f_2$  è una funzione olomorfa e  $f' = f_1' + f_2'$
- $f = f_1 \cdot f_2$  è una funzione olomorfa e  $f' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$
- $f = \frac{f_1}{f_2}$ , con  $f_2(z) \neq 0 \forall z \in E$ , è una funzione olomorfa e  $f' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}$
- la composizione di funzione olomorfe è olomorfa

La dimostrazione della Proposizione è lasciata per esercizio al lettore.

**Esempio 2.7.** (Esempi e non-esempi di funzioni olomorfe)

1.  $f(z) = k$ , la funzione costante è chiaramente intera  $\mathbb{C}$  e  $f'$  identicamente nulla.
2.  $f(z) = z$ , l'identità è una funzione intera e vale  $f'(z) = 1$ .
3.  $f(z) = z^n$  è una funzione intera e si ha  $f'(z) = nz^{n-1}$ .
4.  $f(z) = \Re(z)$  non è olomorfa in nessun aperto di  $\mathbb{C}$ .
5.  $\text{Arg}(z)$  non è olomorfa.

*Dimostrazione.* (1) e (2) sono lasciate per esercizio.

(3) è sufficiente notare che  $\forall z_0 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_1 z_0^{n-2} + z_0^{n-1})}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} z_0^j = \sum_{j=0}^{n-1} z_0^{n-1} = nz_0^{n-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

da cui la tesi.

(4) è sufficiente osservare che se tale limite esistesse allora

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{\Im(z) \rightarrow \Im(z_0) \\ \Re(z) = \Re(z_0)}} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} = 0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\substack{\Re(z) \rightarrow \Re(z_0) \\ \Im(z) = \Im(z_0)}} \frac{\Re(z) - \Re(z_0)}{z - z_0} = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

il che non può essere.

(5) Non può essere olomorfa in quanto c'è una discontinuità non eliminabile sull'insieme

$$A = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}^-\}$$

ma anche ridefinendo la funzione  $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow (-\pi, \pi]$  non sarebbe comunque olomorfa poiché

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\text{Arg}(tz_0) - \text{Arg}(z_0)}{tz_0 - z_0} = 0 \quad (2.9)$$

in quanto il numeratore è costante 0. Allo stesso tempo, ponendo  $z_0 = \rho e^{i\theta}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\text{Arg}(z) - \text{Arg}(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{\text{Arg}(\rho e^{i\phi}) - \text{Arg}(\rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\phi} - \rho e^{i\theta}} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{\phi - \theta}{\rho(\cos \phi - \cos \theta + i(\sin \phi - \sin \theta))} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow \theta} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\cos \phi - \cos \theta}{\phi - \theta} + i \frac{\sin \phi - \sin \theta}{\phi - \theta} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho} (-\sin \theta + i \cos \theta)^{-1} = -\frac{i}{z_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

che è chiaramente un valore diverso da 0. □

### 3. Teorema di Cauchy-Riemann

**Teorema 3.1** (Cauchy-Riemann). Siano  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a valori complessi. Allora  $f$  è derivabile in  $z_0 \in E$  se e solo se

- (i) le funzioni  $u(x, y) = \Re(f)$ ,  $v(x, y) = \Im(f)$  sono differenziabili in  $z_0 = (x_0, y_0)$
- (ii) valgono le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (3.1)$$

Inoltre

$$J_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

*Dimostrazione.*

- (i) Le due funzioni  $u$  e  $v$  sono differenziabili in  $(x_0, y_0)$  perché  $F = (u, v)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .
- (ii) Verifichiamo che valgono le equazioni di Cauchy-Riemann ( $h = \alpha + i\beta$ )

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0, y_0) - v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] \quad (3.3)$$

Per ipotesi  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  tali che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = a + ib \quad (3.4)$$

E analizzando i casi in cui  $h \rightarrow 0$  lungo gli assi, si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ h = \alpha}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \\ \lim_{\substack{\beta \rightarrow 0 \\ h = i\beta}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{i}(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

da cui

$$\boxed{\begin{aligned} a &= u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ b &= v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

ossia la tesi.

Dimostriamo l'altra implicazione. Per l'ipotesi (i):

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + v_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Applicando (3.1):

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= -v_y(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + u_x(x_0, y_0)\beta + o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Segue:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + (\alpha + i\beta)) - f(z_0)}{\alpha + i\beta} &= \\ &= \frac{u_x(x_0, y_0)(\alpha + i\beta) + iv_x(x_0, y_0)(\alpha + i\beta)}{\alpha + i\beta} + \frac{o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} + \frac{io(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} = \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{o(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} + \frac{io(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha + i\beta} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per definizione di  $o$  ( $o$ -piccolo) (2.3), segue la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.2.** Forme equivalenti alle equazioni di Cauchy-Riemann (3.1)

(i)

$$\boxed{f_x(x_0, y_0) + if_y(x_0, y_0) = 0} \quad (3.9)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + i(u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)) &= \\ (u_x(x_0, y_0) - v_y(x_0, y_0) + i(v_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0))) &= 0 \end{aligned}$$

il che equivale alle due condizioni:

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann.

(ii) Introducendo gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

possiamo scrivere un'altra forma equivalente a (3.1):

$$\boxed{\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right)(x_0, y_0) = 0} \quad (3.10)$$

In tal caso  $f'(z_0) = \left( \frac{\partial}{\partial z} f \right)(z_0)$ .

**Proposizione 3.3** (Semplici conseguenze delle equazioni di Cauchy-Riemann).

1. Se  $f$  è olomorfa su un dominio complesso e la sua derivata è identicamente nulla, allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Con le notazioni usate finora, si ha per ipotesi che

$$(f(z))' = (f(x + iy))' = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_y(x, y) + iv_y(x, y) = 0$$

da cui, applicando le equazioni di Cauchy-Riemann, segue che i gradienti  $\nabla u = (u_x, u_y)$  e  $\nabla v = (v_x, v_y)$  sono identicamente nulli sul dominio di olomorfia di  $f$ . Questo implica che  $u$  e  $v$  sono costanti, e quindi anche  $f = u + iv$  è costante.  $\square$

## 4. Funzioni analitiche

### 4.1. Richiami: convergenza per serie di funzioni

**Definizione 4.1** (Convergenza per serie di funzioni). La serie di funzioni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z) \quad f_k: E \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

identificata con la successione delle somme parziali

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

converge:

- (i) *puntualmente* se per ogni  $z_0 \in E$  converge la serie numerica  $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k(z_0)$
- (ii) *assolutamente* se per ogni  $z_0 \in E$  converge la serie dei valori assoluti  $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(z_0)|$
- (iii) *uniformemente* se converge uniformemente la successione (4.2)

i.e. se esiste  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - s_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{z \in E} |f(z) - s_n(z)| \right] = 0$$

- (iv) *totalmente* se converge la serie numerica  $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty}$  dove

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{z \in E} |f(z)| \quad f: E \rightarrow \mathbb{C}$$

**Osservazione 4.2.** Sono ben note le seguenti implicazioni per le nozioni di convergenza:

$$\text{totale} \implies \text{uniforme} \implies \text{puntuale}; \quad \text{totale} \implies \text{assoluta} \implies \text{puntuale}.$$

### 4.2. Teorema di Hadamard

**Teorema 4.3.** (Hadamard) Data la serie di potenze centrata in  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.3)$$

definiamo

$$\lambda := \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty]$$

e  $R := \frac{1}{\lambda} \in [0, +\infty]$  come reciproco in senso esteso di  $\lambda$ . Allora la serie (4.3):

- (i) converge assolutamente (e quindi semplicemente) per ogni  $z \in B(z_0, R)$
- (ii) converge totalmente (e quindi uniformemente) in  $\overline{B(z_0, \rho)}$ ,  $\forall \rho < R$
- (iii) non converge se  $|z - z_0| > R$ .

Inoltre la funzione somma della serie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad z \in B_R(z_0) \quad (4.4)$$

è olomorfa e la sua derivata è

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} \quad z \in B_R(z_0) \quad (4.5)$$

Premettiamo alla dimostrazione una definizione e alcuni risultati utili:

**Definizione 4.4.** (Massimo e minimo limite di una successione in  $\mathbb{R}$ )

Sia  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione in  $\mathbb{R}$ .

Se  $a_k$  non è limitata superiormente, allora

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} = +\infty.$$

Altrimenti, sia

$$\mathcal{M} := \{M \in \mathbb{R} \mid \exists \nu \in \mathbb{N}: M \geq a_k \quad \forall k \geq \nu\}$$

allora

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k = \inf(\mathcal{M}).$$

Analogamente si definisce  $\liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k$ .

**Osservazione 4.5.** (dal Giusti) Valgono le seguenti caratterizzazioni del massimo e minimo limite:

- $\limsup a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} a_k)$
- $\liminf a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} a_k)$
- Il massimo (minimo) limite della successione  $a_k$  è l'estremo superiore (inferiore) dell'insieme dei punti di aderenza della successione, cioè i limiti delle sue sottosuccessioni.

**Proposizione 4.6.** (Risultati)

1. La successione reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge se e solo se  $\limsup_{k \in \mathbb{N}} a_k = \liminf_{k \in \mathbb{N}} a_k$
2. Data  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , è sempre possibile estrarre una sottosuccessione  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  che converge a  $\limsup a_n$ .

**Proposizione 4.7.** (Criterio della radice) Data la serie reale a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \quad a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Sia

$$L := \limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

Se  $L < 1$ , allora la serie converge.

*Dimostrazione.* (del teorema di Hadamard (4.3)) Assumiamo, senza perdita di generalità, che la serie (4.3) sia centrata in  $z_0 = 0$ . Quindi consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad z \in \mathbb{C} \tag{4.6}$$

(i) Sia  $R \in (0, +\infty)$ ,  $z \in B_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ . Visto che

$$\sqrt[k]{|a_k||z|^k} = \sqrt[k]{|a_k||z|} < \lambda R = 1$$

per il criterio della radice (4.7) la serie converge assolutamente e quindi semplicemente. Per  $R \in \{0, +\infty\}$  la serie è banalmente convergente poiché identicamente nulla, nel primo caso perché si starebbe assumendo  $z = 0$  e nel secondo perché se  $\lambda = 0$  allora

(iii) Se  $|z| > R$  allora

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k||z|^k} = \lambda|z| > 1 \tag{4.7}$$

il che implica

$$\exists \delta > 0 : \sqrt[k]{|a_k||z|^k} > \delta + 1 \quad \text{per infiniti } k \in \mathbb{N} \tag{4.8}$$

ma vale ciò se e solo se

$$|a_k||z|^k > (\delta + 1)^k \quad \text{per infiniti } k \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

da cui la successione

$$(|a_k z^k|)_{k \in \mathbb{N}}$$

non è infinitesima e quindi la serie corrispondente non converge.

(ii) Sia  $\rho < R$  e  $|z| < \rho$ . Allora

$$|a_k||z|^k \leq |a_k|\rho^k$$

ma

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \lambda\rho < \lambda R = 1$$

Quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|\rho^k$$

è convergente, da cui segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

è totalmente convergente.

Rimangono da dimostrare l'olomorfia della funzione somma della serie (4.4) in  $B_R(0)$  e la validità della formula per il calcolo della derivata (termine a termine).

Iniziamo dalla seconda. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} \tag{4.10}$$

Vogliamo vedere che anche lei converge in  $B_R(0)$ .

**Osservazione 4.8.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Infatti ciò è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n-1} = 0$$

che è ben noto.

Sappiamo che  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ ; supponiamo che  $\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ . La Proposizione che segue implica allora che

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \alpha \tag{4.11}$$

**Proposizione 4.9.** Siano  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  successioni reali a termini positivi, con

$$a := \limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \text{e} \quad b := \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n > 0$$

Allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = ab$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione (4.6), esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  di  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$$

Quindi, visto che tutte le sottosuccessioni estratte da una successione convergente sono ancora convergenti al limite della successione, vale

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} a_{n_k} = ba$$

Da cui deduciamo che

$$l := \limsup_{n \in \mathbb{N}} b_n a_n \geq ba$$

Se per assurdo si avesse  $l > ba$ , allora esisterebbe una sottosuccessione  $(a_{n_j} b_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergente al limite  $l$ , quindi si avrebbe

$$a \longleftarrow_{j \rightarrow +\infty} a_{n_j} = \frac{a_{n_j} b_{n_j}}{b_{n_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} \frac{l}{b} > a$$

Cioè la sottosuccessione  $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergerebbe a un limite strettamente maggiore del massimo limite della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il che è assurdo.  $\square$

Ora vogliamo dimostrare che

**Esercizio 4.10.**

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

(Per non fare spoiler, riportiamo la dimostrazione nel prossimo capitolo, dedicato alla Lezione 3.)

Segue che

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \frac{1}{R}$$

e quindi la serie delle derivate (4.10) converge in  $B_R(0)$ .

Ora dimostriamo che la somma della serie (4.4) è una funzione olomorfa. Definiamo:

$$f(z) = s_n(z) + R_n(z) \quad (4.12)$$

dove

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{e} \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z^k$$

e

$$g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$$

Dimostriamo che per ogni  $w \in B_R(0)$

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = 0 \quad (4.13)$$

Per ogni  $w \in B_R(0)$ , sia  $|w| < r < R$ ,  $|z| < R$

Fissato  $\delta > 0$  tale che  $\overline{B_\delta(0)} \subset B_r(0)$ , consideriamo  $z$  tale che  $|z - w| < \delta$ . Allora possiamo scrivere (ii) come:

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \left[ \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right] + [s'_n(w) - g(w)] + \left[ \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right] \quad (4.14)$$

e analizzare un addendo alla volta.

(a) Sappiamo che se  $|z - w| < \delta'$  si ha

$$\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) < \varepsilon \quad (4.15)$$

Scegliendo come  $\delta$  iniziale il valore di questo  $\delta'$  mandiamo il primo addendo a 0.

(b) Sapendo che, per l'equazione (2.7), si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n(w) = g(w)$$

ossia

$$|s'_n(w) - g(w)| < \varepsilon \quad \text{per } n \geq N_1$$

(c) In modulo si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| k R^{k-1} < \varepsilon \quad \text{per } n \geq N_2$$

Questo segue dal fatto che la serie derivata converge.

Quindi basta scegliere  $n \geq N_1 + N_2$  per mandare tutti e tre gli addendi a 0, ottenendo

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < 3\varepsilon$$

da cui la tesi.

□

**Proposizione 4.11.** Sia  $\sum a_n(z - z_0)^n$  con raggio di convergenza  $R \in [0, +\infty]$ . Allora

$$\exists l \in \mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = l \implies l = R \quad (4.16)$$

**Esempio 4.12.** Data la serie  $\sum \frac{1}{k!} z^k$ , è chiaro che  $\left| \frac{1/k!}{1/(k+1)!} \right| = k + 1 \implies R = +\infty$ .

Infatti la funzione somma  $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k$  è olomorfa su tutto il piano complesso i.e. intera e la sua derivata si calcola come segue:

$$(e^z)' = \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} z^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(k-1)!} z^{k-1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{k!} z^k \right) = e^z$$

**Proposizione 4.13.** (Formula: prodotto di esponenziali)

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Da cui segue che

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

*Dimostrazione.* Sia  $g(z) = e^{a-z} e^z$  funzione intera. Allora la sua derivata

$$g'(z) = -e^{a-z} e^z + e^z e^{a-z} = 0$$

è identicamente nulla e quindi  $g$  è costantemente uguale a  $g(0) = e^a$ .

Quindi  $e^z e^{a-z} = e^a$  per ogni  $a \in \mathbb{C}$  fissato, da cui la tesi. □

**Esercizio 4.14.** (Formula di Eulero:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ )

*Suggerimento:* sostituire  $z = i\theta$  nella serie che definisce la funzione esponenziale e riorganizzare (che non crea problemi per la convergenza assoluta della serie).

**Esercizio 4.15.** Dimostrare l'implicazione (4.7)  $\implies$  (4.8) ossia

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} = \lambda |z| > 1 \implies \exists \delta > 0: \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} > \delta + 1 \quad \text{per infiniti } k \in \mathbb{N}$$

*Dimostrazione.* Per la proposizione (4.6), esiste una sottosuccessione di

$$\left( \sqrt[k]{|a_k| |z|^k} \right)_{k \in \mathbb{N}} \quad (4.17)$$

che converge al massimo limite della successione e, per il teorema della permanenza del segno, se il massimo limite è maggiore di 1 allora la sottosuccessione convergente ad esso è definitivamente maggiore di 1, da cui la tesi. □

## Appendice ed esercizi

**Proposizione 4.16.** (Svolgimento dell'esercizio (4.10))

*Dimostrazione.* Sia  $R' := \limsup_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{|a_n|}$ .

Vogliamo dimostrare che  $R' = R$  usando le due disuguaglianze.

Per definizione,  $R'$  è il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} z^k$$

Osserviamo che

$$z \left( \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+1} z^k \right) + a_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

e analogamente

$$|z| \left( \sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}| |z|^k \right) + |a_0| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |z|^k \quad (4.18)$$

Se  $|z| < R'$ , chiaramente da (4.18) c'è convergenza a sinistra, quindi anche a destra, e quindi  $R' \leq R$ . D'altra parte, se  $0 < |z| < R$  allora possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{k+1}| |z|^k = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| |z|^k}{|z|} - \frac{|a_0|}{|z|}$$

Essendo convergente il membro destro lo è anche il membro sinistro, quindi possiamo concludere che  $R \leq R'$ . da cui la tesi.  $\square$

Il Teorema di Hadamard afferma che se la serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

ha raggio di convergenza  $R$ , allora  $f: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa e la sua derivata è

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

Più in generale,  $f$  è derivabile  $k$  volte (con continuità) e

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

cioè  $f$  è di classe  $C^\infty$ .

**Osservazione 4.17.** Ogni serie di potenze (4.2) è la serie di Taylor della funzione che definisce, infatti

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Definizione 4.18** (Funzione analitica). Una funzione si dice *analitica* se è localmente sviluppabile in serie di potenze. Più precisamente:

Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto. Allora  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  si dice *analitica* se

$$\forall z_0 \in E \quad \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, R \in (0, +\infty] \text{ tali che } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) \cap E$$

**Proposizione 4.19.** Somme e prodotti di funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche.

## Risoluzione esercizi del foglio 1

**Esercizio 4.3.**  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^{20} = (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^{20} = \cos 5\pi + i \sin 5\pi = -1$

**Esercizio 4.4.**  $(z+1)^3 = 2+2i$ ,  $w := z+1$   $w^3 = 2+2i$   
 $|2+2i| = 2^{3/2}$   $\cos(\theta) = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$   $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$2+2i = 2^{3/2}[\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})]$$

$$w_1 = (2^{3/2})^{1/3}[\cos(\frac{\pi}{4}/3) + i \sin(\frac{\pi}{4}/3)] = \sqrt{2}[\cos(\frac{\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{12})]$$

$$w_2 = (2^{3/2})^{1/3}[\cos((\frac{\pi}{4}+2\pi)/3) + i \sin((\frac{\pi}{4}+2\pi)/3)] = \sqrt{2}[\cos(\frac{3}{4}\pi) + i \sin(\frac{3}{4}\pi)]$$

$$w_3 = (2^{3/2})^{1/3}[\cos((\frac{\pi}{4}+4\pi)/3) + i \sin((\frac{\pi}{4}+4\pi)/3)] = \sqrt{2}[\cos(\frac{17}{12}\pi) + i \sin(\frac{17}{12}\pi)]$$

**Esercizio 4.5.**

(i)  $\{z \in \mathbb{C} : |z+4-i| = 2\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-4+i)| = 2\} = \partial B_2((-4, 1))$

(ii)  $\{z \in \mathbb{C} : |z+4-i| \leq 2\} = \{z \in \mathbb{C} : |z - (-4+i)| \leq 2\} = B_2((-4, 1))$

(iii)  $\{z \in \mathbb{C} : |z - (-2-2i)| + || = 3\sqrt{2}\}$  è l'ellisse di fuochi  $(-2, -2)$  e  $(-1, -1)$  passante per  $(0, 0)$

(iv)  $\{z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(z) = 3\}$  è la parabola di

**Esercizio 4.6.**

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \iff x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 5. Analiticità e olomorfia

### 5.1. Analiticità e primi risultati

Si richiama la definizione di funzione analitica

**Definizione 5.1.** Sia  $E$  un aperto e  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica se  $\forall z_0 \in E \exists \{a_n\} \subset \mathbb{C}$  e  $R \in (0, +\infty]$  tali che

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_R(z_0) \cap E.$$

Una funzione è analitica in un insieme se può essere espressa, almeno localmente, come somma di una serie di potenze. È naturale chiedersi quindi se somme e prodotti di funzioni analitiche sono ancora analitiche.

**Proposizione 5.2.** Date due funzioni analitiche in un aperto  $E \subseteq \mathbb{C}$ , somme e prodotti di tali funzioni sono analitiche in tale aperto.

L'asserzione riguardante la somma è triviale, mentre quella riguardante il prodotto è più sottile. Si può dimostrare tale risultato facendo qualche osservazione riguardo al prodotto di convoluzione di Cauchy per le serie.

**Definizione 5.3** (Prodotto di Cauchy). Siano  $\sum^\infty \alpha_n$  e  $\sum^\infty \beta_n$  due serie. Il risultato del prodotto di Cauchy è la serie  $\sum^\infty \gamma_n$  dove

$$\gamma_n := \alpha_n \beta_0 + \alpha_{n-1} \beta_1 + \dots + \alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_0 \beta_n.$$

**Proposizione 5.4.** Se  $\sum^\infty \alpha_n$  e  $\sum^\infty \beta_n$  sono due serie assolutamente convergenti, allora  $\sum^\infty \gamma_n$  è assolutamente convergente e il valore di tale serie è il prodotto dei valori delle due serie iniziali.

*Dimostrazione.* Si riorganizzano i termini della serie di  $\gamma$  nel seguente modo

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_0 \beta_0 & \alpha_0 \beta_1 & \alpha_0 \beta_2 & \dots & \alpha_0 \beta_n & \dots & \\ \alpha_1 \beta_0 & \alpha_1 \beta_1 & \alpha_1 \beta_2 & \dots & \alpha_1 \beta_n & \dots & \\ \alpha_2 \beta_0 & \alpha_2 \beta_1 & & & \alpha_2 \beta_n & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ \alpha_n \beta_0 & \alpha_n \beta_1 & \alpha_n \beta_2 & \dots & \alpha_n \beta_n & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \ddots \end{array}$$

I coefficienti  $\gamma_n$  sono la somma delle diagonali non principali di questa matrice infinita. Si può quindi fare la seguente stima

$$\sum_{k=0}^n |\gamma_k| = \sum_{k=0}^n \left| \sum_{i=0}^k \alpha_i \beta_{k-i} \right| \leq \sum_{k=0}^n \left( \sum_{i=0}^k |\alpha_i \beta_{k-i}| \right) \leq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |\alpha_i \beta_j|.$$

Possiamo stimare quindi la somma dei moduli delle diagonali con la somma dei moduli degli elementi sulle diagonali, e ancora possiamo maggiorarlo con la somma dei moduli degli elementi del quadrato costruito come nella tabella sopra. Ma la somma dei moduli degli elementi del quadrato è il prodotto di due serie troncate. Mandando tutto al limite si ottiene l'assoluta convergenza.

Ora, dimostrata l'assoluta convergenza, si vuole dimostrare che

$$|S_{2n}^\gamma - S_n^\alpha S_n^\beta| \rightarrow 0.$$

Graficamente questa differenza si può rappresentare come i due triangoli nel seguente grafico

$$\begin{array}{cccccccc}
\alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_1 & \alpha_0\beta_2 & \dots & \alpha_0\beta_n & \alpha_0\beta_{n+1} & \dots & \alpha_0\beta_{2n} & \dots \\
\alpha_1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \dots & \alpha_1\beta_n & & \dots & \alpha_1\beta_{2n-1} & \dots \\
\alpha_2\beta_0 & \alpha_2\beta_1 & & & \alpha_2\beta_n & & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1}\beta_{n+1} & & & \\
\alpha_n\beta_0 & \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \dots & \alpha_n\beta_n & & & & \\
\alpha_{n+1}\beta_0 & & & \alpha_{n+1}\beta_{n-1} & & \ddots & & & \\
& \vdots & & & & & & & \\
& & \alpha_{2n-1}\beta_1 & & & & & & \\
\alpha_{2n}\beta_0 & & & & & & & & \\
& \vdots & & & & & & & \\
& & & & & & & & 
\end{array}$$

Nel grafico, il grande triangolo rappresenta  $S_{2n}^\gamma$ , mentre il quadrato centrale rappresenta  $S_n^\alpha S_n^\beta$ . La differenza quindi è rappresentata dai due triangoli rimanenti, in formule

$$|S_{2n}^\gamma - S_n^\alpha S_n^\beta| \leq \left| \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} \alpha_i \beta_j \right| + \left| \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \alpha_i \beta_j \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_i \beta_j \right| + \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_i \beta_j \right| \rightarrow 0.$$

Segue la tesi. □

Ora si può dimostrare la proposizione

*Dimostrazione.* Siano  $f(z) = \sum a_n z^n$  e  $g(z) = \sum b_n z^n$  con raggi di convergenza  $R_f \geq r$  e  $R_g \geq r$  rispettivamente. Sotto queste ipotesi, per  $z \in B_r(0)$ , si possono trattare le funzioni puntualmente come serie di numeri complessi, e pertanto i risultati di convergenza derivano dal lemma precedente. Si ha quindi che le due funzioni analitiche somma e prodotto hanno raggio di convergenza pari al minimo tra i due raggi di convergenza degli addendi o dei fattori. □

A questo punto ad esempio si può ottenere una dimostrazione differente di

$$e^{z+w} = e^z + e^w,$$

infatti a destra si ha

$$\left( \sum \frac{1}{k!} z^k \right) \left( \sum \frac{1}{k!} w^k \right)$$

e svolgendo tale prodotto si ottiene

$$\sum_n^{+\infty} c_n(z),$$

con

$$c_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!} (z+w)^n,$$

da cui segue la tesi.

## 5.2. Funzione esponenziale

Due funzioni complesse interessanti sono l'esponenziale e il logaritmo. La prima funzione è stata definita attraverso la serie di Taylor dell'esponenziale reale, la seconda invece è ancora carente di una definizione. L'obiettivo è vedere il logaritmo complesso come l'inverso dell'esponenziale complesso, ma bisogna stare attenti a come costruire il dominio di definizione di questa funzione inversa. Come prima cosa si osserva una prima proprietà dell'esponenziale.

**Proposizione 5.5.** Vale

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Sia  $z = x + iy$ , si ha

$$1 = e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \iff \begin{cases} e^x \sin y = 0 \\ e^x \cos y = 1 \end{cases},$$

da cui segue la tesi. □

Da questa proprietà dell'esponenziale segue la seguente osservazione

**Osservazione 5.6.**

$$e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Fatta questa osservazione si hanno informazioni sull'iniettività dell'esponenziale, in particolare si ha che

$$\exp : \{z \mid -\pi < \Im z \leq \pi\} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

è una bigezione: è iniettiva per il risultato appena visto ed è suriettiva perché si può sempre scrivere  $w = |w|e^{i\text{Arg}(w)} = \exp(\log(|w|) + i\text{Arg}(w))$ .

Dato che vogliamo definire il logaritmo su un aperto, consideriamo un'altra bigezione, avente un dominio leggermente più ristretto, costruita sulla funzione esponenziale

$$\exp : \{z \mid -\pi < \Im z < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}.$$

**Definizione 5.7.** Il logaritmo principale, denotato  $\text{Log}$  è l'inversa di  $\exp : \{z \mid -\pi < \Im z < \pi\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ :

$$\text{Log} : \mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\} \rightarrow E \subseteq \mathbb{C}.$$

**Proposizione 5.8.**  $\text{Log}$  è una funzione olomorfa e vale

$$\text{Log}'(w) = \frac{1}{w}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione si divide in due parti: la prima in cui si mostra l'olomorfia del logaritmo e la seconda in cui si mostra la formula di sopra.

Per mostrare l'olomorfia si sfrutta il teorema della funzione inversa. Sia  $F(x, y)$  la funzione vettoriale associata a  $f(z) = e^z$ . Tale funzione vettoriale ha Jacobiana non singolare, perché il determinante della matrice Jacobiana, per formule già viste, vale

$$\det(J_F(x, y)) = |f'(z)|^2.$$

Nel caso della funzione esponenziale, la derivata è ancora la funzione esponenziale stessa, e quindi è sempre diversa da 0.

Sia quindi  $G(t, s)$  la funzione vettoriale associata al logaritmo, per il teorema della funzione inversa, se  $G(t, s) = (h, k)$ , valgono le due seguenti uguaglianze

$$J_G(t, s) = J_F(G(t, s))^{-1} = \frac{1}{\det(J_F(G(t, s)))} \begin{pmatrix} u_x(G(t, s)) & -u_y(G(t, s)) \\ u_y(G(t, s)) & u_x(G(t, s)) \end{pmatrix}$$

$$J_G(t, s) = \begin{pmatrix} h_t(t, s) & h_s(t, s) \\ k_t(t, s) & k_s(t, s) \end{pmatrix}$$

Data l'uguaglianza evidenziata sopra, poiché  $e^z$  è una funzione analitica, si deduce che le componenti sono  $C^1$  (in realtà anche  $C^\infty$ !) e di conseguenza valgono le condizioni di Cauchy-Riemann per le componenti del logaritmo, da cui segue che è una funzione olomorfa.

Rimane da dimostrare che

$$\text{Log}'(w_0) = \frac{1}{w_0}.$$

Poniamo  $z_0 = \text{Log}(w_0) \iff e^{z_0} = w_0$ . Si ha

$$\begin{aligned} \text{Log}'(w_0) &= h_t(t_0, s_0) - ih_s(t_0, s_0) = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} (u_x(x_0, y_0) + iu_y(x_0, y_0)) = \\ &= \frac{1}{\overline{f'(z_0)}f'(z_0)} \overline{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{w_0}. \end{aligned}$$

□

**Osservazione 5.9.** Quest'ultima Proposizione si può anche dimostrare direttamente; lo vedremo poi. [Conway].

In molti libri si parla del logaritmo come una funzione multivoca, cioè definibile a meno di una qualche sorta di costante. Infatti, dato  $w \in \mathbb{C}^\times$ , l'equazione

$$e^z = w$$

ha come soluzioni

$$\{\log(|w|) + i(\text{Arg}(w) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \{\text{Log}(w) + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\},$$

e quindi il *vero* inverso dell'esponenziale sarebbe una funzione che a ciascun numero  $w \in \mathbb{C}^\times$  associa un insieme *infinito* di valori descritti completamente a partire dal logaritmo principale aggiungendo multipli di  $2\pi i$ .

Tramite il logaritmo possiamo anche definire altre funzioni multivoche, ad esempio la potenza complessa:

**Definizione 5.10.** Siano  $b \in \mathbb{C}$  e  $z \neq 0$ . Definiamo

$$z^b = \exp(b \log(z))$$

Si osserva che nel caso in cui  $b = \tilde{k} \in \mathbb{Z}$  tale funzione è l'usuale potenza, infatti

$$z^{\tilde{k}} = \exp(\tilde{k} \text{Log}(z) + \tilde{k} 2k\pi i) = \exp(\tilde{k} \text{Log}(z)) = z^{\tilde{k}}.$$

Se  $b \in \mathbb{C}$  invece, allora  $z^b$  può essere un'infinità di numeri complessi.

**Osservazione 5.11.** Come per il logaritmo, si può definire la funzione (univoca) potenza principale:  $z^b = \exp(b \text{Log}(z))$  con dominio  $\mathbb{C} \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ .

### 5.3. Integrazione complessa

L'obiettivo in questa sezione è dimostrare il seguente risultato:

**Teorema 5.12.**

$$f \text{ olomorfa} \iff f \text{ analitica.}$$

Per dimostrare tale asserto servono prima dei risultati intermedi che riguardano l'integrazione complessa. La prima definizione è proprio quest'ultima:

**Definizione 5.13** (Integrale curvilineo complesso). Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti con parametrizzazione  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Sia  $f$  una funzione continua e siano

$$\varphi(t) = x(t) + iy(t) \quad \text{e} \quad f = u + iv.$$

Definiamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

come il limite delle somme parziali

$$\sum f(\varphi(t_k)) (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})).$$

Risulta  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$  se  $\phi$  è una parametrizzazione di  $\gamma$ . L'integrale si può anche definire sotto ipotesi più deboli; ad esempio quando  $\gamma$  è a variazione limitata. Se interessati consultate [Conway].

**Osservazione 5.14.** Risulta che una definizione alternativa equivalente d'integrale è

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \omega_1 + i \int_{\gamma} \omega_2,$$

con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u(x, y) dx - v(x, y) dy \\ \omega_2 &= v(x, y) dx + u(x, y) dy \end{aligned}$$

1-forme.

Si osservano alcune proprietà dell'integrale complesso.

**Proposizione 5.15.** Valgono:

- (1) L'integrale è invariante per rimparametrizzazioni orientate,
- (2)  $\int_{\gamma} f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz$ ,
- (3) l'integrale è additivo rispetto all'operazione di concatenamento di curve chiuse,
- (4) l'integrale è lineare per somma e prodotto per scalare,
- (5) e infine vale la seguente disuguaglianza

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \ell(\gamma) \max_{\gamma} \{|f(z)|\}.$$

Due esempi particolarmente significativi di calcolo di un integrale curvilineo attraverso la definizione sono i seguenti

**Esempio 5.16.** Si calcoli

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Prendendo come parametrizzazione  $\varphi(\theta) = Re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  e traslando, si ottiene

$$\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-1} iRr^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

**Esempio 5.17.** Sia  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $k \neq 1$ , si calcoli

$$\int_{C_R(z_0)} (z - z_0)^{-k} dz.$$

Allo stesso modo dello scorso esempio si ottiene

$$\int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-k} iRr^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{-k+1} d\theta = 0.$$

Chiaramente però il calcolo dell'integrale a mano, come nei due esempi precedenti, in numerosi casi è impraticabile, quindi sembra naturale cercare un metodo simile al caso reale. Un ottimo punto di partenza può essere cercare la primitiva di una funzione olomorfa.

**Definizione 5.18.** Sia  $E$  un dominio,  $f \in C^0(E)$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .  $g$  è una primitiva di  $f$  se  $g \in \mathbb{H}(E)$  e  $g'(z) = f(z)$ .

**Esempio 5.19.** Una serie di potenze  $\sum a_k(z - z_0)^k$  ha come primitiva

$$\sum \frac{1}{k+1} a_k (z - z_0)^{k+1}.$$

La caratterizzazione delle funzioni che ammettono primitiva si trova nelle 1-forme usate per definire l'integrale, infatti vale la seguente proposizione

**Proposizione 5.20.** Sia  $f \in C^0(E)$ , essa ammette una primitiva  $g = h + ik \iff$  le forme  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono esatte, con

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u(x, y)dx - v(x, y)dy \\ \omega_2 &= v(x, y)dx + u(x, y)dy, \end{aligned}$$

ed in tal caso vale

$$\omega_1 = dh, \quad \omega_2 = dk.$$

**Corollario 5.21.**  $f$  ammette primitiva  $\iff \int_{\gamma} f(z)dz = 0 \quad \forall \gamma \subseteq E$ .

Il corollario deriva direttamente dalla caratterizzazione delle forme esatte.

L'informazione ottenuta rivela una proprietà interessante delle funzioni complesse e, in particolare, olomorfe: l'integrale curvilineo chiuso rivela informazioni importanti sulla regolarità della funzione. Ricordando gli esempi osservati in precedenza, si può notare che la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

sicuramente non ammette primitiva perché esiste almeno una curva chiusa su cui l'integrale non si annulla. L'obiettivo dei prossimi due teoremi è dimostrare che tutte le funzioni sufficientemente regolari che non ammettono primitiva avranno delle patologie proprio del tipo  $\frac{1}{z}$ .

**Teorema 5.22** (Goursat). Sia  $E$  un aperto e  $\alpha \in E$ . Sia inoltre  $f \in C^0(E)$  e  $f \in \mathbb{H}(E \setminus \{\alpha\})$ , allora

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0,$$

Dove  $R$  è un rettangolo coordinato, cioè i cui lati sono paralleli agli assi.

*Dimostrazione.* La dimostrazione si trova sulle dispense [Garroni e Malusa]. Il teorema si attribuisce sia a Cauchy che a Goursat, però la versione proposta in questo corso segue la dimostrazione "a mano" di Goursat, che non sfrutta ipotesi di regolarità ulteriori sulla funzione olomorfa.  $\square$

**Teorema 5.23** (Esistenza di una primitiva locale). Sia  $B$  un disco aperto e  $\alpha \in B$ . Sia inoltre  $f \in C^0(B) \cap \mathbb{H}(B \setminus \{\alpha\})$ . Allora esiste una primitiva  $g$  di  $f$  in  $B$ . Conseguentemente l'integrale su ogni curva chiusa regolare a tratti è nullo, i.e.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma \subseteq B.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\gamma_z$  una curva coordinata che connetta  $z_0$  a  $z$ , cioè formata da un segmento orizzontale e uno verticale. Sia  $g$  definita nel seguente modo

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Per il teorema di Goursat tale funzione è ben definita ed è una primitiva di  $f$ .  $\square$

## 5.4. Formula locale di Cauchy

Il risultato centrale di questa sottosezione è il teorema di Cauchy. Esso mostra la profonda regolarità delle funzioni olomorfe, il cui comportamento in un punto è legato al comportamento della funzione sul bordo di una palla centrata nel punto stesso.

**Teorema 5.24.** Sia  $f \in \mathbb{H}(E)$ ,  $B$  disco tale che  $\bar{B} \subset E$  e sia infine  $C = \partial B^+$ . Vale  $\forall z \in B$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Dimostrazione.* Sia  $A$  aperto  $\supset \bar{B}$  con  $A \subseteq E$  e  $z_0 \in B$ . Sia inoltre

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}.$$

$g$  è olomorfa in  $A \setminus \{z_0\}$  ed è continua in  $A$ . Per quanto visto con Goursat si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \\ &\implies 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

Grazie a questa formula si può dimostrare il teorema enunciato grossolanamente all'inizio della sezione precedente. Il teorema in questione è il seguente.

**Teorema 5.25.** Sia  $E$  aperto,  $f \in \mathbb{H}(E)$ , allora  $f$  è analitica ( $\implies f \in C^{+\infty}$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $z \in B_r(\alpha)$  e  $B_r(\alpha) \subseteq E$ . Poiché siamo sotto le ipotesi della formula di Cauchy vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

L'osservazione chiave è la seguente: si riscrive il denominatore e si fa comparire una serie di potenze.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^k.$$

Poiché  $|z - \alpha| < r = |\zeta - \alpha|$  c'è convergenza uniforme e pertanto si possono scambiare sommatoria ed integrale, ottenendo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} d\zeta \cdot (z - \alpha)^k \right).$$

Segue la tesi. □

Da qui otteniamo sia il risultato voluto, cioè che la funzione  $f$  può essere espressa come serie di potenze, sia un risultato ulteriore, cioè una generalizzazione della formula integrale di Cauchy per le derivate della funzione  $f$ :

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(\alpha)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Si veda l'Osservazione 4.17.

## 6. Verso la Formula di Cauchy

### 6.1. Disuguaglianza di Cauchy

Dalle formule e dalle considerazioni sulle funzioni olomorfe otteniamo l'importante disuguaglianza di Cauchy:

$$|f|^k \leq |k!| \frac{\|f\|_{C_r(\alpha)}}{r^k} \quad (6.1)$$

con  $C_r(\alpha) = \{\alpha + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$

Per mostrarlo basta osservare che

$$|f^k(\alpha)| = \left| \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{k+1}} (rie^{i\theta}) d\theta \right| \leq \left| \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{r^k} d\theta \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \cdot \|f\|_{C_r(\alpha)} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = |k!| \cdot \|f\|_{C_r(\alpha)} \cdot \frac{1}{r^k}$$

dove  $r$ , il raggio, è sempre positivo.

**Teorema 6.1.** (Liouville) Sia  $f \in H(\mathbb{C})$  con  $f$  limitata allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Come diretta conseguenza della disuguaglianza di Cauchy abbiamo che  $f'(z) = 0 \forall z$ . La tesi si ottiene ricordando che  $\mathbb{C}$  è connesso e che se  $f'$  è zero in un insieme connesso allora  $f$  è costante.  $\square$

Dal fatto che  $f$  è olomorfa e quindi svillupabile in serie di potenze seguono alcune importanti proprietà:

1.  $f \in C^\infty$  (già visto)
2. le forme  $w_1$  e  $w_2$  associate ad  $f$  hanno coefficienti  $C^1$  e cioè sono 1-forme differenziali
3.  $w_1$  e  $w_2$  sono chiuse:  
infatti  $dw_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \wedge dx - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dy \wedge dx = 0$   
dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato *Cauchy-Riemann* (analogamente  $dw_2 = 0$ ).

**Possiamo quindi usare tutto il "pacchetto Stokes"**

**Definizione 6.2.**  $E$  è detta regione regolare se è un insieme aperto limitato t.c. il bordo di  $E$  è unione disgiunta di curve semplici regolari a tratti.

**Osservazione 6.3.** Se prendiamo un dominio  $E$  con dei "buchi" l'orientazione del bordo è quella che "se percorsa lascia la parte esterna di  $E$  a destra" Scriveremo  $\partial E^+$  per il bordo con tale orientazione.

**Teorema 6.4.** Sia  $E$  regolare. Se  $f \in H(E)$  e  $f \in C^0(\overline{E})$  allora  $\int_{\partial E^+} f(z) dz = 0$

*Dimostrazione.* Scriviamo  $\int_{\partial E^+} f(z) dz$  come  $\int_{\partial E^+} w_1 + i \int_{\partial E^+} w_2$ . Per il teorema di Stokes

$$\int_{\partial E^+} w_1 + i \int_{\partial E^+} w_2 = \int_E dw_1 + i \int_E dw_2 = 0$$

perché  $w_1$  e  $w_2$  sono forme chiuse.  $\square$

### 6.2. Formula di Cauchy

**Teorema 6.5.** (Formula di Cauchy) Sia  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa, e  $D$  una regione regolare la cui chiusura è contenuta in  $E$ . Allora per ogni  $z_0$  in  $D$  vale la formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (6.2)$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $D_r = D \setminus \overline{B_r(z_0)}$ , cosicché  $D_r$  è una regione regolare di  $\mathbb{C}$ . Consideriamo  $\phi(x) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ . È chiaro che  $\phi \in H(D_r)$  e  $C^0$  in  $\overline{D_r}$ . Per il Teorema 6.4

$$\int_{\partial D_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$$

ma

$$\int_{\partial D_r^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz + \int_{\partial B_r^-} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 0$$

pertanto otteniamo

$$\int_{\partial D^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

La tesi si ottiene sfruttando la formula di Cauchy per il membro a destra.  $\square$

**Osservazione 6.6.** Il risultato si può ottenere senza la formula di Cauchy, sfruttando la solita parametrizzazione della circonferenza, passando al limite e usando la (uniforme) continuità di  $f$  per scambiare limite e integrale. Questa osservazione sarà utile nel dimostrare una generalizzazione della formula di Cauchy per funzioni non necessariamente olomorfe (compito 3).

In generale abbiamo la formula di Cauchy per le derivate successive:

$$f^k(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \quad (6.3)$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Una conseguenza della formula di Cauchy è il seguente

**Teorema 6.7** (Principio del Massimo modulo). Sia  $E$  dominio limitato (in particolare connesso), e sia  $f \in H(E)$  con  $f \in C^0(\overline{E})$  allora o  $|f|$  è costante oppure  $\max_{\overline{E}} |f(z)| = \max_{\partial \overline{E}} |f(z)|$ . Inoltre, se il massimo assoluto di  $|f|$  su  $E$  viene raggiunto anche in un punto di  $E$  allora  $|f|$  è costante e, conseguentemente,  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Dato che la funzione  $|f(z)|$  è continua sul compatto  $\overline{E}$ , essa raggiunge un valore massimo  $M = \max_{\overline{E}} |f(z)| < \infty$ .

Siano  $E_1 = \{z \in E : |f(z)| = M\}$ ,  $E_2 = \{z \in E : |f(z)| < M\}$ . L'insieme  $E_2$  è evidentemente un aperto, essendo ottenuto come controimmagine dell'aperto  $(-\infty, M)$  tramite la funzione continua  $|f(z)|$ .

Se mostriamo che anche  $E_1$  è aperto abbiamo finito, infatti  $E = E_1 \cup E_2$  ma  $E$  è connesso quindi uno tra  $E_1$  ed  $E_2$  deve essere vuoto. Se  $E_1$  è vuoto, allora  $E_2 = E$  e quindi  $|f(z)| < M$  per ogni  $z$  in  $E$ :  $M$  è allora assunto sulla frontiera. Se, invece,  $E_2$  è vuoto, allora  $E_1 = E$  e quindi  $|f(z)| = M$  è costante su tutto  $E$ .

Dimostriamo ora che anche  $E_1$  è un aperto. Se  $E_1 = \emptyset$  abbiamo finito. Se  $z_0 \in E_1$ , dato che  $E$  è aperto, possiamo trovare una pallina  $B_{r_0}(z_0)$  contenuta in  $E$ . Consideriamo ora  $\gamma_r = +\partial B_r(z_0)$  per  $r \leq r_0$ : dalla formula di Cauchy si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Parametrizziamo come al solito  $\gamma_r(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ; passando ai moduli, e ricordando che  $|f(z_0)| = M$  e che  $|f(z)| \leq M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , si ha

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{r} r d\theta \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = M$$

Pertanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| d\theta = M$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} [M - |f(z)|] d\theta = 0$$

Siccome  $M - |f(z)|$  è una funzione continua e non negativa, deve necessariamente essere  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ . Facendo variare  $r$  tra 0 e  $r_0$ , si trova che  $|f(z)| = M$  per ogni  $z$  in  $\gamma_r$ , per ogni  $r \leq r_0$ ; pertanto,  $|f(z)| = M$  per ogni  $z \in B_{r_0}(z_0)$ , da cui segue che  $B_{r_0}(z_0) \subset E_1$ . In definitiva, se  $E_1$  è non vuoto,  $E_1$  è aperto.

Per dimostrare l'ultima affermazione, e cioè che se  $|f(z)| = a \forall z \in E$  allora  $f$  è costante ragioniamo come segue<sup>2</sup>:

scriviamo  $f = u + iv$ ; per ipotesi  $u^2 + v^2 = a^2$  in  $E$ , con  $a \in \mathbb{R}$ . Derivando rispetto a  $x$  e rispetto a  $y$  ed utilizzando Cauchy-Riemann otteniamo il sistema

$$\begin{cases} uu_x - vu_y = 0 \\ vu_x + uu_y = 0 \end{cases}$$

da cui  $(u_x, u_y) = (0, 0)$  (perché  $u^2 + v^2 \neq 0$  su  $E$ ) e quindi, da Cauchy-Riemann,  $(v_x, v_y) = (0, 0)$ . Ne segue che  $f$  è costante dato che  $E$  è connesso. □

### 6.3. Appendice ed Esercizi

**Proposizione 6.8.** Siano  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni continue tali che  $f(G) \subseteq \Omega$  e  $g(f(z)) = z$ . Se  $g$  è olomorfa e  $g'(w) \neq 0 \forall w$  allora  $f$  è olomorfa e  $f'(w) = \frac{1}{g'(f(w))}$

*Dimostrazione.* Siano  $a \in G$  e  $h \in \mathbb{C}$  t.c.  $a + h \in G$ . Dal fatto che  $z = g(f(z))$  otteniamo che  $f(a) \neq f(a + h)$  perché  $a \neq a + h$ . Pertanto

$$1 = \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a + h)) - g(f(a))}{f(a + h) - f(a)} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

passando al limite per  $h$  che tende a 0 e ricordando che  $f$  è continua otteniamo, a meno di un cambio di variabile

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0} g'(f(a)) \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{1}{g'(f(a))}$$

□

Se  $g$  è l'esponenziale,  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$ ,  $G = \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$  ed  $f$  è il logaritmo principale, Log, ritroviamo il noto risultato che il logaritmo principale è olomorfo nel suo insieme di definizione con derivata uguale a  $1/z$ .

#### Esercizio 2.

Sull'esercizio 2 notiamo soltanto, senza scrivere tutti i dettagli, che la formula indicata si può ottenere facilmente se scriviamo le somme per  $k$  che va da  $-n$  a  $n$  di  $\cos(k\theta)$  e  $i$ -volte  $\sin(k\theta)$ , notando che il seno è una funzione dispari e il coseno pari otteniamo

$$2 \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) - 1 = \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$$

da qui basta sfruttare il suggerimento e fare delle semplici manipolazioni algebriche per ottenere il risultato.

#### Esercizio 6.

(i) Verificare che se  $f$  e  $g$  sono due rami del logaritmo in  $E$ , allora esiste  $k \in \mathbb{Z}$  t.c.

$$f(z) = g(z) + 2k\pi i$$

(ii) Verificare che non esiste un ramo del logaritmo in  $\mathbb{C} \setminus 0$ .

<sup>2</sup>questo ultimo argomento era stato assegnato come esercizio

(iii) Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e consideriamo la semiretta  $s\alpha := \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0\}$ . Sia  $E_\alpha := \mathbb{C} \setminus s\alpha$ . Definire un ramo del logaritmo in  $E_\alpha$  dimostrando che  $E_\alpha$  è immagine bigettiva di un dominio di  $\mathbb{C}$  tramite  $\exp(\cdot)$ . Denotiamo con  $\log_\alpha$  tale logaritmo.

Per (i) notiamo che un ramo del logaritmo è continuo e quindi considerando

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}(f(z) - g(z))$$

ma  $f$  e  $g$  soddisfano  $\exp(f(z)) = \exp(g(z)) = z$  quindi  $f$  e  $g$  differiscono di un certo  $k_z 2\pi i$  con  $k_z \in \mathbb{Z}$ , quindi  $h(z) \in \mathbb{Z}$ , ma  $E$  è connesso e l'immagine di connessi tramite una funzione continua è connessa, quindi  $h(E) = \{k\}$ , da cui la tesi.

## 7. Verso la Formula di Cauchy Globale

### 7.1. Risultati di regolarità

Ora che abbiamo

$$f \text{ è olomorfa} \iff f \text{ è analitica}$$

chiariamo alcuni punti importanti:

**Proposizione 7.1.** Sia  $E$  aperto

- (i) Se  $f \in H(E)$  allora  $f \in C^\infty(E)$  e  $f^{(k)}$  è olomorfa  $\forall k \in \mathbb{N}$
- (ii) Se  $f \in C^0(E)$  ammette primitiva in  $E$  allora  $f \in H(E)$

**Teorema 7.2** (Teorema di Morera). Sia  $\mathcal{D}$  un dominio e  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  continua, se per ogni disco  $B \subset \mathcal{D}$  e per ogni  $\gamma \subset B$  chiusa regolare a tratti si ha  $\int_\gamma f(z)dz = 0$  allora  $f$  è olomorfa in  $\mathcal{D}$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è banale una volta osservato per il corollario 5.21 che  $f$  ammette primitiva in ogni  $B$  ed è dunque olomorfa in  $B$ , infatti tale primitiva  $g$  sarebbe olomorfa e analitica come tutte le sue derivate, ma allora  $f \in H(\mathcal{D})$  siccome l'olomorfia è una proprietà locale.  $\square$

**Teorema 7.3** (Teorema di omotopia). Siano in  $\mathcal{D}$  dominio le curve regolari  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  omotope a estremi fissati o chiuse omotope e  $f$  olomorfa in  $\mathcal{D}$ ,  $\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz$ .

*Dimostrazione.* Segue dall'olomorfia di  $f$ , si ha infatti che se  $\forall \gamma$

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \omega_1 + i \int_\gamma \omega_2$$

allora per Cauchy-Riemann  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono forme chiuse. Il che ci permette di applicare il teorema di omotopia per forme chiuse [Garroni Malusa].  $\square$

Si osserva che nella dimostrazione del teorema di omotopia per forme chiuse riportato in [Garroni Malusa] le omotopie vengono prese  $C^1$  giustificiamo questa scelta enunciando (senza dimostrare) una versione di un noto risultato di approssimazione.

**Teorema 7.4** (Stone-Weierstrass). Sia  $K \subset \mathbb{R}^n$  compatto e  $f \in C^0(K, \mathbb{R})$  allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un polinomio  $p$  tale che  $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$  dove  $\|\cdot\|_\infty = \sup |\cdot|$ .

Da cui una quasi versione più generale della proposizione 6.2.29 [Garroni-Malusa]:

**Corollario 7.5.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^n$  aperto e,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve chiuse di classe  $C^k$  omotope in  $U$  allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope tramite un'omotopia  $h \in C^k([0, 1] \times [0, 1], U)$ .

*Dimostrazione.* Prima di tutto osserviamo che Stone-Weierstrass può anche dare approssimazioni  $C^\infty$  di funzioni con immagine  $\mathbb{R}^n$ , infatti siano  $p_1, \dots, p_n$  le approssimazioni polinomiali a meno di  $\varepsilon$  di  $\pi_1 \circ f, \dots, \pi_n \circ f$  dove  $\pi_i$  è la proiezione sull' $i$ -esima coordinata, allora  $p = \times_1^n p_i$  approssima  $f$  a meno di  $\sqrt{n} \cdot \varepsilon$ .

Sia  $h$  l'omotopia data e sia  $\varepsilon$  la distanza dall'immagine di  $h$  al complementare di  $U$  che esiste in quanto  $h([0, 1] \times [0, 1])$  è un compatto.

Per quanto detto prima possiamo approssimare  $h$  a meno di  $\varepsilon$  con una funzione  $h_1$  polinomiale sulle componenti, osserviamo che però  $h_1$  non ci dà necessariamente  $\gamma_1$  in partenza e  $\gamma_2$  in arrivo, dunque dobbiamo "collegare"  $h_1$  con le curve iniziali in modo da ottenere un'omotopia tra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Poniamo per convenzione che le omotopie parametrizzano le curve sul secondo parametro, ovvero che  $h(0, s)$  parametrizza  $\gamma_1$  e così via.

Ora osserviamo che per costruzione  $|h_1(0, s) - h(0, s)| < \varepsilon$  e dunque l'omotopia  $S_1$  definita da

$$S_1(t, s) = (1 - t)h(0, s) + th_1(0, s)$$

è contenuta in  $U$  ed è di classe  $C^k$  lo stesso vale in arrivo per

$$S_2(t, s) = (1 - t)h(1, s) + th_1(1, s)$$

Concatenando otteniamo un'omotopia

$$h_2 = S_1 * h_1 * S_2 = \begin{cases} S_1(3t, s) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ h_1(3t - 1, s) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ S_2(3t - 2, s) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Che è di classe  $C^k$  ovunque tranne al più in  $t = \frac{1}{3}$  e  $t = \frac{2}{3}$ .

A questo punto si tratta di "rallentare" l'omotopia nei punti problematici così da avere che le derivate rispetto a  $t$  coincidano, a tal fine sia:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{e^{-\frac{1}{t}} + e^{-\frac{1}{1-t}}} & t \in (0, 1) \\ 1 & t = 1 \end{cases}$$

$\psi$  è una funzione  $C^\infty$  con tutte le derivate nulle in 0 e 1, infatti è sufficiente osservare che in  $x=0$  si ha che il numeratore ha tutte derivate infinitesime e il denominatore ha derivate non nulle e per  $x=1$  si osservi che  $\psi(1-x) = 1 - \psi(x)$ .

Sia dunque:

$$h_3 = \begin{cases} S_1(\psi(3t), s) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ h_1(\psi(3t - 1), s) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ S_2(\psi(3t - 2), s) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$h_3$  è un'omotopia di classe  $C^k$  di  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , infatti è un facile esercizio verificare che se  $g$  è  $C^\infty$  allora  $g(\psi(t))$  ha tutte le derivate nulle in 0 e 1.

Rimane da costruirsi da  $h_3$  un'omotopia di curve chiuse, il ragionamento risulta del tutto analogo al precedente una volta osservato che sempre per costruzione

$$L(t, s) = sh_3(t, 0) + (1-s)h_3(t, 1) \in U$$

Otteniamo l'omotopia desiderata:

$$\tilde{h} = \begin{cases} h_3(t, \psi(2s)) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ L(t, \psi(2s - 1)) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

□

**Osservazione 7.6.** Per giustificare a pieno la proposizione in [Garroni-Malusà] è necessario mostrare che per  $k = 1$  si ha che  $\tilde{h}$  ammette le derivate seconde miste continue.

Per  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = 2\psi'(2s-1) \frac{d}{dt} (h_3(t, 0) - h_3(t, 1))$$

Che esiste continua siccome  $h_3$  è  $C^1$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [0, \frac{1}{3}]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = 3\psi'(3t) \frac{d}{ds} (h_1(0, \psi(2s)) - h(0, \psi(2s)))$$

Che esiste e continua siccome  $h_1$  e  $h$  sono  $C^1$  in  $t = 0$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [\frac{2}{3}, 1]$

Come sopra.

Per  $s \in [0, \frac{1}{2}]$  e  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \tilde{h} = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} h_1(\psi(3t - 1), \psi(2s))$$

Che esiste e continua siccome  $h_1$  è  $C^\infty$ , ed è nulla agli estremi per le proprietà di  $\psi$ .

Come immediato corollario del teorema di omotopia si ha la seguente:

**Proposizione 7.7.** Sia  $\mathcal{D}$  dominio e  $\gamma \subset \mathcal{D}$  chiusa regolare a tratti e  $\gamma \sim 0$  ovvero  $\gamma$  omotopa a un punto e  $f \in H(\mathcal{D})$ , si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

In particolare se  $\mathcal{D}$  è semplicemente connesso l'integrale sulle curve chiuse si annulla.

**Proposizione 7.8.** Sia  $\mathcal{D}$  aperto semplicemente connesso,  $f \in H(\mathcal{D})$ ,  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}$  allora:

- (a) Esiste  $g \in H(\mathcal{D})$  tale che  $f(z) = e^{g(z)}$ .
- (b)  $\forall n \in \mathbb{N}$  Esiste  $h \in H(\mathcal{D})$  tale che  $f(z) = h(z)^n$ .

*Dimostrazione.* (a). Sia  $j = \frac{f'}{f}$  olomorfa per costruzione, siccome  $\mathcal{D}$  è semplicemente connesso  $j$  ammette primitiva (poichè su un insieme semplicemente connesso le forme chiuse sono anche esatte), sia  $g_1$  tale primitiva. Valutiamo la seguente.

$$\left( \frac{f}{e^{g_1}} \right)' = \frac{f' e^{g_1} - f g_1' e^{g_1}}{e^{2g_1}} = \frac{f' e^{g_1} - f \frac{f'}{f} e^{g_1}}{e^{2g_1}} = 0$$

Ma allora  $\frac{f}{e^{g_1}} = c$  è costante,  $c \neq 0$  per ipotesi, e ponendo  $g = g_1 + \bar{c}$  dove  $e^{\bar{c}} = c$  otteniamo la tesi.  
 (b). Segue da (a) ponendo  $h = e^{\frac{g}{n}}$  □

Si ricorda che un ramo del logaritmo in  $U$  è una funzione continua  $L$  definita in un aperto  $U$  tale che  $e^L(z) = z$  per ogni  $z \in U$ , si riporta il seguente corollario (ottenuto ponendo in (a)  $f(z) = z$ ) di notevole importanza intuitiva.

**Corollario 7.9.** Sia  $U$  aperto semplicemente connesso e  $0 \notin U$  allora esiste un ramo del logaritmo in  $U$ .

## 7.2. Teorema di Cauchy globale

Denotiamo con  $\bar{\gamma}$  il supporto della curva  $\gamma$ .

**Definizione 7.10** (Indice di avvolgimento). Sia  $\gamma$  curva chiusa regolare a tratti, l'indice di avvolgimento attorno a  $z \in \bar{\gamma}^c$  di  $\gamma$  è

$$\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw$$

**Proposizione 7.11.** Valgono le seguenti proprietà per  $\text{ind}_{\gamma}(z)$  :

- (i)  $\text{ind}_{\gamma}(z)$  è continua sulle componenti connesse di  $\bar{\gamma}^c$ .
- (ii)  $\text{ind}_{\gamma}(z) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $z \in \bar{\gamma}^c$ .
- (iii)  $\text{ind}_{\gamma}(z)$  è costante sulle componenti connesse di  $\bar{\gamma}^c$ .
- (iv)  $\text{ind}_{\gamma}(z)$  è nulla sulla componente connessa illimitata di  $\bar{\gamma}^c$ .

*Dimostrazione.* (i) e (ii) implicano (iii) infatti l'immagine di un connesso è un connesso per applicazioni continue, (i) e (iii) implicano (iv) infatti l'integrando tende uniformemente a 0 per  $|z| \rightarrow \infty$ , si nota che la componente connessa e illimitata esiste ed'è unica poichè  $\bar{\gamma}$  è compatto.

(i) segue dal fatto che  $\frac{1}{w-z}$  è olomorfa in  $w \neq z$ .

Resta da dimostrare (ii) che a tutti gli effetti ci dà la classe di  $\gamma$  nel gruppo fondamentale di  $\mathbb{C} \setminus z$  (tale gruppo è isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ ), infatti per il teorema di omotopia si ha che dobbiamo controllare la tesi solo per un rappresentante di ogni classe, e per la linearità dell'integrale sul concatenamento di curve ci basterà verificare la tesi su un generatore del gruppo. Dunque verificiamola per  $\gamma = C_1 + z$  la circonferenza di raggio 1 intorno a  $z$ :

$$\text{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} de^{it} = 1$$

Si nota che è anche possibile dimostrare (ii) con metodi puramente analitici: Osserviamo che se  $\gamma$  è parametrizzata da  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  e

$$f(t) = \int_0^t \frac{\phi'(x)}{\phi(x) - z} dx$$

Allora  $e^{-f(t)}(\phi(t) - z)$  è costante, valutando in 0 e 1 si ottiene  $e^{f(1)} = e^{f(0)} = e^0$  e dunque  $f(1) = 2\pi i k$  per qualche  $k \in \mathbb{Z}$ .

□

**Teorema 7.12** (Teorema di Cauchy globale). Sia  $\gamma$  curva chiusa regolare a tratti,  $U$  un aperto qualsiasi tale che  $\bar{\gamma} \subset U$  e  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U^c$ . Sia  $f \in H(U)$ . Allora valgono le seguenti per  $z \in U \setminus \bar{\gamma}$ :

$$f(z)\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (7.1)$$

e

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

*Dimostrazione.* Diamo un outline della dimostrazione per poi completare i dettagli in seguito. Iniziamo definendo la funzione "rapporto incrementale"  $g$  come segue:

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

Dimostreremo che  $g$  è continua in  $U^2$ . poi definiamo:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z, w) dw$$

Osserviamo che la 7.1 è equivalente a  $h \equiv 0$  in  $U \setminus \bar{\gamma}$  infatti

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z)\text{ind}_\gamma(z)$$

Dunque dimostreremo che  $h$  è olomorfa in  $U$ . Ora sia  $U_1 := \{z \in \mathbb{C} \text{ t.c. } \text{ind}_\gamma(z) = 0\}$  definiamo  $h_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$  come segue:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Anch'essa come dimostreremo olomorfa. Si ha che  $h_1$  e  $h_2$  coincidono su  $U_1 \cap U$ , inoltre  $U^c \subset U_1$  per definizione, ne segue che la funzione di "incollamento"  $\phi$  che vale  $h_1$  su  $U_1$  e  $h$  su  $U$  è intera. A questo punto è sufficiente osservare che siccome  $U_1$  contiene l'unica componente illimitata di  $\bar{\gamma}^c$  vale:

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \phi(z) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} h_1(z) = 0$$

Quindi possiamo applicare Liouville e ottenere  $\phi \equiv 0$ , dunque  $h(z) \equiv 0$  e la 7.1.

A questo punto la seconda formula segue da una furba applicazione della prima, infatti sia  $a \in U \setminus \bar{\gamma}$  e  $F(z) = (z - a)f(z)$  allora:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(z)}{z - a} dz = F(a)\text{ind}_\gamma(a) = 0$$

poichè  $F(a) = 0$ .

Procediamo col mettere i puntini sulle  $i$  e dimostriamo che  $g$  è continua, naturalmente siccome  $f$  è continua ci è dato verificarlo solo in  $z = w$  più precisamente nei punti del tipo  $(a, a) \in U^2$ . Allora siano  $z$  e  $w$  in una palla  $B$  centrata in  $a$  e  $\xi[0, 1] \subset B$  la parametrizzazione del segmento che li congiunge:

$$\xi(t) = (1 - t)z + tw$$

Si osserva che:

$$\int_0^1 f'(\xi(t))dt = \int_0^1 \frac{(f(\xi(t)))'}{\xi'(t)} dt = \frac{1}{w-z} \int_0^1 (f(\xi(t)))' dt = g(z, w)$$

poichè  $\xi'(t) \equiv w - z$  ma allora

$$g(z, w) - g(a, a) = \int_0^1 f'(\xi(t)) - f'(a)$$

Perciò siccome  $f'$  è continua e l'immagine di  $\xi$  è contenuta nella stessa palla di  $z$  e  $w$ , l'integrando è infinitesimo e  $g$  è continua.

Dimostriamo ora che  $h$  è olomorfa, prima di tutto osserviamo che siccome  $g$  è continua allora  $g$  è uniformemente continua sui compatti, in particolare sia  $z_0 \in U$  e  $B$  una palla chiusa di centro  $z_0$  contenuta in  $U$ , si ha che  $g|_{B \times \gamma}$  è uniformemente continua, il che ci permette di passare il limite dentro le integrazioni di  $g$  ristrette a  $B \times U$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lim_{z \rightarrow z_0} g(z, w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z_0, w)dw$$

$h$  è dunque continua. Per l'olomorfia ci appoggiamo al preannunciato teorema di Morera e dunque si integri  $h$  sulle curve  $\sigma \subset B \subset U$  dove  $B$  è un disco, per Fubini:

$$\int_{\sigma} h(z)dz = \int_{\sigma} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z, w)dw dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \int_{\sigma} g(z, w)dz dw$$

Ma siccome, fissato  $w$ ,  $g|_w$  è continua in  $B$  e (per come è definita) olomorfa in tutti i punti di  $B$  tranne al più in  $z = w$  possiamo applicare il Teorema 8.28 [Garroni-Malusa] ( $g$  ammette primitiva in  $B$ ) e dunque  $\int_{\sigma} h(z)dz = 0$  e per Morera  $h \in H(U)$ .

L'olomorfia di  $h_1$  in  $U_1 \setminus U$  può seguire da un ragionamento del tutto analogo, solo che in questo caso l'integrando risulta essere sempre olomorfo in quanto  $|z - w| \geq d > 0$  dove  $d$  è la distanza del compatto  $\gamma$  dal chiuso  $U^c$

□

## 8. Teorema dell'applicazione aperta

**Proposizione 8.1.** Sia  $\varphi \in \mathbb{H}(E)$  con  $E$  aperto,  $z_0 \in E$  tale che  $\varphi'(z_0) \neq 0$ . Allora vale che esiste un intorno  $V$  di  $z_0$  tale che :

(i)  $\varphi|_V$  è iniettiva .

(ii)  $\varphi(V) = W$  è aperto.

(iii) Se  $\psi : W \rightarrow V$  è l'inversa di  $\varphi|_V$  allora  $\psi$  è olomorfa e  $\psi'(w) = \frac{1}{\varphi'(z)}$  con  $w = \varphi(z)$

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda (iii) si guardi la Proposizione (5.8). Per (i) e (ii) si guardi le dispense di [Garroni-Malusa] □

**Osservazione 8.2.** Per ogni  $m \in \mathbb{N}^+$  possiamo considerare l'applicazione  $\Pi_m$  tale che  $\Pi_m(z) := z^m$ . Allora  $\forall w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si ha che  $|\Pi^{-1}(w)| = m$  (ovvero le radici m-esime di  $z$ ). Inoltre  $\Pi_m$  è aperta , infatti preso  $V$  aperto tale che  $0 \notin V$  allora  $\forall z \in V$  si ha che  $\Pi'_m \neq 0$  ed usando la proposizione appena enunciata si ha che  $\Pi_m(V)$  è aperto. D'altro canto se consideriamo  $B_R(0)$  per qualche  $R > 0$  allora si vede facilmente che  $\Pi_m(B_R(0)) = B_{R^m}(0)$  che è un aperto.

**Proposizione 8.3.** Sia  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \mathbb{H}(E)$  e non nulla,  $z_0 \in E$  tale che  $f(z_0) = 0$ . Allora  $\exists m \in \mathbb{N}^+$  tale che

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con  $g \in \mathbb{H}(E)$  ed  $g(z_0) \neq 0$ .

*Dimostrazione.* Già sappiamo che se  $f$  è non nulla allora  $z_0$  è uno zero isolato. Per il Teorema (5.11) esiste  $r > 0$  tale che  $B_r(z_0) \subset E$  e  $\forall z \in B_r(z_0)$  vale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{8.1}$$

Dato che  $z_0$  è uno zero isolato allora esiste un  $k$  tale che  $c_k \neq 0$ . Sia  $m$  il minimo di questi  $k$  e definiamo:

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^{-m} f(z), & \text{se } z \neq z_0 \\ c_m, & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

è chiaro che  $f(z) = (z - z_0)^m g(z) \forall z \in E$  e per come abbiamo definito  $c_m$  si ha che  $g(z_0) \neq 0$ .

Rimane solo da mostrare che  $g(z) \in \mathbb{H}(E)$ . Dalla definizione di  $g$  si vede che  $g(z) \in \mathbb{H}(E \setminus \{z_0\})$ . Per dimostrare ciò che vogliamo è sufficiente far vedere che  $g(z)$  ammette uno sviluppo in serie di potenze in un intorno di  $z_0$  , ed infatti :

$$\begin{aligned} g(z) &\equiv (z - z_0)^{-m} f(z) \\ &\stackrel{(8.1)}{=} (z - z_0)^{-m} \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

□

**Definizione 8.4** (Ordine di uno zero). Data una funzione  $f$  in un aperto  $E$  diciamo che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $f$  se:

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con  $g(z_0) \neq 0$

**Teorema 8.5** (Teorema di Struttura). Sia  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $z_0 \in E$ ,  $f \in \mathbb{H}(E)$  non costante con  $w_0 = f(z_0)$ . Se  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $f - w_0$  allora esiste un intorno  $V$  di  $z_0$  ed una  $\varphi \in \mathbb{H}(V)$  tale che:

$$(i) f(z) = w_0 + \varphi(z)^m \quad \forall z \in V$$

(ii)  $\varphi'$  non ha zeri in  $V$  ed inoltre  $\varphi$  è una mappa invertibile da  $V$  su  $B_r(0)$  per qualche  $r > 0$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo un disco  $\Omega$  (che è semplicemente connesso) intorno di  $z_0$ . A meno di restringere  $\Omega$  possiamo supporre che  $f(z) \neq w_0 \quad \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}$  (ricordiamo che gli zeri di una funzione  $g$  olomorfa non costante sono isolati).

Inoltre dato che  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  di  $f - w_0$  allora vale

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$ .

Dunque segue dalla proposizione (7.5) che esiste  $h \in \mathbb{H}(\Omega)$  tale che  $g(z) = e^{h(z)}$ . Dunque se definiamo  $\varphi(z) := (z - z_0) \exp\left(\frac{h(z)}{m}\right)$  si vede facilmente che vale (i). Si può notare altrettanto facilmente che  $\varphi'(z_0) = \exp\left(\frac{h(z_0)}{m}\right) \neq 0$  dunque a meno di restringere  $\Omega$  si può supporre che  $\varphi'$  non abbia zeri in  $\Omega$  ed il resto della dimostrazione segue dalla Proposizione (8.1).  $\square$

**Osservazione 8.6.** Sotto le ipotesi del Teorema precedente si possono osservare alcune semplici conseguenze. La prima è che  $f(z) - w_0 = \Pi_m \circ \varphi(z)$ . Segue che  $f(V \setminus \{z_0\}) = B_{r^*}^*(w_0)^3$  ed inoltre  $\forall w \in B_{r^*}^*(w_0)$  si ha che  $|f^{-1}(w)| = m$ .

Inoltre per quanto detto fin'ora  $w_0$  è un punto interno di  $f(E)$ .

**Teorema 8.7** (Teorema della mappa aperta). Sia  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \mathbb{H}(E)$  allora  $f(E)$  è un dominio oppure un punto se  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Se  $f$  costante l'enunciato è ovvio. Supponiamo dunque  $f$  non costante, allora siccome  $f$  è continua,  $f(E)$  è connesso. Dal Teorema precedente segue che  $f(E)$  è aperto (è sufficiente scriversi  $E$  come unione degli aperti  $V(z)$  che si ottengono dal teorema).  $\square$

---

<sup>3</sup> $B_R^*(w_0) := B_R(w_0) \setminus \{w_0\}$

**Corollario 8.8.** Sia  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $f \in \mathbb{H}(E)$  ed iniettiva, allora  $f(z)' \neq 0 \forall z \in E$

*Dimostrazione.* Per assurdo esiste  $z_0 \in E$  tale che  $f(z_0)' = 0$ . Allora la funzione  $f(z) - f(z_0)$  ha uno zero di ordine  $m > 1$  (basti pensare al suo sviluppo di Taylor in  $z_0$ ). Ma allora per l'Osservazione (8.5)  $f$  è  $m$  ad 1 in un intorno di  $z_0$ , il che è assurdo dato che avevamo supposto  $f$  iniettiva.  $\square$

## 9. Omologia ed indice di allacciamento

Per maggiori dettagli riguardo gli argomenti trattati in questo Capitolo si può consultare *Algebraic topology, a first course* di William Fulton. L'obiettivo di questo capitolo è quello di definire il primo gruppo di omologia di uno spazio topologico  $X$ .

**Definizione 9.1.** Dato un qualsiasi insieme  $S$  possiamo definire  $\mathbb{Z}^{(S)}$  come il gruppo abeliano libero generato da  $S$ , cioè:

$$\mathbb{Z}^{(S)} := \left\{ \sum_{s \in S} n_s s \mid n_s \in \mathbb{N}, n_s = 0 \text{ tranne per un numero finito} \right\}$$

dove la somma di due elementi di  $\mathbb{Z}^{(S)}$  è definita tramite

$$\sum n_s s + \sum n'_s s := \sum (n_s + n'_s) s$$

**Osservazione 9.2.** Possiamo considerare  $\mathbb{Z}^{(S)}$  anche come l'insieme delle applicazioni

$$f : S \rightarrow \mathbb{Z}$$

non nulle solo in un numero finito di punti.

**Definizione 9.3** (Gruppi di catene). Dato uno spazio topologico  $X$  allora definiamo, rispettivamente, il gruppo delle  $0$ -catene,  $1$ -catene,  $2$ -catene come:

$$C_0(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = X$$

$$C_1(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = C^0([0, 1], X)$$

$$C_2(X, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}^{(S)} \quad \text{con } S = C^0(\Delta, X) \quad \text{dove } \Delta := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } 0 \leq y \leq 1 - x \leq 1 \right\}$$

**Definizione 9.4** (Operatori di bordo). Vogliamo definire degli omomorfismi di gruppi  $\partial_i$  tali che

$$\partial_i : C_i(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_{i-1}(X, \mathbb{Z})$$

Definiamo allora  $\partial_1$  l'applicazione

$$\begin{aligned} \partial_1 : C_1(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow C_0(X, \mathbb{Z}) \\ \Gamma = \sum n_i \gamma_i &\longmapsto \sum n_i (\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) \end{aligned}$$

Prima di definire  $\partial_2$  parametrizziamo il bordo di  $\Delta$  con

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (1 - t, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial\Delta)_3 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (0, 1 - t) \end{aligned}$$

Allora possiamo definire  $\partial_2$  come:

$$\begin{aligned} \partial_2 : C_2(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow C_1(X, \mathbb{Z}) \\ \Lambda = \sum n_i \delta_i &\longmapsto \sum n_i \partial_2(\delta_i) := \sum n_i \sum_{i=k}^3 \delta_i \circ (\partial \Delta)_k \end{aligned}$$

Per finire si definisce  $\partial_0 \equiv 0$

**Proposizione 9.5.** Considerando  $\partial_1, \partial_2$  gli omomorfismi di gruppi appena definiti si ha che

$$\partial_1 \circ \partial_2 \equiv 0$$

Dunque in particolare si ha che  $Im \partial_2 \subset Ker \partial_1$ .

**Definizione 9.6** (n-Cicli e n-Bordi). Dato uno spazio topologico  $X$  definiamo gli  $n$ -cicli di  $X$  come

$$Z_n(X, \mathbb{Z}) := Ker \partial_n$$

e gli  $n$ -bordi di  $X$  come

$$B_n(X, \mathbb{Z}) := Im \partial_{n+1}$$

**Definizione 9.7** (Gruppi di omologia). Dato uno spazio topologico  $X$  definiamo il *primo gruppo di omologia* di  $X$  come

$$H_1(X, \mathbb{Z}) := Z_1(X, \mathbb{Z}) / B_1(X, \mathbb{Z})$$

In modo analogo definiamo

$$H_0(X, \mathbb{Z}) := Z_0(X, \mathbb{Z}) / B_0(X, \mathbb{Z})$$

**Osservazione 9.8.** Osserviamo che l'immagine attraverso un omomorfismo di un gruppo è un sottogruppo dello spazio di arrivo. Siccome  $C_1(X, \mathbb{Z})$  è un gruppo abeliano allora ogni suo sottogruppo è normale. Ma allora usando quanto detto fin'ora, insieme alla Proposizione (9.5), la definizione di  $H_1(X, \mathbb{Z})$  è ben posta.

**Definizione 9.9.** Dato uno spazio topologico  $X$  allora due 1-cicli che definiscono la stessa classe di omologia sono detti *omologhi*.

**Osservazione 9.10.** Dati  $x, y \in X$  (che sono 0-cicli) sono omologhi  $\iff x - y \in B_0(X, \mathbb{Z}) \iff \exists \gamma$  curva tale che  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ . Da ciò segue che se  $X$  è connesso per archi allora

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

Più in generale si ha che

$$H_0(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{Z}$$

con  $A$  l'insieme che indicizza le componenti connesse per archi di  $X$ .

D'ora in poi consideriamo  $X = E \subset \mathbb{C}$

**Definizione 9.11** (Integrazione su 1-catene). Sia  $f$  una funzione su  $X$  e  $\Gamma = \sum_{i=1}^k n_i \gamma_i$  una 1-catena di  $X$  allora definiamo l'integrale di  $f$  lungo  $\Gamma$  come

$$\int_{\Gamma} f := \sum_{i=1}^k n_i \int_{\gamma_i} f dz$$

**Osservazione 9.12** (Indice di Allacciamento). Dalla Definizione precedente si capisce che possiamo definire l'indice di allacciamento  $Ind_{\Gamma}(z)$  di una 1- catena  $\Gamma$  analogamente a come avevamo definito l'indice di avvolgimento.

**Teorema 9.13.** Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto,  $\Gamma_1, \Gamma_2 \in Z_1(E, \mathbb{Z})$  allora :

$$[\Gamma_1] = [\Gamma_2] \iff Ind_{\Gamma_1}(z) = Ind_{\Gamma_2}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus E$$

In particolare

$$\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z}) \iff Ind_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus E$$

Da cui segue che due 1-cicli sono geometricamente omologhi se e solo se sono omologhi (rispetto alla definizione che avevamo dato con l'indice di avvolgimento).

**Osservazione 9.14.** Esiste un omomorfismo surgettivo di gruppi  $h$  tale che

$$\begin{aligned} h : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto \gamma + B_1(X, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Questa applicazione è ben definita perché  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \approx \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 - \gamma_2 \in B_1(X, \mathbb{Z})$

Ma in generale  $\pi_1(X, X_0) \neq H_1(X, \mathbb{Z})$  infatti :  $H_1(\mathbb{C} \setminus \{p, q\}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$  mentre dal Teorema di Van-Kampen abbiamo che  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{p, q\}, X_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Dalla suriettività segue che ogni 1-ciclo è omologo ad un laccetto, e dunque valgono anche per l'indice di allacciamento tutte le proprietà della Proposizione (7.8).

**Teorema 9.15** (Formula omologica di Cauchy). Sia  $E \subset \mathbb{C}$  aperto,  $\Gamma \in Z_1(E, \mathbb{Z})$ . Se  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$  allora  $\forall z \in E \setminus \Gamma$  vale:

$$(i) \text{ Ind}_{\Gamma}(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta$$

$$(ii) \int_{\Gamma} f = 0$$

$$(iii) \text{ Ind}_{\Gamma}(z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$$

Lasciamo (iii) per esercizio.

**Corollario 9.16.** Se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono cicli e  $[\Gamma_1] = [\Gamma_2] \implies \int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$

**Osservazione 9.17.** Consideriamo  $E = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ; sappiamo che

$$\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z}) \Rightarrow \text{Ind}_\Gamma(z) = 0 \forall z \in \mathbb{C} \setminus E \text{ cioè } \text{Ind}_\Gamma(z_0) = 0$$

Quindi  $\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0) : H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  è ben definita ed è surgettiva infatti  $\Gamma = \{z_0 + Re^{ik\theta}, \theta \in [0, 2\pi)\}$  ha indice  $k$

Consideriamo un punto base  $p_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  e

$$\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p_0) \xrightarrow{h} H_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0)} \mathbb{Z}.$$

Capiamo subito che  $\varphi = \text{Ind}_{(\cdot)}(z_0) \circ h$  è surgettiva; d'altra parte  $\text{Ker}\varphi$  è banale perché sappiamo da Geometria 2 che  $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{z_0\}, p_0) = \mathbb{Z}$ . Ne segue che  $h$  e  $\text{Ind}_{(\cdot)}(z_0)$  sono isomorfismi

**Proposizione 9.18.**  $E \subset \mathbb{C}$  dominio,  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$ ,  $E^* := E \setminus \{z_1, \dots, z_m\} \Rightarrow$

$$\Gamma \underset{E^*}{\approx} \sum \text{Ind}_\Gamma(z_i) \partial B_{r_i}(z_i)$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $n_i = \text{Ind}_\Gamma(z_i)$ ,  $\gamma_i = \partial B_{r_i}(z_i)$ .

Vogliamo dimostrare

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \sum n_i \text{Ind}_{C_r(z_j)}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus E^* = (\mathbb{C} \setminus E) \cup \{z_1, \dots, z_m\}$$

Se  $z \in \mathbb{C} \setminus E \Rightarrow \text{Ind}_\Gamma(z) = 0$  perché  $\Gamma \in B_1(E, \mathbb{Z})$ ;

$\text{Ind}_{C_r(z_j)}(z) = 0$  perché  $z$  è esterno al disco;

Se  $z = z_i \Rightarrow \text{Ind}_\Gamma(z_i) = n_i$  e  $\text{Ind}_{C_r(z_j)}(z_i) = \delta_{ij}$  da cui la tesi.  $\square$

È anche interessante il seguente Teorema di Jordan; sebbene intuitivamente chiaro il teorema ha una dimostrazione piuttosto intricata (si veda lo Stein, Appendice).

**Teorema 9.19.** (Jordan) Sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa

(i)  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  ha 2 componenti connesse, una illimitata I e una limitata L

(ii) L è semplicemente connessa

(iii)  $\text{Ind}_\gamma(z) = 1 \forall z \in L$

(iv)  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \forall z \in I$

**Teorema 9.20** (Conto degli zeri). Sia  $E$  aperto,  $f \in \mathbb{H}(E)$ ,  $D$  una regione regolare contenuta in  $E$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f$$

dove  $N_f$  è il numero degli zeri di  $f$  in  $D$  contati con molteplicità.

*Dimostrazione.* Sappiamo che se  $f$  ha un unico zero di ordine  $m$  in  $a$  si ha

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \forall z \in D$  per unicità dello zero e  $g \in \mathbb{H}(D)$  per Proposizione (8.8). Ma allora

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1} g(z) + (z - a)^m g'(z)$$

per cui

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Quindi si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{m}{z - a} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

ma  $\frac{g'}{g} \in \mathbb{H}(E)$  quindi per il Teorema di Cauchy globale (7.9)

$$\int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0$$

D'altra parte

$$\int_{\partial D^+} \frac{m}{z-a} dz = \int_{C_r(a)} \frac{m}{z-a} dz = m$$

per un  $r$  abbastanza piccolo.

Se  $\{a_1, \dots, a_k\}$  sono tutti gli zeri isolati di  $f$  con molteplicità algebrica  $m_j$  ho

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_k)^{m_k} g(z)$$

con  $g(z) \neq 0 \forall z \in D$ ,  $g \in \mathbb{H}(D)$ . Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \int_{\partial D^+} \frac{m_j}{z-a_j} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = N_f$$

esattamente come sopra. □

La stessa dimostrazione stabilisce:

**Teorema 9.21.** *E* dominio,  $f \in \mathbb{H}(E)$ ,  $\gamma \approx 0$  in  $E$ ,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  gli zeri di  $f$  in  $E$  con molteplicità  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^k \text{Ind}_{\gamma}(a_j) m_j$$

## 10. Singolarità isolate e residui

**Definizione 10.1** (Singolarità isolata).  $f$  in  $E$  ha una *singolarità isolata* in  $z_0$  se  $f \in \mathbb{H}(E \setminus \{z_0\})$

**Definizione 10.2** (Sviluppo in serie di Laurent).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

è detto *sviluppo in serie di Laurent centrato in  $z_0$*  dove

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$$

è detta *parte principale*.

**Osservazione 10.3.**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = S_1 + S_2$$

con

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

usuale serie di potenze con raggio di convergenza  $R_1$  e

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

è assolutamente convergente per  $|z - z_0| > R_2$  con  $R_2 = \frac{1}{\rho_2}$  dove  $\rho_2$  è il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n \text{ con } \zeta = \frac{1}{z - z_0}$$

Se  $R_2 < R_1$  ho convergenza della serie di Laurent per  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  mentre se  $R_2 > R_1$  non ho convergenza.

**Teorema 10.4.**  $f \in \mathbb{H}(\{z \in \mathbb{C} : R_2 < |z - z_0| < R_1\})$ ,  $0 \leq R_2 < R_1 \Rightarrow \exists! \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  tale che

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ dove } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \text{ con } r \in (R_2, R_1)$$

*Dimostrazione.* Consultate [Garroni-Malusa] □

**Definizione 10.5** (Singolarità). Data  $f \in \mathbb{H}(E_0)$ ,  $E_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ ,  $R > 0$ ,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Diremo che  $z_0$  è una *singolarità* per  $f$ .

Tale singolarità si dice

- (i) *eliminabile* se  $c_n = 0$ ,  $n < 0$
- (ii) *polo di ordine  $m$* ,  $m > 0$ , se  $c_{-m} \neq 0$  e  $c_{-k} = 0 \forall k > m$
- (iii) *essenziale* se  $c_n \neq 0$  per infiniti  $n$  negativi

**Teorema 10.6.**  $z_0$  è eliminabile  $\Leftrightarrow \exists \delta > 0, \exists M > 0$  tali che  $|f(z)| \leq M \forall z \in B_\delta(z_0)$

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ ) Banale perchè  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$

$\Leftarrow$ ) Consideriamo  $C_R(z_0)$ ,  $R < \delta \Rightarrow$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \Rightarrow$$

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + Re^{i\theta})|}{R^{n+1}} R d\theta \leq \frac{M}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0 \text{ se } n < 0$$

Allora  $c_n = 0$  □

**Esempio 10.7.** Data  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ,  $z = 0$  è una singolarità eliminabile. (esercizio)

**Proposizione 10.8.**  $z_0$  è un polo di ordine  $m \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ )

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$$

$$= \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z)$$

Ma allora  $\varphi(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$  è olomorfa e  $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} c_{-m} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

$\Leftrightarrow$ ) Per ipotesi  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $|f(z)| > M \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .  
 Definiamo  $\varphi(z) := \frac{1}{f(z)}$ . Ma allora  $\varphi \in \mathbb{H}(B_\delta^*(z_0)) \Rightarrow |\varphi(z)| < \frac{1}{M}$  in  $B_\delta^*(z_0)$  quindi per il Teorema 10.6,  $\varphi$  ha una singolarità eliminabile per tanto

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n$$

Per ipotesi  $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0 \Rightarrow d_0 = 0$   
 Sia  $m$  il primo indice per cui  $d_m \neq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^{n+m} \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \psi(z) \end{aligned}$$

Ma allora  $\psi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+m} (z - z_0)^n$  è olomorfa e  $\psi(z_0) = d_m \neq 0$

Inoltre risulta

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m \psi(z)}$$

e  $\frac{1}{\psi(z)}$  è ben definita e olomorfa in un intorno di  $z_0$

$$\frac{1}{\psi(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{d}_n (z - z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{d}_n (z - z_0)^n \Rightarrow z_0 \text{ è un polo di ordine } m$$

□

**Esempio 10.9.** Classifichiamo la singolarità in  $z = -1$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z + 1)^2}$$

Notiamo che

$$e^z = e^{-1} e^{z+1} = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + 1)^n}{n!}$$

A questo punto

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} e^{-1} \frac{(z + 1)^n}{(n + 2)!} = \frac{e^{-1}}{(z + 1)^{-2}} + \frac{e^{-1}}{(z + 1)^{-1}} + \dots$$

Quindi  $z = -1$  è un polo di ordine 2

**Osservazione 10.10.**  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$  per  $f(z) \Leftrightarrow z_0$  è un polo di ordine  $m$  per  $\frac{1}{f(z)}$

**Teorema 10.11** (Casorati-Weierstrass).  $z_0$  è una singolarità essenziale  $\Rightarrow \forall w \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon, \forall \delta \exists z_\delta \in B_\delta(z_0)$  tale che  $|f(z) - w| < \varepsilon$

*Dimostrazione.* Per assurdo  $\exists w, \delta, \varepsilon$  tali che  $|f(z) - w| > \varepsilon \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .

Definiamo  $\varphi(x) = \frac{1}{f(z) - w}$  dove, per ipotesi,  $f(x) \neq w \forall z \in B_\delta^*(z_0)$ .

Ma allora  $\varphi \in \mathbb{H}(B_\delta^*(z_0))$  e  $|\varphi(z)| < \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow z_0$  è una singolarità eliminabile per  $\varphi$ . Supponiamo che  $z_0$  sia uno zero di ordine  $m$  per  $\varphi \Rightarrow$

$$\varphi(z) = \sum_{n=m}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \psi(z) \text{ con } \psi(z_0) \neq 0 \text{ e } \psi \text{ olomorfa.}$$

Ma allora, per come è definita  $\varphi$ , risulta  $f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^m \psi(z)}$

Ciò se  $m = 0$ ,  $f$  ha una singolarità eliminabile in  $z_0$ ; se  $m > 0$ ,  $f$  ha un polo di ordine  $m$ .

In entrambi i casi è assurdo l'ipotesi di  $z_0$  singolarità essenziale. □

Sia  $z_0$  una singolarità isolata per  $f$ ,  $f \in \mathbb{H}(B_R^*(z_0))$ ; sappiamo che vale

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - z_0)^n \text{ in } B_R^*(z_0) \text{ con } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Definizione 10.12** (Residuo). Il residuo di  $f$  in  $z_0$  è

$$Res[f, z_0] \equiv Res_{z_0}[f] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} f(z) dz$$

**Proposizione 10.13.** (i) Se  $z_0$  è eliminabile  $\Rightarrow Res_{z_0}[f] = 0$

(ii) Se  $z_0$  è un polo di ordine 1  $\Rightarrow Res_{z_0}[f] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$

(iii) Se  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $z_0$  zero di ordine 1 per  $\psi \Rightarrow Res_{z_0}[f] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$

(iv) Se  $z_0$  è un polo di ordine  $m \Rightarrow Res_{z_0}[f] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$

*Dimostrazione.* (i) Banale perché  $c_{-1} = 0$

(ii) Basta scrivere  $f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$

(iii) Segue dal punto precedente con

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)(z - z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n} \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

(iv) Basta scrivere  $(z - z_0)^m f(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m}$

□

**Esempio 10.14.**

$$f(z) = \frac{1}{(1 + z^2)^2} = \frac{1}{(i + z)^2(i - z)^2}$$

$z_0 = i$  è polo di ordine 2

$$\begin{aligned} Res_i[f] &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z + i)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} -2(z + i)^{-3} = -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

**Teorema 10.15** (dei residui).  $E$  regione regolare,  $f \in \mathbb{H}(E \setminus \{z_1, \dots, z_m\}) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E^+} f(z) dz = \sum_{j=1}^m Res_{z_j}[f]$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $E_r := E \setminus \bigcup_{j=1}^m D_r(z_j)$ ,  $D$  disco.  $f \in \mathbb{H}(E_r) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial E_r^+} f(z) dz \\ &= \int_{\partial E^+} f(z) dz - \sum_{j=1}^m \int_{C_r(z_j)} f(z) dz \\ &= \int_{\partial E^+} f(z) dz - 2\pi i \sum_{j=1}^m Res_{z_j}[f] \end{aligned}$$

□

**Teorema 10.16.**  $E$  aperto,  $\Gamma$  omologa a 0.  $S = \{\text{singolarità di } f\} = \{z_1, \dots, z_m\}$ ,  $f \in \mathbb{H}(E \setminus S) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \text{Ind}_{\Gamma}(z_j) \text{Res}_{z_j}[f]$$

*Dimostrazione.* Basta applicare il fatto, visto nell'osservazione 9.17,

$$\Gamma \underset{E^*}{\approx} \sum \text{Ind}_{\Gamma}(z_i) \partial B_{r_i}(z_i)$$

insieme al Corollario 9.16 e la definizione di residuo 10.12.

□

## 11. Applicazioni del Teorema dei Residui

Presentiamo una serie di applicazioni del teorema dei residui al calcolo di integrali di funzioni reali di una variabile reale. Iniziamo con un esempio già visto durante la correzione degli esercizi.

**Esempio 11.1.** Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

Definiamo la funzione di una variabile complessa  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} = \frac{1}{((z+ia)(z-ia))^2} = \frac{1}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$ . La funzione  $f$  ha un polo di ordine 2 in  $ia$  poichè  $\frac{1}{(z+ia)}$  è olomorfa intorno a  $ia$  e non nulla.

$$\begin{aligned} Res_{ia}[f(z)] &= \lim_{z \rightarrow ia} \left( \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{dz} ((z-ia)^2 f(z)) \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{(z+ia)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow ia} \left( (-2) \frac{1}{(z+ia)^3} \right) \\ &= -2(2ia)^{-3} = \frac{1}{4ia^3} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) &= \frac{1}{4ia^3} \end{aligned}$$

Dove con  $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$  con  $\gamma_1 = t$ ,  $t \in [-R, R]$  e  $\gamma_2 = Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . A questo punto, scrivendo in maniera esplicita l'integrale e moltiplicando per  $\frac{1}{2\pi i}$ , otteniamo

$$\int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} + \int_{C_R(0)} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz = \frac{\pi}{2a^3}$$

Ci concentriamo ora sul secondo integrale e mostriamo che in modulo va come  $\frac{1}{R^3}$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz \right| &\leq \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{|z^2 + a^2|^2} dz \leq \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{(|z|^2 - |a|^2)^2} dz \\ &\leq \max_{C_R^+(0)} \left( \frac{1}{(|z|^2 - |a|^2)^2} \right) \cdot L(C_R^+(0)) \sim \frac{1}{(R^2)^2} \cdot \pi R \sim \frac{1}{R^3} \\ \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3} \end{aligned}$$

Passiamo dunque ora ad una generalizzazione di questo esempio e a presentare alcuni casi notevoli, per ulteriori applicazioni consultare [Gamelin] [Conway].

### 1. Calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Con  $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  e  $\delta(Q) \geq \delta(P) + 2$ .

In questi casi si considera

$$\int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \left( \sum_{j=1}^n Res_{z_j} \left[ \frac{P(z)}{Q(z)} \right] \right), \text{ dove } z_j \in \{Zeri \text{ di } Q(z)\}$$

Quindi si calcolano i residui con i noti metodi ed infine si sfrutta che l'integrale su  $C_R^+(0)$  è infinitesimo per  $R \rightarrow \infty$

2. Calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx$$

Con  $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ ,  $Q(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  e  $\delta(Q) \geq \delta(P) + 2$ ,  $a \geq 0$ .

Notiamo che in questo caso non si può semplicemente considerare la funzione integranda come una funzione complessa in quanto  $\cos(ax)$  è illimitato nella direzione verticale. Considereremo dunque la funzione  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz}$ . Questa scelta è motivata dal fatto che, definendo  $\gamma_R$  come nell'esempio 11.1 l'integrale su  $\gamma_1$  della nuova funzione si riduce all'integrale che vogliamo calcolare sommato a i-volte lo stesso integrale con il seno al posto del coseno, quindi il valore dell'integrale sarà  $\Re \left( 2\pi i \left( \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} [f(z)] \right) \right)$ . Vediamo un esempio.

**Esempio 11.2.** Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx$$

Come suggerisce il ragionamento appena proposto consideriamo la funzione  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} e^{iaz} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} e^{iaz}$ , la quale presenta poli semplici in  $\pm i$ , di cui solo  $i$  è contenuto nella superficie contenuta in  $\gamma_R$ . Ora

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z)}{\psi(z)}, \text{ con } \phi(z) = \frac{e^{iaz}}{z+i} \text{ e } \psi(z) = z-i \\ \Rightarrow \text{Res}_i[f(z)] &= \frac{\phi(i)}{\psi'(i)} = \frac{e^{-a}}{2i} \\ \Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z) &= 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a} \end{aligned}$$

Adesso ragioniamo sull'integrale su  $\gamma_R$  e mostriamo che la parte su  $C_R^+(0)$  è infinitesima per  $R \rightarrow +\infty$ .

$$\begin{aligned} \pi e^{-a} &= \int_{\gamma_R} f(z) = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R^+(0)} \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R^+(0)} \frac{e^{iaRe^{i\theta}}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} R d\theta \\ &= \int_{-R}^{+R} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R^+(0)} \frac{e^{-aR \sin(\theta)} e^{iaR \cos(\theta)}}{1 + R^2 e^{i2\theta}} R d\theta \\ &\sim \int_{-R}^{+R} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx + i \int_{-R}^{+R} \frac{\sin(ax)}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{R^2} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \sin(ax) dx \\ \Rightarrow \pi e^{-a} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} \cos(ax) dx \end{aligned}$$

Nel corso di questi calcoli abbiamo utilizzato il Lemma di Jordan (sarà un esercizio nel quinto compito a casa):

*Lemma di Jordan. Vale la stima*

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \frac{\pi}{R}.$$

3. Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

Con  $R$  funzione razionale.

Anche in questo caso ci limitiamo a presentare un

**Esempio 11.3.** Calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos(\theta)}, \quad |a| < 1, a \in \mathbb{R}$$

Attraverso le sostituzioni

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} \quad ; \quad d\theta = izd\theta \Rightarrow \frac{dz}{z} = id\theta \quad ; \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

Ottengo

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos(\theta)} = \int_{C_1(0)} \frac{1}{iz \left(1 + \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)} dz = \frac{2}{i} \int_{C_1(0)} \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz$$

Siano  $z_{\pm} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$  le soluzioni dell'equazione di secondo grado  $az^2 + 2z + a$ . Notiamo che  $z_- \notin \overline{B_1(0)}$ , quindi solo  $z_+$  contribuisce al teorema dei residui. Da cui

$$\begin{aligned} \frac{2}{i} \int_{C_1(0)} \frac{1}{az^2 + 2z + a} dz &= \frac{2}{i} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_+} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a} \right] = \\ 4\pi \left( \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+) \frac{1}{a(z - z_+)(z - z_-)} \right) &= 4\pi \frac{1}{a(z - z_-)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

4. L'ultima applicazione riguarda il calcolo del valore principale di una funzione.

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  Riemann-integrabile su ogni intervallo limitato definiamo

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx$$

Analogamente se  $x_0$  è un punto singolare per  $f$  definiamo

$$PV \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right]$$

Il valore principale è quindi l'integrale generalizzato di una funzione su intervalli simmetrici rispetto ad una singolarità, o, nel caso l'integrale si effettui lungo tutto l'asse reale, su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

**Esempio 11.4.** Sfruttiamo il teorema dei residui per calcolare

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$$

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{1 + x^4} dx + \int_{C_R^+(0)} \frac{1}{1 + z^4} dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{1 + z^4} dz = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \left[ \frac{1}{1 + z^4} \right] + \operatorname{Res}_{e^{i\frac{3\pi}{4}}} \left[ \frac{1}{1 + z^4} \right] \right)$$

Svolgendo tutti i calcoli e mostrando che l'integrale su  $C_R^+(0)$  è infinitesimo per  $R \rightarrow +\infty$  ottengo che  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$  ovvero  $PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ .

## 12. Funzioni meromorfe, successioni di funzioni e teorema di Runge

In questa sezione presentiamo una nuova classe di funzioni ed alcuni risultati ad esse collegati, il teorema di Weirstrass per successioni di funzioni olomorfe e dei risultati di approssimazione di funzioni olomorfe tramite funzioni razionali (prive di singolarità) e, in condizioni più stringenti, tramite polinomi.

### 12.1. Funzioni Meromorfe

**Definizione 12.1** (Funzioni meromorfe).  $E \subseteq \mathbb{C}$

Una funzione  $f$  si dice meromorfa in  $E$  se  $\exists \mathcal{P}(f) \subset E, \mathcal{P}(f)$  senza punti di accumulazione, tale che

- $f(x)|_{E \setminus \mathcal{P}(f)}$  è olomorfa
- I punti di  $\mathcal{P}(f)$  sono poli

**Osservazione 12.2.** Sia  $a \in E$

- se è uno zero di ordine  $m$  di una funzione  $f$  olomorfa  $\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + g(z) = \frac{\text{ord}(a)}{z-a} + g(z)$  con  $g(z) \neq 0$  in un intorno di  $a$  e  $g(z) \in \mathbb{H}$
- se è un polo di ordine  $m \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{\text{ord}(a)}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$

Otteniamo dunque subito questi due teoremi

**Teorema 12.3.** Sia  $D$  regione regolare (a tratti),  $D \subseteq E$ ,  $f$  meromorfa in  $E$ , senza zeri e senza poli in  $\partial D$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z}_f - \mathcal{P}_f$$

Con  $\mathcal{Z}_f$  zeri con molteplicità e  $\mathcal{P}_f$  poli con molteplicità.

**Teorema 12.4.** Sia  $E$  dominio,  $\gamma \approx 0$ ,  $f$  meromorfa con zeri  $z_1, \dots, z_n$  e poli  $p_1, \dots, p_l$  con ordini, rispettivamente,  $m_1^0, \dots, m_n^0$  e  $m_1^\infty, \dots, m_l^\infty$ . Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_\gamma(z_j) m_j^0 - \sum_{i=1}^l \text{Ind}_\gamma(p_i) m_i^\infty$$

**Teorema 12.5** (Rouché). Siano  $f, g$  funzioni meromorfe,  $\overline{B_R(a)} \subseteq U$  senza zeri e senza poli su  $C_R(a)$ ,  $\mathcal{Z}_f, \mathcal{P}_g$ ;  $\mathcal{Z}_g, \mathcal{P}_f$  in  $B_R(a)$ . Se  $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \forall z \in C_R(a)$ , allora

$$\mathcal{Z}_f - \mathcal{P}_f = \mathcal{Z}_g - \mathcal{P}_g \quad \text{in } \overline{B_R(a)}$$

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi  $\Rightarrow \left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1$  su  $C_R(a)$

Fissato  $z$ , definiamo  $\lambda := \frac{f(z)}{g(z)}$ .  $\lambda \notin (0, +\infty)$ , infatti se  $\lambda \in (0, +\infty) \Rightarrow \lambda + 1 < \lambda + 1$ , il che è assurdo.

Sia  $\log_0$  il ramo del logaritmo con il taglio  $[0, +\infty)$ . In  $\Omega := \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$   $\log_0 \left( \frac{f}{g} \right)$  è ben definita ed è una primitiva di  $\frac{\left( \frac{f}{g} \right)'}{\left( \frac{f}{g} \right)}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{\left( \frac{f}{g} \right)'}{\left( \frac{f}{g} \right)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(a)} \frac{f'}{g} dz - \int_{C_r(a)} \frac{g'}{g} dz = (\mathcal{Z}_f - \mathcal{P}_f) - (\mathcal{Z}_g - \mathcal{P}_g)$$

□

**Osservazione 12.6.** L'usuale teorema di Rouché ha come ipotesi  $f, g$  olomorfe e  $|f(z) + g(z)| < |g(z)|$  in  $C_R(a)$  e la tesi è  $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g$ . Questa versione è chiaramente più debole. In altri libri ancora si trova  $|\phi(z)| < |\psi(z)|$  in  $C_R(a) \Rightarrow \mathcal{Z}_{\phi+\psi} = \mathcal{Z}_\psi$ . Questa si ottiene dalla versione debole vedendo che  $|(\phi(z) + \psi(z)) - \psi(z)| < |\psi(z)|$

Concludiamo questa sezione sulle funzioni meromorfe con un esempio di applicazione del teorema di Rouché ed un'altra dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

**Teorema 12.7** (Teorema fondamentale dell'algebra).  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso

*Dimostrazione.* Sia  $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ .

$$\begin{aligned} \exists \quad R \gg 0 : \left| \frac{p(z)}{z^n} - 1 \right| < 1 \quad \forall z \in C_R(0) \\ \Rightarrow \quad |p(z) - z^n| < |z|^n \quad \forall z \in C_R(0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow p(z)$  ha almeno uno zero in  $B_R(0)$  (in particolare  $n$  perchè con molteplicità). □

**Esempio 12.8.** Dimostrare che gli zeri di  $p(z) = z^4 + 6z + 3$  si trovano in  $\overline{B_2(0)}$ .

$$\begin{aligned} \psi &:= z^4 \\ \phi &:= 6z + 3 \\ |\psi(z)| &= 16 \quad |\phi(z)| = 15 \quad \text{su } C_2(0) \\ \Rightarrow \quad |\psi(z)| &< |\phi(z)| \quad \text{su } C_2(0) \\ \Rightarrow \quad \psi(z) + \phi(z) &= p(z) \text{ ha 4 zeri in } B_2(0) \end{aligned}$$

## 12.2. Successioni di funzioni olomorfe: teorema di Weierstrass

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Weierstrass presentiamo due lemmi preliminari.

**Lemma 12.9.** Sia  $f_n$  una successione di funzioni continue in  $E$ .  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ ,  $\gamma$  curva regolare a tratti di lunghezza finita. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f_n(z) - f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| dz \\ &\leq L(\gamma) \sup_{\gamma} |f_n - f| \leq L(\gamma) \sup_E |f_n - f| \leq L(\gamma) \varepsilon \end{aligned}$$

□

**Lemma 12.10.** Sia  $E$  dominio,  $K \subset E$ ,  $K$  compatto,  $f \in \mathbb{H}(E)$  allora  $\exists$  una regione regolare (a tratti)  $D$  t.c.  $\partial D \subset E \setminus K$  e  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$

*Dimostrazione.* Sia  $\delta = d(K, E^c)$ . Consideriamo la partizione dell'insieme  $E$  tramite rette, orizzontali e verticali, a distanza  $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ . Otteniamo quindi  $Q_1, \dots, Q_m$  quadrati che hanno intersezione non vuota con il compatto  $K$ .

Consideriamo  $D = \bigcup_{j=1}^m Q_j$ ; allora  $\partial D$  gode della proprietà richiesta e la formula integrale segue dalla formula di Cauchy su regioni regolari a tratti.

□

Possiamo ora enunciare il seguente

**Teorema 12.11 (Weierstrass).** Siano  $E$  un dominio,  $f_n$  una successione di funzioni,  $f_n \in \mathbb{H}(E)$ , t.c.  $f_n \rightrightarrows f$  sui compatti. Allora

1.  $f \in \mathbb{H}(E)$  ;
2.  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ;
3.  $f_n^{(k)} \rightrightarrows f^{(k)}$

*Dimostrazione.* 1.

$$z_0 \in E; \quad \delta > 0 : B_{\delta}(z_0) \subset E; \quad \gamma \text{ regolare a tratti, } \gamma \subset B_{\delta}(z_0); \quad \int_{\gamma} f_n = 0 \text{ per Cauchy}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\text{Lemma 12.9}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \\ &\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Inoltre  $f(x)|_{B_{\delta}(z_0)}$  è  $C^0$  per i noti teoremi sulla convergenza di successioni di funzioni  $\xrightarrow{\text{Morera}}$   $f \in \mathbb{H}(E)$ .

2. Sia  $z_0 \in E$  e  $B_{\delta}(z_0)$  come prima,  $D$  regione regolare t.c.  $z_0 \in D$  e  $B_{\delta}(z_0) \subseteq D$ . Definiamo  $\gamma := \partial D^+$ . Dalla formula di Cauchy per le derivate possiamo scrivere

$$f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad ; \quad f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

$$\begin{aligned}
|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| &\leq \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(z) - f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \sup_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| \\
&\leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \sup_E |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \varepsilon
\end{aligned}$$

3. Sia  $K$  un compatto contenuto in  $E$ . Per il Lemma 12.10  $\exists \delta > 0$ ;  $\exists \gamma \subset E$  :  $|z - z_0| \geq \delta \quad \forall z \in \gamma, \quad \forall z_0 \in K$ . Dunque  $\forall z_0 \in K$ , con le stesse stime del punto 2,

$$|f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \sup_E |f_n(z) - f(z)|$$

E quindi

$$\sup_K |f_n^{(k)}(z_0) - f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!L(\gamma)}{2\pi\delta^{k+1}} \sup_E |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon$$

□

### 12.3. Teorema di Runge

**Teorema 12.12** (Runge). Sia  $E$  aperto,  $K$  compatto,  $f \in \mathbb{H}(E)$ . Allora

1.  $f|_K$  è approssimabile con funzioni razionali con poli in  $K^c$ ;
2. Se  $K^c$  è connesso  $\Rightarrow f|_K$  è approssimabile (uniformemente) con polinomi.

Dimostreremo i due punti del teorema di Runge tramite due lemmi, intanto evidenziamo un dettaglio.

**Osservazione 12.13.** L'ipotesi aggiuntiva del punto 2 del teorema ci fa capire che la geometria del compatto su cui avviene l'approssimazione è cruciale.

**Lemma 12.14.** Sia  $\gamma$  regolare (a tratti),  $K$  compatto,  $\gamma \cap K \neq \emptyset$ . Allora  $\exists$  una funzione razionale  $R$  con poli in  $\gamma$  t.c.

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \varepsilon$$

*Dimostrazione.*  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ ;  $\exists r : 0 < r < d(\gamma, K)$ ;  $0 \leq s, t \leq 1$ ;  $z \in K$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| &= \left| \frac{f(\gamma(t))(\gamma(s) - z) - f(\gamma(s))(\gamma(t) - z)}{(\gamma(t) - z)(\gamma(s) - z)} \right| \\ &\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(s))\gamma(t) - z(f(\gamma(t)) - f(\gamma(s)))| \\ &\leq \frac{1}{r^2} |f(\gamma(t))||\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{1}{r^2} |\gamma(t)||f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \\ &\quad + \frac{z}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))| \quad (*) \end{aligned}$$

Dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo aggiunto e sottratto  $f(\gamma(t))\gamma(t)$ , raccolto e sfruttato la disuguaglianza triangolare. È chiaro che

$$\begin{aligned} \exists c &> 0 : \\ |z| &< c, \quad z \in K \\ |\gamma(t)| &< c, \quad t \in [0, 1] \\ |f(\gamma(t))| &< c, \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

Quindi proseguendo la disuguaglianza

$$(*) \leq \frac{c}{r^2} |\gamma(s) - \gamma(t)| + \frac{2c}{r^2} |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|$$

Dall'uniforme continuità di  $\gamma$  e  $f \circ \gamma$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_j \text{ partizione di } [0, 1] : |\gamma(t_i) - \gamma(t)| < \varepsilon \quad |f(\gamma(t_i)) - f(\gamma(t))| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j]$$

Da cui

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_j : \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} \quad \forall t \in [t_{j-1}, t_j]$$

Definisco  $R(z) = \sum_{j=1}^n f(\gamma(t_{j-1})) \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{\gamma(t_{j-1}) - z}$ . I poli di  $R$  sono  $\{\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)\}$  e sono esterni a  $K$ .

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| = \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[ \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}) - z} \right] d\gamma(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{L(\gamma)} L(\gamma) = \varepsilon$$

□

**Osservazione 12.15.** Nella dimostrazione del lemma si vede che le singolarità delle funzioni razionali approssimanti, per costruzione, sono su curve esterne al compatto  $K$ . Dunque le approssimanti razionali “esplodono” quando ci si avvicina a queste singolarità e all’infinito. I polinomi sono esattamente le funzioni razionali che “esplodono” solo all’infinito. Dunque quando le singolarità si possono scegliere arbitrariamente distanti dal compatto  $K$  sembrerebbe possibile operare un procedimento di spostamento all’infinito delle singolarità che permetterebbe di passare dall’approssimazione mediante funzioni razionali a quella polinomiale, il che è esattamente quanto afferma il punto 2 del teorema di Runge.

**Lemma 12.16.** Sia  $K$  un compatto come nel teorema di Runge, se  $K^c$  è connesso,  $z_0 \in K^c$ , allora  $\frac{1}{z-z_0}$  è approssimabile uniformemente in  $K$  tramite polinomi.

*Dimostrazione.* Siano  $R \gg 0$ ,  $C_R(0)$  e  $z_1 \in C_R^c(0)$ ,  $\forall z \in K$  vale

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = -\frac{1}{z_1} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

Siccome  $|z_1| > R \gg 0$  questa serie converge uniformemente in  $K$  (in altre parole  $\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1$ ), quindi le somme parziali, che sono polinomi, approssimano  $\frac{1}{z-z_1}$ . Ovviamente anche  $\left(\frac{1}{z-z_1}\right)^k$ ,  $k \geq 1$  è approssimato con polinomi, quindi se  $Q$  è un polinomio  $Q(S_n(z))$  converge uniformemente a  $Q\left(\frac{1}{z-z_1}\right)$ . Basta quindi dimostrare che  $\frac{1}{z-z_0}$  è approssimabile tramite polinomi nella variabile  $\frac{1}{z-z_1}$ .

Sia  $\gamma$  una curva t.c.  $\gamma(0) = z_0$  e  $\gamma(1) = z_1$ , sia  $\rho = \frac{1}{2}d(\gamma, K) > 0$ , siano  $\{w_0, \dots, w_l\}$  punti su  $\gamma$  :  $w_0 = z_0$ ,  $w_l = z_1$  e  $|w_j - w_{j-1}| = \frac{l}{2}$ .

Se  $w$  è uno di questi punti e  $w'$  è un qualsiasi punto t.c.  $|w - w'| < \rho \Rightarrow \frac{1}{z-w}$  è approssimabile tramite polinomi in  $\frac{1}{z-w'}$ . Vediamo perchè

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \frac{1}{1-\frac{w-w'}{z-w'}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-w')^n}{(z-w')^{n+1}}$$

che converge uniformemente poichè  $\forall z \in K$

$$|z-w'| = |(z-w) - (w'-w)| \geq ||z-w| - |w'-w|| > |2\rho - \rho| = \rho$$

e quindi  $\left|\frac{w-w'}{z-w'}\right| < 1$ . Utilizzando questo argomento per ogni  $j = 0, \dots, l-1$  allora si possono determinare  $l$  polinomi nelle variabili  $\frac{1}{z-w_{j+1}}$  che approssimano le funzioni  $\frac{1}{z-w_j}$  per ogni  $j = 0, \dots, l-1$ . Ricapitolando quanto appena visto,  $\forall \varepsilon > 0 \exists n \exists P_n^l$  successioni di polinomi :

1.  $\left|P_n^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K$
2.  $\left|P_n^j\left(\frac{1}{z-w_{j+1}}\right) - P_n^{j-1}\left(\frac{1}{z-w_j}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K \quad \forall j = 1, \dots, l-1$
3.  $\left|P_n^l(z) - P_n^{l-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{l+1} \quad \forall z \in K$

Ma allora  $\forall z \in K$

$$\begin{aligned} \left|P_n^l(z) - \frac{1}{z-z_0}\right| &\leq \left|P_n^l(z) - P_n^{l-1}\left(\frac{1}{z-z_1}\right)\right| \\ &+ \left|P_n^{l-1}\left(\frac{1}{z-w_l}\right) - P_n^{l-2}\left(\frac{1}{z-w_{l-1}}\right)\right| \\ &\dots \\ &+ \left|P_n^1\left(\frac{1}{z-w_2}\right) - P_n^0\left(\frac{1}{z-w_1}\right)\right| \\ &+ \left|P_n^1\left(\frac{1}{z-w_2}\right) - \frac{1}{z-z_0}\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

il che conclude la dimostrazione. □

## 13. Mappe conformi e bi-olomorfismi

### 13.1. Mappe conformi

**Definizione 13.1** (Mappe conformi). Siano  $E$  un aperto di  $\mathbb{C}$  e  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione di classe  $C^1$ .  $f$  è conforme in  $z_0 \in E$  se  $f$  conserva gli angoli.

Diamo un senso preciso a questa frase.

Siano

$$\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow E \text{ e } \gamma_2: [-1, 1] \rightarrow E$$

due curve differenziabili in 0 e con

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0 \quad \text{e} \quad \gamma_1'(0) \neq 0 \quad \gamma_2'(0) \neq 0.$$

Sia  $\alpha \in [-\pi, \pi]$  è l'angolo orientato fra  $\gamma_1'(0)$  e  $\gamma_2'(0)$ ; allora  $f$  è conforme in  $z_0$  se  $\alpha$  è anche l'angolo orientato fra  $(f \circ \gamma_1)'(0)$  e  $(f \circ \gamma_2)'(0)$ .

$f$  è conforme in  $E$  se è conforme per ogni  $z \in E$ .

**Proposizione 13.2.** Se  $f \in \mathbb{H}(E)$  e  $f'(z_0) \neq 0$ , allora  $f$  è conforme in  $z_0$ .

*Dimostrazione.* Se  $\gamma$  è una curva differenziabile in 0 con  $\gamma(0) = z_0$  si ha che

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(z_0)\gamma'(0)$$

Ma l'operazione di moltiplicazione per  $f'(z_0) \neq 0$  è la rotazione di  $\theta$  seguita dalla dilatazione di  $r$  se  $f'(z_0) = re^{i\theta}$ . Allora ogni vettore velocità di una curva in  $z_0$  viene ruotato di  $\theta$ , in particolare  $f$  preserva gli angoli in  $z_0$ .  $\square$

Vale una sorta di viceversa:

**Teorema 13.3.** Sia  $f \in C^1(E)$  conforme e con  $\left(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) \neq (0, 0)$ . Allora  $f$  è olomorfa e  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $z_0 \in E$ . Utilizzando Taylor possiamo scrivere

$$f(z) = f(z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(z - z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{z - z_0}) + o(|z - z_0|^2)$$

infatti, scrivendo  $z = x + iy$  e  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ , si ha

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(z - z_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{z - z_0}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0 + iy_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0 + iy_0)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + iy_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + iy_0)(y - y_0) = \\ &= u_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u_y(x_0, y_0)(y - y_0) + i(v_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \end{aligned}$$

cioè la parte lineare dello sviluppo di Taylor associato a  $f$ . Da questa formula otteniamo, prendendo  $\gamma(t)$  una curva differenziabile in 0 e con  $\gamma(0) = z_0$ ,

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)(\gamma(t) - \gamma(0)) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)(\overline{\gamma(t) - \gamma(0)}) + o(|\gamma(t) - \gamma(0)|^2)$$

Quindi facendo il limite del rapporto incrementale

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}(\gamma(t))\right|_{t=0} = (f \circ \gamma)'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)\gamma'(0) + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)\overline{\gamma'(0)}$$

Sia  $\gamma(t)$  la retta per  $z_0$  di angolo  $\theta$ , si ha

$$(f \circ \gamma)'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z_0)e^{i\theta} + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)(z_0)e^{-i\theta}$$

Per ipotesi  $f$  è conforme, quindi  $\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)}$  deve essere indipendente da  $\theta$ .

Ma

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)} = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) (z_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) (z_0) e^{-2i\theta}$$

Ne segue che  $\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) (z_0) = 0$ .

Allora  $f$  è olomorfa e  $f'(z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) (z_0) \neq 0$  per ipotesi □

**Osservazione 13.4.** Se  $f: E \rightarrow \Omega$  olomorfa e bigettiva, allora  $f$  è conforme.

Infatti se  $f$  è olomorfa e bigettiva abbiamo visto che  $f'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ .

Inoltre abbiamo visto che una tale applicazione ha inversa  $g = f^{-1}: \Omega \rightarrow E$  olomorfa.  $f$  si dice *bi-olomorfismo*

## 13.2. Bi-olomorfismi

Siamo interessati ai bi-olomorfismi cioè applicazioni bigettive olomorfe con inversa olomorfa, che equivale a chiedere che l'applicazione sia bigettiva e olomorfa

**Esercizio 13.5** (Trasformata di Cayley). Siano

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &:= B_1(0) \\ \mathbb{H} &:= \{z \mid \Im(z) > 0\} \end{aligned}$$

Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} F: \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\ z &\mapsto \frac{i-z}{i+z} \end{aligned} \tag{13.1}$$

Questa è ben definita ed è un bi-olomorfismo con inversa

$$\begin{aligned} G: \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{H} \\ w &\mapsto i \frac{1-w}{1+w} \end{aligned} \tag{13.2}$$

*Dimostrazione.*

$$|i-z| = d_{\mathbb{C}}(z, i) < d_{\mathbb{C}}(z, -i) = |i+z| \quad \text{se } z \in \mathbb{H}$$

quindi  $F(z) \in \mathbb{D}$ , cioè  $F$  è ben definita.

Inoltre è quoziente di funzioni olomorfe con  $i-z \neq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{H}$ .

Basta mostrare che

$$F \circ G = Id_{\mathbb{D}} \quad \text{e} \quad G \circ F = Id_{\mathbb{H}}$$

Ma per ogni  $w \in \mathbb{D}$

$$F(G(w)) = \frac{i - i \frac{1-w}{1+w}}{i + i \frac{1-w}{1+w}} = \frac{i(1+w) - i(1-w)}{i(1+w) + i(1-w)} = w$$

e per ogni  $z \in \mathbb{H}$

$$G(F(z)) = i \frac{1 - \frac{i-z}{i+z}}{1 + \frac{i-z}{i+z}} = i \frac{i+z - (i-z)}{i+z + i-z} = z$$

□

**Esempio 13.6** (Trasformate di Möbius). Un esempio importante di bi-olomorfismi sono le *trasformate di Möbius*.

Consideriamo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det(M) = 1 \right\}$$

La trasformata di Möbius associata a  $M \in SL(2, \mathbb{R})$  è

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

Se, più in generale,  $M \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$  allora possiamo ancora definire un'applicazione  $f_M$  detta *trasformazione lineare fratta*<sup>4</sup>.

Sulle trasformazioni di Möbius si hanno i seguenti risultati.

**Proposizione 13.7.** Siano  $M, M' \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ , allora

$$f_M \circ f_{M'} = f_{MM'} \quad (13.4)$$

*Dimostrazione.*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad MM' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

$$f_M \circ f_{M'}(z) = \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'}$$

□

**Proposizione 13.8.**

$$M \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad f_M \text{ è un bi-olomorfismo da } \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \quad \text{a} \quad \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$$

*Dimostrazione.* Dalla proposizione precedente si ha che

$$f_{M^{-1}}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

è l'inversa di  $f_M$

□

### 13.3. Automorfismi di $\mathbb{D}$ e $\mathbb{H}$

Sia  $E$  un dominio, definiamo

$$\text{Aut}(E) = \{ f: E \rightarrow E \mid f \text{ bi-olomorfismo} \} \quad (13.5)$$

il gruppo degli automorfismi di  $E$ .

Ci chiediamo chi sono  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $\text{Aut}(\mathbb{H})$

**Esempio 13.9** (Automorfismi di  $\mathbb{D}$ ). 1. La rotazione di angolo  $\theta$

$$r_\theta(z) = e^{i\theta} z \quad (13.6)$$

è un automorfismo di  $\mathbb{D}$  con inversa  $r_{-\theta}$ .

2.

$$\psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{D} \quad (13.7)$$

è un automorfismo di  $\mathbb{D}$ .

*Infatti* se  $z = e^{i\theta}$

$$|\psi_\alpha(z)| = \left| \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\theta}} \right| = 1$$

Quindi, per il principio del massimo modulo

$$|\psi_\alpha(z)| < 1 \quad \text{per } |z| < 1$$

Allora  $\psi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  ed è olomorfa.

Ma

$$\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \text{Id}_{\mathbb{D}} \quad (13.8)$$

Quindi  $\psi_\alpha$  è un bi-olomorfismo.

**Osservazione 13.10.**

$$\psi_\alpha(0) = \alpha \quad \psi_\alpha(\alpha) = 0 \quad (13.9)$$

<sup>4</sup>o anche, nuovamente, trasformazione di Möbius

Prima di enunciare i teoremi di struttura per gli automorfismi di  $\mathbb{D}$  e  $\mathbb{H}$  proviamo il seguente

**Lemma 13.11** (Schwartz). Sia  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  olomorfa e con  $f(0) = 0$ . Allora

(i)  $|f(z)| \leq |z|$  per ogni  $z \in \mathbb{D}$

(ii) Se esiste  $z_0 \in \mathbb{D}$  tale che  $|f(z_0)| = |z_0|$  allora  $f$  è una rotazione

(iii)  $|f'(0)| \leq 1$  e se si ha uguaglianza  $f$  è una rotazione

*Dimostrazione.* (i)  $f$  olomorfa, in un intorno di 0

$$f = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

Ma  $f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ .

Quindi

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \text{ è olomorfa e } g(0) = a_1 = f'(0)$$

Sia  $z \in C_r(0)$  con  $r < 1$ , poiché per ipotesi  $f(z) \in \mathbb{D}$  si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{z} \right| &\leq \frac{1}{r} \\ \xrightarrow[\text{mod}]{\text{max}} \left| \frac{f(z)}{z} \right| &\leq \frac{1}{r} \text{ per } z \in \overline{B_r(0)} \end{aligned}$$

Questo è vero per ogni  $r < 1$ , quindi mandando  $r$  a 1

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

(ii) per ipotesi

$$z_0 \text{ è un massimo di } \frac{f(z)}{z} \text{ in } \mathbb{D} \Rightarrow \frac{f(z)}{z} = c \quad c \text{ una costante}$$

se  $c = \rho e^{i\theta}$   $f$  è la rotazione di angolo  $\theta$  composta con la dilatazione per  $\rho$ .

Ma

$$|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow f \text{ è una rotazione}$$

(iii) sappiamo che  $|g(z)| \leq 1$  per  $z \in \mathbb{D}$ ; inoltre

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

e se c'è uguaglianza

$$|g(0)| = 1 \Rightarrow g(z) = c \text{ (principio max mod.)} \Rightarrow f(z) = cz \text{ con } |c| = 1$$

e come sopra questo implica che  $f$  è una rotazione □

Ora possiamo caratterizzare gli automorfismi del disco e del semipiano, attraverso i seguenti

**Teorema 13.12** (Automorfismi di  $\mathbb{D}$ ). Sia  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , allora esistono  $\theta \in [-\pi, \pi]$  e  $\alpha \in \mathbb{D}$  tali che

$$f = r_\theta \circ \psi_\alpha$$

*Dimostrazione.*  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , in particolare  $f$  è surgettiva, allora esiste  $\alpha \in \mathbb{D}$  tale che  $f(\alpha) = 0$ . Consideriamo

$$g = f \circ \psi_\alpha$$

dall'osservazione 13.10 abbiamo

$$g(0) = f(\psi_\alpha(0)) = f(\alpha) = 0$$

Da Schwartz

$$|g(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

Ma anche  $g^{-1}$  manda zero in zero, allora

$$|g^{-1}(w)| \leq |w| \quad \forall w \in \mathbb{D}$$

Quindi se  $w = g(z)$  mettendo insieme si ha

$$|z| = |g(z)|$$

e sempre per Schwartz  $g$  è una rotazione.

Per la 13.8

$$f \circ \psi_\alpha = r_\theta \quad \Rightarrow \quad f = r_\theta \circ \psi_\alpha$$

□

**Corollario 13.13** (Schwartz). Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$  e  $f(0) = 0$ , allora  $f$  è una rotazione.

*Dimostrazione.*

$$\psi_\alpha(0) = 0 \quad \iff \quad \alpha = 0$$

e in questo caso  $\psi_0 = -Id_{\mathbb{D}}$ .

Quindi se  $f(0) = 0$

$$f = r_\theta \circ \psi_0 = r_\theta \circ (-Id_{\mathbb{D}}) = r_{\theta+\pi}$$

□

**Teorema 13.14** (Automorfismi di  $\mathbb{H}$ ). 1. Sia  $M \in SL(2, \mathbb{R})$  e  $f_M$  la trasformata di Möbius associata a  $M$ . Allora  $f_M \in \text{Aut}(\mathbb{H})$

2. Se  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  allora

$$\exists M \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad f = f_M$$

Quindi per la proposizione 13.7 e 2.

$$\begin{aligned} \Psi: SL(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}) \\ M &\mapsto f_M \end{aligned} \tag{13.10}$$

è un omomorfismo di gruppi surgettivo.

Inoltre

$$\ker \Psi = \{\pm I\} \quad \Rightarrow \quad PSL(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm I\}} \cong \text{Aut}(\mathbb{H}) \tag{13.11}$$

*Dimostrazione.* 1. Supponiamo

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sappiamo già che  $f_M$  è un bi-olomorfismo da  $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$  a  $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$ . Dato che i poli non sono contenuti in  $\mathbb{H}$  basta provare che

$$z \in \mathbb{H} \quad \Rightarrow \quad f_M(z) \in \mathbb{H}$$

Infatti

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b \overline{cz + d}}{cz + d \overline{cz + d}} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2}$$

Quindi se  $z = x + iy$  con  $y > 0$  allora

$$\Im(f_M(z)) = \frac{ady - bcy}{|cz + d|^2} = \frac{\det(M)y}{|cz + d|^2} > 0$$

poiché  $\det(M) = 1$ .

2.

**Osservazione 13.15.**  $SL(2, \mathbb{R})$  agisce transitivamente su  $\mathbb{H}$  tramite  $f_M$  cioè

$$\forall z, z_0 \in \mathbb{H} \quad \exists M \in SL(2, \mathbb{R}) \quad t.c. \quad f_M(z_0) = z$$

Infatti basta osservare che per ogni  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  la matrice

$$M_z = \begin{pmatrix} y^{-\frac{1}{2}} & -xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

e tale che

$$f_{M_z}(z) = \frac{zy^{-\frac{1}{2}} - xy^{-\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \frac{iy^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = i$$

quindi basta prendere

$$M = M_z^{-1}M_{z_0}$$

**Osservazione 13.16.** Considerando  $F$  la trasformata di Cayley

$$F: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D} \\ z \mapsto \frac{i-z}{i+x}$$

con inversa

$$F^{-1}(w) = i \frac{1-w}{1+w} \quad F^{-1}(0) = i$$

Se

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

allora

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1} = r_{-2\theta} \quad \text{in } \mathbb{D}$$

Infatti se  $w \in \mathbb{D}$

$$F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1}(w) = F \left( \frac{i \cos \theta (1-w) - \sin \theta (1+w)}{i \sin \theta (1-w) + \cos \theta (1+w)} \right) = F \left( \frac{i e^{i\theta} - w e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + w e^{-i\theta}} \right) = e^{-2i\theta} w$$

Possiamo ora dimostrare la tesi.

Sia  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , si ha  $f(\beta) = i$  per un certo  $\beta \in \mathbb{H}$ . Per transitività

$$\exists N \in SL(2, \mathbb{R}) \quad \text{tale che} \quad f_N(i) = \beta$$

Sia

$$g = f \circ f_N \quad \Rightarrow \quad g(i) = i$$

Considero

$$F \circ g \circ F^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

si ha

$$F \circ g \circ F^{-1}(0) = 0$$

quindi, per il corollario di Schwartz

$$F \circ g \circ F^{-1} = r_{\hat{\theta}} = F \circ f_{M_\theta} \circ F^{-1} \\ \Rightarrow g = f_{M_\theta} \quad \Rightarrow \quad f \circ f_N = f_{M_\theta} \quad \Rightarrow \quad f = f_{M_\theta N^{-1}}$$

□

## 14. Teorema della mappa di Riemann

In questa sezione studieremo un classico teorema sui domini semplicemente connessi. Iniziamo con dei richiami e dei risultati preliminari.

### 14.1. Teorema di Ascoli-Arzelà e Montel

**Definizione 14.1.** Siano  $X \subseteq V$  aperto di uno spazio vettoriale normato di dimensione finita e  $(Y, d)$  spazio metrico.

$$C(X, Y) = \{\text{funzioni continue da } X \text{ a } Y\}; \quad \Phi \subseteq C(X, Y)$$

1.  $\Phi$  è *normale* se ogni successione in  $\Phi$  ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti.
2.  $\Phi$  è *uniformemente limitata sui compatti* se per ogni  $K \subseteq X$  compatto

$$\{w \in Y \mid \exists z \in K, \exists f \in \Phi, w = f(z)\}$$

è un insieme limitato in  $Y$

3.  $\Phi$  è *equicontinuo sui compatti* se per ogni  $K \subseteq X$  compatto

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \|z - w\| < \delta \Rightarrow d(f(z), g(z)) < \varepsilon \quad \forall f, g \in \Phi$$

**Teorema 14.2** (Ascoli-Arzelà). Sia  $X \subseteq V$  aperto di uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare e  $Y = \mathbb{R}^n$  con distanza euclidea.

Se  $\Phi \subseteq C(X, Y)$  è uniformemente limitato sui compatti e uniformemente equicontinuo sui compatti, allora  $\Phi$  è normale

La dimostrazione si può trovare sullo Stein e sul Rudin.

**Teorema 14.3** (Montel). Siano  $E \subseteq \mathbb{C}$  e  $\Phi \subseteq \mathcal{O}(E)$ . Se  $\Phi$  è uniformemente limitata sui compatti, allora  $\Phi$  è normale

*Dimostrazione.* Per Ascoli-Arzelà basta dimostrare che  $\Phi$  è uniformemente limitata sui compatti. Consideriamo  $K \subseteq E$  compatto,  $r > 0$  tale che  $B_{3r}(z) \subseteq E$  per ogni  $z \in K$ . Siano  $z$  e  $w$  in  $K$  tali che  $|z - w| < r$ , fissiamo  $\gamma = C_{2r}(w)$ . Se  $\zeta \in \{\gamma\}$

$$\begin{aligned} |\zeta - w| &= 2r \\ |\zeta - z| &\geq r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\zeta - z||\zeta - w|} \leq \frac{|z - w|}{2r^2}$$

Sia

$$K' = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq 2r\} \subseteq E$$

$K'$  è compatto, allora per ipotesi

$$\exists B \in \mathbb{R}^+ \text{ tale che } |f(z)| \leq B \quad \forall z \in K' \quad \forall f \in \Phi$$

Allora per ogni  $z, w \in K$  con  $|z - w| < r$  si ha, per ogni  $f \in \Phi$

$$|f(z) - f(w)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{2r}(w)} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi 2r B \frac{|z - w|}{2r^2} = \frac{B}{r} |z - w|$$

Quindi  $\Phi$  è equicontinua sui compatti □

**Osservazione 14.4.** Montel è falso in ambito reale.

Per esempio

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

è una famiglia di funzioni uniformemente limitata, ma non normale.

**Proposizione 14.5.** Sia  $G$  un dominio e  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{O}(G)$  con  $f_n$  iniettiva per ogni  $n$ . Se  $f_n$  converge uniformemente sui compatti a  $f$ , allora  $f$  è iniettiva o una costante

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $f$  non sia iniettiva

$$\Rightarrow \exists z_1 \neq z_2 \text{ tali che } f(z_1) = f(z_2)$$

per ogni  $n$  definiamo

$$g_n = f_n - f_n(z_1)$$

per ipotesi di iniettività  $g_n$  ha un unico zero in  $z_1$  per ogni  $n$ , e le  $g_n$  convergono uniformemente sui compatti a

$$g = f - f(z_1)$$

Se  $g$  non è identicamente nulla, allora  $z_2$  è uno zero di  $g$  necessariamente isolato. Quindi esiste  $r > 0$  tale che  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in \overline{B_r(z_2)}$  quindi

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_n} &\longrightarrow \frac{1}{g} && \text{uniformemente sui compatti in } C_r(z_2) \\ g'_n &\longrightarrow g' && \text{uniformemente sui compatti in } C_r(z_2) \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'_n(\zeta)}{g_n(\zeta)} d\zeta &\longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_2)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta = 1 \end{aligned}$$

Ma  $g_n$  non ha zeri in  $\overline{B_r(z_2)}$  e quindi il risultato dell'ultimo limite è assurdo.  $\square$

## 14.2. Teorema della mappa di Riemann

**Teorema 14.6** (Mappa di Riemann). Sia  $G \subseteq \mathbb{C}$  un dominio semplicemente connesso.

$$\begin{aligned} \forall z_0 \in G \quad \exists! F: G \rightarrow \mathbb{D} \quad &\text{bi-olomorfismo} \\ \text{tale che } F(z_0) = 0 \quad F'(z_0) \in \mathbb{R}^+ & \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Dividiamo la dimostrazione dell'esistenza in quattro passi.

**Passo 1** Proviamo che  $G$  è bi-olomorfo con un dominio in  $\mathbb{D}$  che contiene 0.

Per ipotesi

$$G \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} \setminus G \Rightarrow z - \alpha \text{ non si annulla mai in } G$$

E dato che  $G$  è semplicemente connesso sappiamo che esiste un ramo del logaritmo in  $G$  per  $(z - \alpha)$ , cioè

$$\exists \log_G(z - \alpha) \text{ olomorfa e tale che } e^{\log_G(z - \alpha)} = z - \alpha$$

Chiamiamo

$$L: G \rightarrow \mathbb{C}; \quad L(z) = \log_G(z - \alpha)$$

In particolare  $L$  è ovviamente iniettiva e vale

$$\text{fissato } w \in G \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } B_\varepsilon(L(w) + 2\pi i) \cap L(G) = \emptyset \quad (14.1)$$

se così non fosse esisterebbe  $\{z_n\} \subseteq G$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(z_n) = L(w) + 2\pi i$$

Ma per la continuità di  $\exp$  si avrebbe

$$\lim_n \exp(L(z_n)) = \exp(L(w)) \Rightarrow \lim_n z_n = w \Rightarrow \lim_n L(z_n) = L(w)$$

che è una contraddizione.

In conclusione grazie a 14.1 possiamo definire l'applicazione

$$F: G \rightarrow \mathbb{C}; \quad F(z) = \frac{1}{L(z) - (L(w) + 2\pi i)}$$

iniettiva, poiché  $L$  è iniettiva.

$$\Rightarrow F: G \rightarrow F(G) \quad \text{è un bi-olomorfismo}$$

e sempre per 14.1

$$|F(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z \in G$$

$F$  è olomorfa e limitata, quindi, a meno di riscaldamenti e traslazioni, possiamo supporre

$$F(G) \subseteq \mathbb{D} \quad \text{e} \quad 0 \in F(G)$$

**Passo 2** Grazie al passo 1 possiamo assumere  $G \subseteq \mathbb{D}$  e  $0 \in G$ . Consideriamo la famiglia

$$\Phi = \{f: G \rightarrow \mathbb{D} \mid f \text{ olomorfa, iniettiva, } f(0) = 0\}$$

l'inclusione di  $G$  in  $\mathbb{D}$  è un elemento di  $\Phi$  che quindi non è vuoto.

Dato che ogni  $f \in \Phi$  ha valori in  $\mathbb{D}$ ,  $\Phi$  è uniformemente limitata; inoltre dalle stime di Cauchy su  $f^{(n)}$  per  $f$  olomorfa sappiamo

$$\begin{aligned} \exists c > 0 \quad \text{tale che} \quad |f'(0)| &\leq c \\ \Rightarrow s = \sup_{f \in \Phi} |f'(0)| &\quad \text{esiste finito} \end{aligned}$$

**Passo 3** Mostriamo ora che esiste  $f \in \Phi$  tale che  $s = |f'(0)|$ .

Per definizione di estremo superiore

$$\exists \{f_n\} \subseteq \Phi \quad \text{tale che} \quad \lim_n |f'_n(0)| = s$$

Per Montel esiste una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge uniformemente sui compatti a una funzione  $f$ .

Per il teorema di Weierstrass sappiamo che  $f$  è olomorfa e che

$$f_{n_k}^{(l)} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} f^{(l)} \quad \text{uniformemente sui compatti}$$

quindi ovviamente

$$|f'(0)| = s$$

Poiché  $s > 0$   $f$  non è costante, quindi per la proposizione 14.5  $f$  è iniettiva, e  $f(0) = 0$  poiché  $f_{n_k}(0) = 0$  per ogni  $n_k$ . Inoltre

$$|f(z)| \leq 1 \quad \forall z \in G$$

ma dall'olomorfia di  $f$  segue che

$$|f(z)| < 1 \quad \forall z \in G$$

Quindi  $f(z) \in \mathbb{D} \quad \forall z \in G$  e possiamo concludere che  $f \in \Phi$ .

**Passo 4** Abbiamo costruito  $f: G \rightarrow \mathbb{D}$  iniettiva e olomorfa con  $f(0) = 0$  (dal passo 1 possiamo assumere  $z_0 = 0$ ).  $f$  è un bi-olomorfismo con la sua immagine, vogliamo dimostrare che è surgettiva.

Supponiamo per assurdo che non lo sia

$$\exists \alpha \in \mathbb{D} \quad \alpha \notin f(G)$$

Consideriamo

$$\psi_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{D}) \quad \psi_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

Sia  $G' = \psi_\alpha(f(G)) \subseteq \mathbb{D}$ .  $G'$  è semplicemente connesso e  $0 \notin G'$ , poiché  $0 = \psi_\alpha(\alpha)$  e  $\alpha \notin f(G)$ . Ne segue che esiste un ramo della radice in  $G'$ , cioè

$$\exists g \text{ olomorfa e tale che } g^2(w) = w \quad \forall w \in G'$$

Definiamo

$$F = \psi_{g(\alpha)} \circ g \circ \psi_\alpha \circ f$$

$F \in \Phi$  poiché  $F(0) = 0$  ed è composizione di funzioni olomorfe, iniettive e a valori in  $\mathbb{D}$ .

Se  $h(w) = w^2$

$$f = \underbrace{\psi_\alpha \circ h \circ \psi_{g(\alpha)}}_H \circ F = H \circ F$$

$H: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  è un olomorfismo con  $H(0) = 0$ , valgono le ipotesi del lemma di Schwartz e dato che  $H$  non è iniettiva non può essere una rotazione, allora

$$\begin{aligned} |H'(0)| &< 1 \\ \text{ma si ha } f'(0) &= H'(0)F'(0) \\ \Rightarrow |f'(0)| &< |F'(0)| \end{aligned}$$

che contraddice la massimalità di  $|f'(0)|$ . Quindi  $f: G \rightarrow \mathbb{D}$  è un bi-olomorfismo, e per avere  $f'(0) \in \mathbb{R}^+$  basta comporre con  $r_\theta$  opportuno.

Per dimostrare l'unicità ora consideriamo

$$F, \tilde{F}: G \rightarrow \mathbb{D} \text{ bi-olomorfismi tali che } F(z_0) = \tilde{F}(z_0) = 0 \text{ e } F'(z_0), \tilde{F}'(z_0) \in \mathbb{R}^+$$

Allora  $F \circ \tilde{F}^{-1}$  è un automorfismo di  $\mathbb{D}$ ; dal corollario di Schwartz

$$F \circ \tilde{F}^{-1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad F \circ \tilde{F}^{-1} \text{ è una rotazione}$$

Quindi

$$\left( F \circ \tilde{F}^{-1} \right)'(0) = e^{i\theta}$$

ed è reale

$$\Rightarrow \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \tilde{F}$$

□

**Corollario 14.7.** Dati due domini semplicemente connessi e diversi da  $\mathbb{C}$  essi sono bi-olomorficamente equivalenti.

## 15. Caratterizzazione dei domini semplicemente connessi

L'obiettivo principale è dimostrare un teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi di  $\mathbb{C}$ . La dimostrazione del teorema sfrutta principalmente gli argomenti trattati fino ad ora nel corso ma richiede l'introduzione di due nuovi oggetti: la sfera di Riemann e le funzioni armoniche.

### 15.1. Sfera di Riemann

La sfera di Riemann è la compattificazione di Alexandrov dello spazio topologico  $\mathbb{C}$ . Questo significa che la sfera di Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  è definita come  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , ossia si aggiunge un punto all'infinito al piano  $\mathbb{C}$ . Si osserva che questa non è altro che una modellizzazione della retta proiettiva complessa  $\mathbb{C}P^1$ . Essendo la compattificazione di  $\mathbb{C}$ , la sfera di Riemann ha la topologia della compattificazione quindi  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  è un aperto se

(i)  $U$  è contenuto in  $\mathbb{C}$  ed è un aperto di  $\mathbb{C}$  dotato dell'usuale topologia;  
oppure

(ii)  $\infty \in U$  ed esiste un  $R > 0$  per cui  $(\overline{B_r(0)})^c \subset U$ .

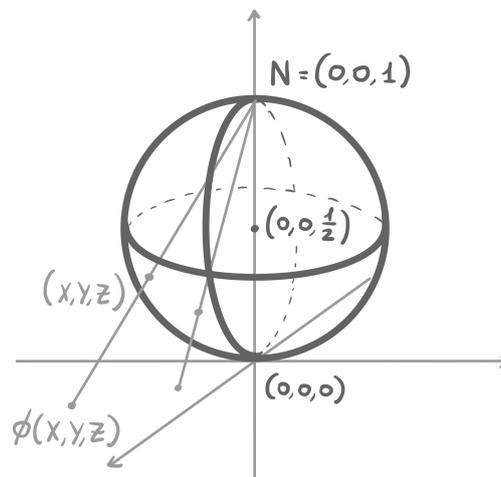
Il motivo per cui si parla di "sfera" di Riemann è che si può costruire un omeomorfismo tra  $S^2$  e  $\hat{\mathbb{C}}$ . Per costruirlo si parte dalla proiezione stereografica  $\phi: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  (dove si prende  $S^2$  centrata in  $(0, 0, \frac{1}{2})$  e di raggio  $\frac{1}{2}$ , con  $N = (0, 0, 1)$ ) che ad ogni punto  $(X, Y, Z)$  della sfera associa l'intersezione tra la retta passante per  $N$  e  $\mathbb{C}$  (identificato con  $\{z \in \mathbb{C} : z = 0\}$ ). Questa  $\phi$  è un omeomorfismo e la sua espressione è

$$\phi(X, Y, Z) = \left( \frac{X}{1-Z}, \frac{Y}{1-Z}, 0 \right)$$

$\phi$  ammette un'inversa che mappa

$$(x, y, 0) \mapsto \left( \frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

La proiezione stereografica si estende ad un'applicazione  $\hat{\phi}: S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ponendo  $\hat{\phi}(N) = \infty$  e  $\hat{\phi}|_{S^2 \setminus N} = \phi$ . Si osserva a questo punto che  $\hat{\mathbb{C}}$  è compatto e semplicemente connesso.



Si dà a questo punto l'enunciato del teorema.

**Teorema 15.1.** Sia  $E$  un dominio in  $\mathbb{C}$ . Sono equivalenti

1.  $E$  è semplicemente connesso
2.  $Ind_\gamma(a) = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma$  in  $E$  e per ogni  $a \in \mathbb{C} \setminus E$

3.  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso
4. Per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  esiste una successione di polinomi  $\{p_n\}$  tali che  $p_n \rightarrow f$  uniformemente sui compatti
5. per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  si ha  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  per ogni curva chiusa  $\gamma \subset E$
6. ogni funzione  $f \in \mathcal{O}(E)$  ammette primitiva
7. per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$  con  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$  esiste una funzione  $g$  olomorfa in  $E$  tale che  $\exp(g(z)) = f(z)$  (ossia esiste un ramo del logaritmo)
8.  $E$  è omeomorfo al disco unitario  $\mathbb{D}$
9. ogni funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  ammette un'armonica coniugata

Il punto (9) necessita un approfondimento sulle funzioni armoniche.

## 15.2. Funzioni armoniche

**Definizione 15.2.** Una funzione  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  si dice armonica se è di classe  $C^2$  e se è nel nucleo del laplaciano, ossia se  $\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0$ .

L'interesse per le funzioni armoniche nel contesto della teoria delle funzioni di variabile complessa viene dal fatto che se  $f$  è olomorfa e si scrive come  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  allora le due funzioni  $u$  e  $v$  sono armoniche. Infatti  $u$  e  $v$  sono di classe  $C^\infty$  (dunque in particolare  $C^2$ ) e da C-R vale che

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Derivando la prima equazione per  $x$  e la seconda per  $y$  e sfruttando il teorema di Schwartz per le derivate miste si ottiene

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx} \end{cases} \Rightarrow \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{yx} = 0$$

L'analogo vale per  $v$ .

**Definizione 15.3.** Se la funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  è la parte reale di una funzione olomorfa  $f \in \mathcal{O}(E)$  allora si dice che  $u$  ammette armonica coniugata e la funzione  $v: E \rightarrow \mathbb{R}$  per cui vale  $f = u + iv$  si dice l'armonica coniugata di  $u$ .

Verrebbe da chiedersi se ci sono delle condizioni che assicurino l'esistenza di un'armonica coniugata e se esistono quali sono. Un teorema assicura l'esistenza dell'armonica coniugata in due tipi di domini.

**Teorema 15.4.** Se  $E = \mathbb{C}$  oppure  $E = B_r(0)$  allora una funzione armonica  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  ammette un'armonica coniugata.

Per la dimostrazione, che non è difficile, rimandiamo a [Garroni-Malusa].

**Osservazione 15.5.** Supponendo che la funzione armonica  $u$  ammetta armonica coniugata, due sue armoniche coniugate  $v_1$  e  $v_2$  differiscono di una costante. Infatti si ha che le due funzioni  $f_1 = u + iv_1$  e  $f_2 = u + iv_2$  sono olomorfe per ipotesi. Dunque lo è anche la loro differenza  $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ . Questa funzione ammette solo valori immaginari quindi (come avevamo visto in un esercizio del primo foglio) è costante. Ne segue che  $v_1 - v_2$  è una costante.

### 15.3. Teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi

Si può a questo punto dimostrare il teorema.

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue il seguente schema. Si mostra che

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (1)$$

Per poi mostrare che l'affermazione (9) è equivalente con l'affermazione (7).

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Sia  $\gamma$  una qualunque curva chiusa in  $E$ . Visto che  $\pi_1(E) = \{0\}$ , sappiamo che  $\gamma$  è omotopa a 0 e che dunque vale che  $Ind_\gamma(a) = \int_\gamma \frac{1}{z-a} = 0$  per ogni  $a \in \mathbb{C} \setminus E$  (questo perché  $\frac{1}{z-a}$  è olomorfa in  $E$ ). E questo è quanto si voleva dimostrare.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Vogliamo dimostrare che  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso quindi supponiamo che non lo sia e che dunque si possa scrivere  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E = A \cup B$  con  $A$  e  $B$  due chiusi in  $\hat{\mathbb{C}}$  disgiunti. Sia  $B$  il chiuso che contiene  $\{\infty\}$ . Allora  $A$  è un compatto di  $\mathbb{C}$  poiché è sia chiuso che limitato ( $B$  si è fatto carico della parte illimitata). Chiamiamo a questo punto  $E_1 = E \cup A = \hat{\mathbb{C}} \setminus B$  che è un aperto in  $\mathbb{C}$  e che contiene  $A$ . Per dimostrare il teorema di Runge avevamo dimostrato il seguente lemma

**Lemma 15.6.** Dato  $E$  un aperto e  $K \subset E$  un compatto, esiste una regione regolare  $D$  tale che  $D \subset E \setminus K$  e  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ .

Questa regione  $D$  ha come bordo l'unione di una collezione di curve regolari a tratti  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\} \subset E_1 \setminus A = E$  approssimanti il bordo del compatto  $A$  e quindi vale che  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^l \int_{\gamma_i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  per ogni  $z \in A$  e per ogni  $f \in \mathcal{O}(E)$ . Scegliendo  $f = 1$  si ottiene che

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^l \int_{\gamma_i} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{i=1}^l Ind_{\gamma_i}(z) \quad \text{per } z \in A$$

Uno degli addendi nella sommatoria è sicuramente diverso da 0. Tuttavia  $A \subset \mathbb{C} \setminus E$  quindi abbiamo trovato  $a \in A \subset \mathbb{C} \setminus E$  per cui  $\sum_{i=1}^l Ind_{\gamma_i}(a) \neq 0$ . Questo è assurdo quindi  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  è connesso.

$$(3) \Rightarrow (4)$$

Per dimostrare questo passaggio enunciamo un lemma.

**Lemma 15.7.** Sia  $K \subset E$  un compatto. Allora esiste  $\tilde{K}$  un compatto tale che  $K \subset \tilde{K} \subset E$  e che ogni componente connessa di  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  contiene una componente connessa di  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ .

Siccome per ipotesi  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  ha un'unica componente connessa (poiché è connesso) allora anche  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  ha un'unica componente connessa. In particolare si ha che  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \tilde{K}$  è connesso e contiene  $\{\infty\} \cup \left(\overline{B_R(0)}\right)^c$  per un certo  $R \gg 0$ . Dunque per ogni punto  $p \in \tilde{K}^c$  esistono un  $R \gg 0$ , un  $\varepsilon > 0$  e una curva  $\gamma$  tali che  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(1) \in C_{R+\varepsilon}(0)$ . Procedendo come nella dimostrazione del teorema di Runge si riesce a dire che  $f|_{\tilde{K}}$  è approssimabile uniformemente con polinomi. Dunque anche  $f|_K$  è approssimabile uniformemente con polinomi.

$$(4) \Rightarrow (5)$$

Data l'uniforme convergenza sui compatti, si passa il limite sotto al segno di integrale e si sfrutta che  $\int_\gamma p_n = 0$  (che vale perché i polinomi ammettono primitiva). Dunque

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\gamma p_n = \int_\gamma \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \rightarrow \int_\gamma f = 0$$

(5)  $\Rightarrow$  (6)

Già visto durante il corso, vedere il Corollario 5.21.

(6)  $\Rightarrow$  (7)

Già visto durante il corso, vedere la dimostrazione della Proposizione 7.8.

(7)  $\Rightarrow$  (8)

Nella dimostrazione del teorema della mappa di Riemann l'ipotesi di semplice connessione del dominio  $G$  viene sfruttata solo per garantire l'esistenza del ramo del logaritmo in  $G$  (nel passo 1) e della radice quadrata (nel passo 2). L'esistenza di un ramo del logaritmo implica anche l'esistenza della radice quadrata. Dunque, se vale l'ipotesi (7), il teorema della mappa di Riemann continua a valere anche per domini per i quali non viene fatta l'ipotesi di semplicemente connessione. Esiste dunque un bi-olomorfismo  $F: E \rightarrow \mathbb{D}$ . In particolare  $F$  è un omeomorfismo quindi  $E$  è omeomorfo a  $\mathbb{D}$ .

Se  $E = \mathbb{C}$  allora si sfrutta l'omeomorfismo  $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  tale che  $z \mapsto \frac{z}{|z| + 1}$ .

(8)  $\Rightarrow$  (1)

Questo passaggio è ovvio poiché  $\mathbb{D}$  è semplicemente connesso e se due spazi topologici sono omeomorfi allora hanno gruppo fondamentale isomorfo (dunque  $\pi_1(E) = \{0\}$ ).

(7)  $\Rightarrow$  (9)

Se  $E \neq \mathbb{C}$  e assumendo l'ipotesi (7) si può applicare il teorema della mappa di Riemann e affermare che esiste un bi-olomorfismo  $h: E \rightarrow \mathbb{D}$ . Sia ora  $u: E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica e consideriamo la funzione  $u_1 = u \circ h^{-1}$ .

**Osservazione 15.8.** In generale vale che se  $u$  è  $C^2(E)$  e se  $\phi: \tilde{E} \rightarrow E$  è un bi-olomorfismo allora

$$\Delta(u \circ \phi) = (\Delta u \circ \phi)|\phi'|^2$$

La dimostrazione è un conto non difficile basato sull'applicazione ripetuta della regola di derivazione per le funzioni composte. In particolare vediamo che se  $u$  è armonica allora anche  $u \circ \phi$  è armonica.

Essendo  $u_1$  un'armonica sul disco e ricordando il teorema 15.4 si ha che  $u_1$  ammette un'armonica coniugata (la chiamiamo  $v_1$ ). Quindi  $f = u_1 + iv_1$  è olomorfa sul disco. Ponendo  $f = f_1 \circ h$  si ha che  $f = u + iv$  con  $v = v_1 \circ h^{-1}$ . Dunque  $f$  è olomorfa e  $v$  è l'armonica coniugata di  $u$ .

Se  $E = \mathbb{C}$  basta appellarsi al teorema 15.1.

(9)  $\Rightarrow$  (7)

Sia  $f \in \mathcal{O}(E)$  e  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in E$ . Consideriamo  $u = \operatorname{Re}(f)$  e  $v = \operatorname{Im}(f)$ . Sia  $U = \log |f|$ ; un conto mostra che  $U$  è armonica. Per ipotesi esiste  $V$  armonica coniugata di  $U$  tale che  $g = U + iV$  è una funzione olomorfa. Sia  $h = \exp(g)$ . Si osserva che  $h$  è olomorfa e mai nulla. Si ha inoltre

$$\left| \frac{f(z)}{h(z)} \right| = \frac{|f(z)|}{|e^U e^{iV}|} = \frac{|f(z)|}{|e^U|} = \frac{|f(z)|}{|f(z)|} = 1$$

Dunque  $\frac{f}{h}$  è olomorfa (poiché rapporto di funzioni olomorfe) e ha  $|\frac{f}{h}| = \text{costante}$ . Dunque  $\frac{f}{h}$  è una funzione costante e vale che

$$f(z) = c \cdot h(z) = c \exp(g(z)) = \exp(g(z) + c_1) \quad \text{con } c, c_1 \in \mathbb{C}$$

Che è quello che volevamo dimostrare. □

## 16. Introduzione alle superfici di Riemann

### 16.1. Definizioni di base e primi esempi

In questa sezione studieremo le Superfici di Riemann, le quali sono un particolare tipo di varietà differenziabile (argomento trattato nel corso di Geometria 2).

**Definizione 16.1.** Una varietà topologica di dimensione  $n$  è uno spazio di Hausdorff  $X$  a base numerabile tale che  $\forall x \in X$  esiste un intorno aperto  $U_x$  di  $x$  omeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 16.2.** Consideriamo una varietà topologica  $X$  di dimensione 2. Si definisce carta complessa una coppia  $(U, \varphi)$  tale che  $U$  sia un aperto di  $X$  e  $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  sia un omeomorfismo, dove  $V$  è un aperto di  $\mathbb{C}$ .

Diremo che due carte  $(U_1, \varphi_1)$  e  $(U_2, \varphi_2)$  sono olomorficamente compatibili se  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  oppure  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  è un biolomorfismo.

Questo procedimento di richiedere un tipo particolare di compatibilità tra le carte sulla varietà è molto utilizzato in geometria, ed è lo stesso tramite cui si definiscono le varietà differenziabili (richiedendo la compatibilità  $C^\infty$ ).

**Definizione 16.3.** Un atlante complesso  $\mathcal{A}$  su  $X$  è una collezione di carte su  $X$   $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  olomorficamente compatibili a due a due e tali che  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

Diremo che due atlanti  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  sono equivalenti se ogni carta in  $\mathcal{A}$  è olomorficamente equivalente ad ogni carta di  $\mathcal{A}'$

Osserviamo che due atlanti sono equivalenti se e soltanto se la loro unione è a sua volta un atlante.

**Proposizione 16.4.** Essere atlanti equivalenti è una relazione di equivalenza.

*Dimostrazione.* Riflessività: ogni atlante è equivalente a se stesso in quanto carta in esso è olomorficamente compatibile a tutte le altre.

Simmetria: segue dall'osservazione precedente, per simmetria dell'unione.

Transitività: consideriamo tre atlanti  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  e  $\mathcal{A}_3$  e supponiamo che  $\mathcal{A}_1$  sia equivalente ad  $\mathcal{A}_2$ , che a sua volta è equivalente a  $\mathcal{A}_3$ . Siano  $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$  e  $(U_3, \varphi_3) \in \mathcal{A}_3$ . Se  $U_1 \cap U_3 = \emptyset$  non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo che tale intersezione non sia vuota. Allora esiste una carta  $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2$  tale che  $U_2 \cap (U_1 \cap U_3) \neq \emptyset$  (perché preso un punto in  $U_1 \cap U_3$  esiste una corrispondente carta in  $\mathcal{A}_2$ ) Ma allora  $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ . Quindi, siccome  $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$  e  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  sono biolomorfismi, anche  $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$  lo è.  $\square$

Alla luce di questa proposizione, ha senso considerare classi di equivalenza di atlanti.

**Definizione 16.5.** Una struttura complessa su una varietà topologica è una classe di equivalenza di atlanti complessi  $[\mathcal{A}]$ .

Osserviamo che ogni classe di equivalenza di atlanti complessi avrà un rappresentante "privilegiato", ossia l'unione di tutti gli atlanti di tale classe. Tale atlante prenderà il nome di atlante massimale.

Siamo finalmente pronti a definire le superfici di Riemann.

**Definizione 16.6.** Una superficie di Riemann è una coppia  $(X, [\mathcal{A}])$ , dove  $X$  è una varietà topologica connessa di dimensione 2 e  $[\mathcal{A}]$  è una classe di equivalenza di atlanti complessi per  $X$ .<sup>5</sup>

Illustriamo qualche esempio di superfici di Riemann:

**Esempio 16.7.**  $X = \mathbb{C}$ , munito dell'atlante  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}, Id)\}$  è una superficie di Riemann.

**Esempio 16.8.**  $X = E \subset \mathbb{C}$  dominio, munito dell'atlante  $\mathcal{A} = \{(E, Id)\}$  è una superficie di Riemann.

<sup>5</sup>Spesso, per alleggerire la notazione, indicheremo con  $X$  la superficie di Riemann  $(X, [\mathcal{A}])$ .

**Esempio 16.9.** Data una funzione olomorfa  $f: E \rightarrow \mathbb{C}$  dove  $E$  è un dominio in  $\mathbb{C}$ , allora l'insieme

$$Gr(f) = \{(z, w) \in E \times \mathbb{C} \mid w = f(z)\}$$

è una superficie di Riemann, il cui atlante massimale è formato dall'unica carta  $\varphi: Gr(f) \rightarrow E$  tale che  $\varphi(z, f(z)) = z$  e la cui inversa manda  $z$  nella coppia  $(z, f(z))$

**Osservazione 16.10.** L'esempio precedente si può generalizzare attraverso il teorema del Dini in ambito complesso (il quale considera una funzione a due variabili complesse).

In particolare, se  $f(z, w)$  è un polinomio irriducibile di due variabili, allora possiamo considerare la curva algebrica piana  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$ . Se  $X$  è priva di punti singolari, ossia  $(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}) \neq (0, 0)$  in  $X$ , allora vale il seguente teorema.

**Teorema 16.11.** Sia  $f(z, w)$  un polinomio irriducibile e  $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z, w) = 0\}$  tale che  $(\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w}) \neq (0, 0) \forall (z, w) \in X$ . Allora  $X$  è connessa ed è una superficie di Riemann.

Prima di proseguire, diamo altri esempi di superfici di Riemann.

**Esempio 16.12.** La sfera di Riemann  $\mathbb{C}P^1$  è una superficie di Riemann.

Essendo omeomorfa alla sfera  $S^2$ ,  $\mathbb{C}P^1$  è una varietà topologica compatta e semplicemente connessa.

Muniamo  $\mathbb{C}P^1$  dell'atlante  $\mathcal{A}$  formato dalla coppia di carte  $\{(\mathbb{C}, \varphi_1), (\mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}, \varphi_2)\}$ , dove le  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono definite nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} & \varphi_1(z) &= z \\ \varphi_2: \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^* & \varphi_2(z) &= \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{se } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{se } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

È immediato verificare che esse siano carte. Mostriamo che siano olomorficamente compatibili.

Osserviamo che  $\mathbb{C} \cap (\mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}) = \mathbb{C}^*$ , quindi studiamo la composizione  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Vale che  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ , essa è quindi olomorfa e biettiva su  $\mathbb{C}^*$ , per cui è un biolomorfismo.

## 16.2. Tori

I tori sono un esempio di superficie di Riemann di grande interesse in quanto, come vedremo, mettono in luce una distinzione fondamentale tra le superfici differenziabili reali e le superfici di Riemann.

Per definire cosa sia un toro, è necessario dare prima la definizione di reticolo sul piano complesso.

**Definizione 16.13.** Dati due numeri complessi  $\omega_1$  e  $\omega_2$   $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti (ossia non sono l'uno un multiplo reale dell'altro), possiamo definire il reticolo<sup>7</sup>  $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  come l'insieme  $\Gamma = \{n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ .

**Osservazione 16.14.** E' chiaro che  $\Gamma$  sia un gruppo abeliano rispetto alla somma definita su  $\mathbb{C}$ .

Osserviamo inoltre che  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  per traslazione e che tale azione è propriamente discontinua, ossia ogni  $x \in \mathbb{C}$  ammette un intorno aperto tale che  $g(U) \cap U = \emptyset$  per ogni  $g \in \Gamma$  diverso da 0.

Alla luce di quanto detto, possiamo considerare l'insieme quoziente  $\mathbb{C}/\Gamma$  (questo quoziente può essere inteso sia come quello per un sottogruppo di  $\mathbb{C}$  che come quello rispetto alla relazione di equivalenza  $z \sim z' \Leftrightarrow z$  e  $z'$  appartengono alla stessa  $\Gamma$ -orbita).

**Definizione 16.15.** L'insieme  $\mathbb{C}/\Gamma$  prende il nome di toro.

Attraverso la proiezione canonica  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  possiamo dotare  $\mathbb{C}/\Gamma$  della topologia quoziente.

Osserviamo inoltre che  $\mathbb{C}/\Gamma$  è un insieme connesso e compatto, in quanto immagine attraverso  $\pi$  (continua per definizione di topologia quoziente) del parallelogramma  $\{s\omega_1 + t\omega_2 \mid s, t \in [0, 1]\}$ .

Il nostro scopo è di mostrare che i tori sono superfici di Riemann. Per farlo, è necessario dotarli di una struttura complessa.

<sup>6</sup>Analogamente a quanto fatto durante il corso di Geometria 1

<sup>7</sup>In inglese Lattice

**Osservazione 16.16.** Dato che l'azione di  $\Gamma$  su  $\mathbb{C}$  è propriamente discontinua, la proiezione al quoziente è un rivestimento, dunque è anche un omeomorfismo locale. Da questo segue che i tori siano anche spazi di Hausdorff localmente euclidei.

Verifichiamo direttamente che  $\pi$  sia un omeomorfismo locale.

Osserviamo preliminarmente che  $\pi$  è una mappa aperta<sup>8</sup>, in quanto  $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$  che è aperto per ogni scelta di  $V$  aperto in  $\mathbb{C}$ .

Sia  $z \in \mathbb{C}$  e  $r > 0$  tale che  $0 < 2r < \min\{|n\omega_1 + m\omega_2| \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ e } (n, m) \neq (0, 0)\}$  e consideriamo  $B_r(z)$ . Allora l'applicazione  $\pi : B_r(z) \rightarrow \pi(B_r(z))$  è un omeomorfismo, infatti:

- è continua;
- è aperta;
- è iniettiva per la scelta di  $r$ ;
- è suriettiva per definizione.

**Osservazione 16.17.**  $\varphi : U \subset \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow B$  definita come l'inversa di  $\pi|_{B_r(z)}$  è una carta. Consideriamo l'atlante  $\mathcal{A}$  costituito da tutte queste carte al variare di  $z \in \mathbb{C}$  e mostriamo che sia un atlante complesso. Per farlo, consideriamo  $U_1$  e  $U_2$  non disgiunti e la composizione  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ . Sia  $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ . Chiamiamo  $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ .

Osserviamo che  $\psi(z)$  è tale che  $\pi(\psi(z)) = (\pi \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z) = (Id \circ \pi)(z) = z$ , dunque  $\psi(z) - z \in \Gamma$  per ogni  $z$ . Essendo però  $\psi(z) - z$  continua e definita su un connesso ne segue che la sua immagine è un insieme connesso in  $\Gamma$ , ossia un singolo punto ( $\Gamma$  è un insieme discreto). Dunque  $\psi(z) - z$  è costante, ovvero  $\exists \tilde{n}, \tilde{m} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tali che  $\psi(z) = z + \tilde{m}\omega_1 + \tilde{n}\omega_2$ . Ne segue che  $\psi$  è olomorfa e, ragionando in maniera analoga, anche  $\psi^{-1}$  lo è.

Dalle osservazioni precedenti segue che il toro  $\mathbb{C}/\Gamma$  è una superficie di Riemann.

### 16.3. Mappe olomorfe su superfici di Riemann

Allo stesso modo in cui si definiscono le applicazioni differenziabili su varietà differenziabili, vogliamo estendere il concetto di funzioni olomorfe alle superfici di Riemann.

**Definizione 16.18.** Consideriamo una superficie di Riemann  $X$ . Un'applicazione  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  si dice olomorfa se per ogni carta  $(U, \varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C})$  la composizione  $f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa. Se  $Y \subset X$  è un aperto, definiamo analogamente le funzioni olomorfe su  $Y$ .

Indichiamo le funzioni olomorfe su  $X$  con  $\mathcal{O}(X)$

**Definizione 16.19.** Date due superfici di Riemann  $X$  e  $Y$ , diciamo che un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  è una mappa olomorfa se per ogni coppia di carte  $(U_1, \varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subset \mathbb{C})$  (su  $X$ ) e  $(U_2, \varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{C})$  (su  $Y$ ) si ha che  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$  è olomorfa. Chiameremo bi-olomorfismi le mappe olomorfe biettive con inversa olomorfa.

Le superfici di Riemann si classificano a meno di bi-olomorfismi.

Enunciamo due importanti risultati riguardanti le funzioni olomorfe su superfici di Riemann (essi non sono altro che la generalizzazione di risultati già visti nel caso di funzioni olomorfe da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ ).

**Teorema 16.20.** Sia  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$  a valori in  $\mathbb{C}$ , dove  $U \subset X$  è un aperto e  $X$  è una superficie di Riemann, limitata in un intorno di  $a$ . Allora  $f$  si estende ad una funzione  $\tilde{f} \in \mathcal{O}(U)$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo una carta locale  $(U_a, \varphi : U_a \rightarrow V \subset \mathbb{C})$ , dove  $U_a$  è un intorno di  $a$ . Allora  $f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa in  $V \setminus \{\varphi(a)\}$  e limitata in un intorno di  $\varphi(a)$ , dunque si estende ad una funzione  $F \in \mathcal{O}(V)$ .

Ne segue che  $\tilde{f} := F \circ \varphi$  è un'estensione di  $f$  olomorfa su tutto  $U$ . □

**Teorema 16.21.** (Principio di identità per mappe olomorfe)

Date  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  mappe olomorfe tra superfici di Riemann tali che l'insieme  $A = \{p \in X \mid f_1(p) = f_2(p)\}$  ha un punto di accumulazione  $a \in X$ , allora  $f_1 \equiv f_2$ .

<sup>8</sup>ricordiamo che un insieme è aperto in topologia quoziente se e soltanto se la sua controimmagine attraverso  $\pi$  è aperta.

*Dimostrazione.* Sia  $G = \{x \in X \mid \exists W_x \text{ intorno aperto di } x \mid f_1|_{W_x} = f_2|_{W_x}\}$ . Per ipotesi,  $G \neq \emptyset$

$G$  è, per definizione, un insieme aperto, mostriamo che è anche un insieme chiuso<sup>9</sup>. Sia  $b \in \partial G$  e osserviamo che, per continuità,  $f_1(b) = f_2(b)$ . Consideriamo due carte  $(U_1, \varphi_1: U_1 \rightarrow V_1 \subset \mathbb{C})$  (su  $X$ ) e  $(U_2, \varphi_2: U_2 \rightarrow V_2 \subset \mathbb{C})$  (su  $Y$ ) tali che  $b \in U_1$ ,  $f_1(U_1) \subset U_2$  e  $f_2(U_1) \subset U_2$ . Per definizione di frontiera,  $U_1 \cap G \neq \emptyset$ .

Definiamo le mappe  $\tilde{f}_i = \varphi_2 \circ f_i \circ \varphi_1^{-1}: V_1 \rightarrow V_2$ . Ma allora  $\varphi(U_1 \cap G)$  è un aperto in  $V_1$  su cui  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$  coincidono. Infatti, essendo  $\varphi$  un omeomorfismo, vale che  $\varphi^{-1}(\varphi(U_1 \cap G)) \subset G$ . Per il principio di identità per funzioni oloedriche, siccome  $f_1|_G \equiv f_2|_G$ , vale che  $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$  in  $V$ , dunque  $f_1|_U \equiv f_2|_U$ .

Questo significa che  $U$  è un intorno aperto di  $b$  su cui  $f_1$  e  $f_2$  coincidono, dunque  $b \in G$ .

Essendo  $G$  un insieme non vuoto contemporaneamente aperto e chiuso in  $X$  (connesso),  $X=G$ . Segue la tesi.  $\square$

E' utile introdurre, analogamente al caso di funzioni  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , la definizione di funzioni meromorfe il cui dominio è una superficie di Riemann.

**Corollario 16.22.** Data una mappa oloedrica non costante  $f: X \rightarrow Y$ , allora  $\forall y \in Y$   $f^{-1}(y)$  non ha punti di accumulazione. Inoltre, se  $X$  è compatto,  $|f^{-1}(y)| < +\infty$ .

**Definizione 16.23.** Sia  $X$  una superficie di Riemann e  $Y \subset X$  aperto. Diremo che  $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$  è meromorfa ( $f \in \mathcal{M}(Y)$ ) se esiste un sottoinsieme  $Y' \subset Y$  aperto tale che

- $f|_{Y'}$  è oloedrica;
- $Y \setminus Y'$  non ha punti di accumulazione e  $\forall p \in Y \setminus Y'$  vale che  $\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty$ <sup>10</sup>

**Esempio 16.24.** Un polinomio di grado  $n \geq 1$  definisce una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}P'$  con  $Y' = \mathbb{C}$  e  $Y = \mathbb{C}P'$

La seguente proposizione fornisce una caratterizzazione delle funzioni meromorfe il cui dominio è una superficie di Riemann.

**Proposizione 16.25.** Consideriamo una superficie di Riemann  $X$  e una funzione  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Definiamo per ogni suo polo  $p$   $f(p) = \{\infty\}$ . Allora  $f$  definisce una mappa oloedrica  $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{C}P'$ . Viceversa, ogni mappa oloedrica  $f: X \rightarrow \mathbb{C}P'$  definisce una funzione meromorfa.

*Dimostrazione.* Chiaramente la funzione  $\tilde{f}$  è continua. Mostriamo che sia oloedrica.

Consideriamo le seguenti carte:

$$\varphi: U \subset X \rightarrow V \subset \mathbb{C}$$

$$\psi: U' \subset \mathbb{C}P' \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$$

E la composizione  $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: V \rightarrow V'$ .  $g$  è oloedrica in  $V \setminus \varphi(P \cap U)$  ed è limitata vicino ai poli per continuità di  $\tilde{f}$ . Possiamo dunque applicare il teorema 16.20, ottenendo che  $g$  è oloedrica.  $\square$

**Corollario 16.26.**  $\mathcal{M}(X)$  è un campo.

*Dimostrazione.* Se  $f$  non è identicamente nulla, siccome definisce una mappa oloedrica  $X \rightarrow \mathbb{C}P'$ , ha zeri isolati, dunque  $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(X)$ .  $\square$

Per le mappe oloedriche non costanti vale anche un teorema di struttura molto simile a quello che abbiamo visto nel caso di funzioni oloedriche.

**Teorema 16.27.** (Teorema di struttura) Sia  $f: X \rightarrow Y$  una mappa oloedrica non costante. Siano  $a \in X$  e  $b = f(a) \in Y$ . Allora esistono due carte complesse  $\varphi: U \subset X \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  su  $X$  e  $\psi: U' \subset Y \rightarrow V' \subset \mathbb{C}$  su  $Y$  e un intero  $k \geq 1$  tali che:

- $\varphi(a) = 0$  e  $\psi(b) = 0$ ;
- $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z^k$

<sup>9</sup>Passando alle carte locali per  $a$  otteniamo che  $a \in G$  per il principio di identità delle funzioni oloedriche. La dimostrazione che  $G$  sia chiuso ripercorre questo esatto procedimento.

<sup>10</sup>Essendo  $X$  uno spazio di Hausdorff, tale limite è unico

*Dimostrazione.* L'esistenza di due carte che soddisfino la prima condizione è garantita a meno di traslare adeguatamente gli aperti  $V$  e  $V'$  in  $\mathbb{C}$  (ossia comporre  $\varphi$  con la traslazione  $f(z) = z - \varphi(a)$  e  $\psi$  con la traslazione  $g(z) = z - \psi(b)$ <sup>11</sup>).

Da ciò segue che  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z): V \rightarrow V'$  rispetta il teorema di struttura per funzioni olomorfe, dunque esiste una funzione  $g \in \mathcal{O}(V)$  e  $k \geq 1$  intero tale che  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = [g(z)]^k$ . Inoltre, per il teorema di struttura per funzioni olomorfe, sappiamo che  $g' \neq 0$  in  $V$  e  $\exists r > 0$  tale che  $g: V \rightarrow B_r(0)$  è invertibile. A meno di restringere gli aperti su cui sono definite le carte, quindi, possiamo considerare le nuove carte  $(\tilde{U}, g \circ \varphi)$  e  $(\tilde{U}', \psi)$  tali che  $(\psi \circ f \circ (g \circ \varphi)^{-1})(z) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ g^{-1})(z) = z^k$ .  $\square$

**Corollario 16.28.** Le mappe olomorfe tra superfici di Riemann sono applicazioni aperte.

**Corollario 16.29.** Data una mappa olomorfa e iniettiva  $f: X \rightarrow Y$ , essa è un bi-olomorfismo su  $f(X)$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che l'inversa di  $f: X \rightarrow f(X)$ , che chiameremo  $F: f(X) \rightarrow X$ , sia olomorfa. Passando alle carte locali e applicando il teorema di struttura, otteniamo che  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z$  (i polinomi di grado maggiore di 1 non sono iniettivi). Ma allora  $f|_U = \psi^{-1} \circ \varphi$ , che è un bi-olomorfismo. Dunque l'inversa di  $f: X \rightarrow f(X)$  è olomorfa.  $\square$

Illustriamo di seguito altri risultati fondamentali allo studio delle mappe olomorfe su superfici di Riemann.

**Proposizione 16.30.** (Principio del massimo modulo) Sia  $X$  una superficie di Riemann e  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa non costante. Allora  $|f(x)|$  non ammette massimo in  $X$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista un punto  $a \in X$  tale che  $|f(a)| = \sup_X |f(x)|$  e chiamiamo  $R$  tale valore. Allora  $f(X)$  è aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f(X) \subset \overline{B_R(0)}$ , dunque  $f(X) \subset B_R(0)$ . Questo è però assurdo in quanto  $f(a) \in \partial B_R(0)$ .  $\square$

**Teorema 16.31.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  una mappa olomorfa e non costante tra superfici di Riemann. Supponiamo inoltre che  $X$  sia compatta. Allora  $Y$  è compatta e  $f$  è surgettiva.

*Dimostrazione.*  $f(X)$  è un aperto di  $Y$  per il teorema della mappa aperta. Al contempo, dato che  $X$  è compatta,  $f(X)$  è a sua volta compatto per continuità di  $f$ , e quindi chiuso in quanto  $Y$  è uno spazio di Hausdorff. Essendo  $Y$  connessa,  $Y = f(X)$  ed è compatta.  $\square$

**Corollario 16.32.** Sia  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa. Se  $X$  è compatta, allora  $f$  è costante.

*Dimostrazione.* Se  $f$  non fosse costante varrebbe  $\mathbb{C} = f(X)$ , che è compatto, il che non può essere.  $\square$

**Corollario 16.33.** Se  $f \in \mathcal{CP}'$  allora  $f$  è una funzione razionale.

*Dimostrazione.*  $\mathcal{CP}'$  è compatto, quindi per il principio di identità tra mappe olomorfe<sup>12</sup>  $f$  ammette un numero finito di poli  $a_1, \dots, a_n$ .

Consideriamo  $P = \{a_1, \dots, a_n\}$ , senza perdita di generalità possiamo assumere che  $\{\infty\} \subset \{a_1, \dots, a_n\}$  (altrimenti è sufficiente considerare  $\frac{1}{f}$  anziché  $f$ ).

Sia  $h_j(z)$  la parte principale di  $f|_{\mathbb{C}}$  in  $a_j$ . Allora  $f - \sum_j h_j$  è olomorfa in  $\mathcal{CP}'$ , dunque è costante. Ne segue che  $f$  è razionale.  $\square$

Introduciamo una nuova classe di funzioni: le funzioni doppiamente periodiche. Per farlo, è necessario richiamare i concetti di reticolo e toro esplorati nella sezione precedente.

**Definizione 16.34.** Una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si dice doppiamente periodica se esistono due numeri complessi  $\omega_1$  e  $\omega_2$   $\mathbb{R}$ -linearmente indipendenti reali tali che  $f(z + n\omega_1 + m\omega_2) = f(z)$  per ogni scelta di  $n$  e  $m$  in  $\mathbb{Z}$ .

E' chiaro che le funzioni doppiamente periodiche definiscono una mappa  $\tilde{f}: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  e, viceversa, ogni funzione definita su un toro definisce una funzione doppiamente periodica su  $\mathbb{C}$ .

<sup>11</sup>Essendo le traslazioni degli omeomorfismi,  $V$  e  $V'$  rimangono aperti di  $\mathbb{C}$

<sup>12</sup>Potremmo infatti estendere  $f$  ad una mappa olomorfa da  $\mathcal{CP}'$  in se stesso, per cui vale il teorema

**Proposizione 16.35.** Le funzioni olomorfe e doppiamente periodiche sono costanti.

*Dimostrazione.* Forniamo due dimostrazioni di questo fatto:

- Essendo  $f$  olomorfa, essa è limitata sul parallelogramma  $\{s\omega_1 + t\omega_2 \mid s, t \in [0, 1]\}$ . Quindi, per doppia periodicità,  $f$  è una funzione limitata su  $\mathbb{C}$ . Applicando il teorema di Liouville otteniamo che  $f$  è costante.
- $f$ , essendo olomorfa e doppiamente periodica, induce una funzione olomorfa  $\tilde{f}: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ . Essendo i tori superfici di Riemann compatte possiamo applicare 16.32, ottenendo la tesi.

□

La proposizione precedente, analogamente a quanto abbiamo osservato per le funzioni olomorfe su superfici di Riemann, danno una motivazione per interessarci alle funzioni doppiamente periodiche e meromorfe.

**Definizione 16.36.** Una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  doppiamente periodica e meromorfa si dice ellittica.

**Proposizione 16.37.** Le funzioni ellittiche sono suriettive su  $\mathbb{C}$

*Dimostrazione.* Essendo  $f$  meromorfa, essa induce una mappa olomorfa  $\tilde{f}: \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . Applicando 16.31 otteniamo che  $f$  è suriettiva. □

## 16.4. Classi di isomorfismo di tori

In questa sezione vogliamo studiare le mappe olomorfe tra tori. Lo scopo è arrivare a descrivere le classi di isomorfismo di tori.

Diamo un importante esempio di mappa olomorfa tra tori.

**Esempio 16.38.** Sia  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , consideriamo l'applicazione  $\alpha: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che essa induce per moltiplicazione.

Se  $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  allora l'applicazione scende al quoziente, ossia definisce  $[\alpha]: \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$  tale che  $[\alpha]([z]) = [\alpha z]$ . Infatti vale che  $[z] = [z'] \Leftrightarrow z - z' = \gamma_1 \in \Gamma_1$ , il che implica che  $\alpha(z - z') = \alpha\gamma_1 \in \Gamma_2$ , dunque  $[\alpha z] = [\alpha z']$ .

L'applicazione  $[\alpha]$  risulta olomorfa in quanto localmente corrisponde ad una moltiplicazione per  $\alpha$ . Osserviamo inoltre che  $[\alpha]([0]) = [0]$  e che la mappa che abbiamo definito è, essendo  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , un bi-olomorfismo.

La proposizione seguente mostra che l'applicazione  $[\alpha]$  non è solo un esempio di mappa olomorfa tra tori che manda  $[0]$  in  $[0]$ , ma ne è l'unico possibile esempio.

**Proposizione 16.39.** Se  $f: \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$  è olomorfa e manda  $[0]$  in  $[0]$ , allora  $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$  tale che  $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  e  $f = [\alpha]$ .

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $g$  l'applicazione  $g = \pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1}$ . Dato che  $\pi_2([0]) = [0]$  e  $g([0]) = 0$ , sappiamo che esiste un unico sollevamento  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  di  $g$  tale che  $F([0]) = 0$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathbb{C} \\
 & & & & \downarrow \pi_2 \\
 & & & \nearrow F & \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}/\Gamma_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Gamma_2 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

$g$

Quindi vale

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 \mathbb{C}/\Gamma_1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}/\Gamma_2
 \end{array}$$

F risulta olomorfa in quanto  $\pi_1$  e  $\pi_2$  sono bi-olomorfismi locali. Consideriamo ora  $\omega \in \Gamma_1$  e definiamo  $G(z) = F(z + \omega) - F(z)$ .

G assume valori in  $\Gamma_2$ , infatti  $\pi_2(F(z + \omega) - F(z)) = \pi_2(F(z + \omega)) - \pi_2(F(z)) = f(\pi_1(z + \omega)) - f(\pi_1(z)) = f([z]) - f([z]) = [0]$ .

Dunque, essendo G olomorfa e  $\Gamma_2$  discreto, G è costante. Ossia  $F'(z + \omega) - F'(z) = 0 \forall \omega \in \Gamma_1$ .

Ne segue che  $F'$  è limitata, dunque è costante per il la proposizione 16.35, per cui  $F(z) = \alpha z + \beta$ . Imponendo che  $F(0) = 0$  otteniamo che  $\beta = 0$ , ossia  $F(z) = \alpha z$ . □

**Definizione 16.40.** Diremo che  $\mathbb{C}/\Gamma_1 \simeq \mathbb{C}/\Gamma_2$  se esiste un bi-olomorfismo  $f: \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$  tale che  $f([0]) = [0]$ .

**Definizione 16.41.** Due reticoli  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  si dicono omotetici se  $\exists \alpha \in \mathbb{C}^*$  tale che  $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ .

Alla luce di queste definizioni, enunciamo un importante corollario della proposizione precedente.

**Corollario 16.42.**  $\mathbb{C}/\Gamma_1 \simeq \mathbb{C}/\Gamma_2$  se e soltanto se  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono omotetici.

*Dimostrazione.* Se esiste un bi-olomorfismo  $f: \mathbb{C}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma_2$  tale che  $f([0]) = [0]$  allora:

$$\begin{aligned} \exists \alpha \mid \alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \text{ e } f[z] &= [\alpha z] \\ \exists \tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha}\Gamma_2 \subset \Gamma_1 \text{ e } f^{-1}[z] &= [\tilde{\alpha} z] \end{aligned}$$

Ne segue che  $(f^{-1} \circ f)[z] = [\tilde{\alpha}\alpha z]$ , dunque  $\tilde{\alpha}\alpha \equiv 1 \pmod{\Gamma_1}$ .

Ma allora  $\alpha\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  e  $\Gamma_1 = \tilde{\alpha}\alpha\Gamma_1 \subset \tilde{\alpha}\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ . Dunque  $\tilde{\alpha}\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ , per cui i due reticoli sono omotetici.

Il viceversa segue dalla proposizione 16.39. □

Quindi il problema di classificare i tori è equivalente a descrivere le classi di omotetia dei reticoli. Per farlo, avremo bisogno dei risultati seguenti.

**Osservazione 16.43.** Dato un reticolo  $\Gamma = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle$  tale che  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}$  (il semipiano superiore), allora esiste un  $\tau \in \mathbb{H}$  tale che  $\Gamma$  sia omotetico al reticolo  $\Gamma_\tau: = \langle 1, \tau \rangle$

**Osservazione 16.44.** Ricordiamo che il gruppo  $SL(2, \mathbb{Z})$  agisce su  $\mathbb{H}$  tramite applicazione di Moebius, ossia data  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ ,  $\gamma \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \in \mathbb{H}$  e  $\Im(\gamma \cdot \tau) = \frac{\det(\gamma)}{|cd + \tau|} \Im(\tau)$

**Proposizione 16.45.**  $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \rangle \iff \exists A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z})$  tale che  $\det(A) = \pm 1$  e  $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix}$

*Dimostrazione.* Per ipotesi vale che esistono due matrici  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  tali che  $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \tilde{\omega}_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = a\tilde{\omega}_1 + b\tilde{\omega}_2 \\ \omega_2 = c\tilde{\omega}_1 + d\tilde{\omega}_2 \end{cases}$$

Ossia  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = I$  e la tesi segue dal teorema di Binet.

Viceversa se esiste una matrice A come nell'ipotesi allora  $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$ . Dunque i due reticoli coincidono. □

Siamo pronti ad enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché due reticoli siano omotetici.

**Proposizione 16.46.**  $\Gamma_\tau$  è omotetico a  $\Gamma_{\tau'} \iff \exists \gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$  tale che  $\tau' = \gamma \cdot \tau$

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Se  $\exists \gamma$  tale che  $\tau' = \gamma \cdot \tau$  Allora  $\Gamma_{\tau'} = \Gamma_{\gamma \cdot \tau} = \langle 1, \gamma \cdot \tau \rangle = \langle 1, \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \rangle$ , dunque  $\Gamma_{\gamma \cdot \tau}$  è omotetico a  $\langle c\tau + d, a\tau + b \rangle$ .

Siccome  $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\tau+d \\ a\tau+b \end{pmatrix}$ , ne segue che  $\langle c\tau + d, a\tau + b \rangle = \Gamma_{\tau} = \langle 1, \tau \rangle$ , dunque  $\Gamma_{\tau}$  è omotetico a  $\Gamma_{\tau'}$ .

( $\Rightarrow$ ) Se  $\Gamma_{\tau}$  è omotetico a  $\Gamma_{\tau'}$ , esiste  $\lambda \neq 0$  tale che  $\langle 1, \tau \rangle = \langle \lambda, \lambda\tau' \rangle$ , ossia esiste  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  tale che  $\det(\gamma) = \pm 1$  e  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda\tau' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix}$ . Ne segue che  $\langle c\tau + d, a\tau + b \rangle = \Gamma_{\tau} = \langle 1, \tau \rangle$ , dunque  $\Gamma_{\tau}$  è omotetico a  $\Gamma_{\tau'}$ .

Dimostriamo che  $\det(\gamma) = 1$ . Applicando il risultato ottenuto nell'osservazione (16.44) otteniamo che

$$0 < \Im(\tau') = \Im\left(\frac{\lambda\tau}{\lambda}\right) = \frac{\det(\gamma)}{|cd + \tau|} \Im(\tau)$$

Dunque, siccome  $\Im(\tau) > 0$  e  $|cd + \tau| > 0$ ,  $\det(\gamma)$  è a sua volta positivo. Questo dimostra che  $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$ . □

### Conclusione

$\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$  parametrizza le classi di isomorfismo dei tori. Questo insieme contiene

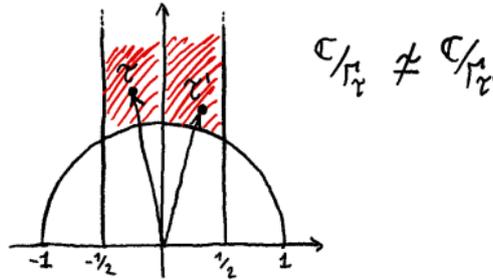


Figura 1:  $\{z \mid |z| > 1\} \cap \{z \mid -\frac{1}{2} < \Re(z) < \frac{1}{2}\}$

In particolare esiste un continuum di tori non isomorfi tra loro, il quale prende il nome di spazio dei moduli dei tori complessi di dimensione 2.

## 17. Prodotti infiniti

Questa sezione, che segue principalmente [Stein], si occuperà di dare un senso a formule del tipo

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (17.1)$$

In questo caso, si ha a che fare con una fattorizzazione della funzione seno tramite funzioni che si annullano precisamente dove essa si annulla ed allo stesso ordine. Questo tipo di studi è motivato dal teorema di Weierstrass che informalmente ci dice che dato un insieme discreto di punti si può definire una funzione che si annulla sui punti di questo insieme a meno di un esponenziale.

**Definizione 17.1** (Convergenza dei prodotti). Data  $\{a_n\} \in \mathbb{C}$  successione, si dice che  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  converge se esiste  $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N (1 + a_n)$ .

**Proposizione 17.2.** Se la serie definita da  $\{a_n\}$  converge assolutamente, allora  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  converge, e quest'ultima converge a zero se e solo se esiste un fattore uguale a zero

*Dimostrazione.* Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge allora per  $n > \tilde{n}$  si ha  $|a_n| < \frac{1}{2}$ , dunque senza perdita di generalità si può assumere che lo siano tutti gli  $a_n$ , da cui risulta che  $\text{Log}(1 + a_n)$  è ben definito, con  $\text{Log}$  il logaritmo principale. Poiché  $(1 + a_n) = e^{\text{Log}(1+a_n)}$ ,

$$\prod_{n=1}^N (1 + a_n) = \prod_{n=1}^N e^{\text{Log}(1+a_n)} = e^{\sum_{n=1}^N \text{Log}(1+a_n)} = e^{B_N} \quad (17.2)$$

con  $B_N = \sum_{n=1}^N b_n$  e  $b_n = \text{Log}(1 + a_n)$ .

Si ricordi che per  $|z| < 1$  si ha  $\text{Log}(1 + z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}$ , da cui segue facilmente che

$$|\text{Log}(1 + z)| < 2|z|$$

se  $|z| < \frac{1}{2}$ ; quindi  $|b_n| = |\text{Log}(1 + a_n)| \leq 2|a_n|$ , quindi  $\sum_{n=1}^N b_n$  converge a B. Per continuità,  $e^{B_N} \rightarrow e^B$ , e da (17.2) segue la prima asserzione.

La seconda affermazione segue da un semplice ragionamento: se  $\forall n, 1 + a_n \neq 0$ , il prodotto è diverso da zero perché è uguale ad un esponenziale, mentre se almeno uno è uguale a 0, il prodotto è zero.  $\square$

Passiamo a prodotti infiniti di funzioni olomorfe. Prima di tutto ci poniamo la seguente domanda: se  $\{h_n(x)\}$  è una successione di funzioni in un insieme  $X$ , convergente uniformemente ad  $h(x)$ , quando succede che  $e^{h_n(x)} \rightarrow e^{h(x)}$  uniformemente?

Una condizione sufficiente è che esista  $a$  con  $\text{Re}(h(x)) \leq a \forall x \in X$ . La dimostrazione è elementare<sup>13</sup>. Armati di questa semplice osservazione preliminare, enunciamo il primo risultato per prodotti infiniti di funzioni olomorfe.

**Proposizione 17.3.** Siano  $\Omega$  un aperto ed  $F_n$  una successione di funzioni olomorfe tale che  $\exists c_n \mid \sum_n c_n < \infty$ , tale che  $|F_n(z) - 1| < c_n \forall z \in \Omega$ , allora:

1.  $\prod_n F_n$  converge uniformemente ad una funzione olomorfa;
2. se  $F_n$  non ha zeri in  $\Omega$ , neanche  $F$  ne ha e  $\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum \frac{F'_n(z)}{F_n(z)}$ .

<sup>13</sup>la trovate in [Conway]

*Dimostrazione.* 1. Ponendo  $F_n(z) = 1 + a_n$ , si ha che  $|a_n| < c_n$  uniformemente in  $\Omega$ , dunque si ha convergenza assoluta della serie associata e si può ripetere la dimostrazione proposta nel caso numerico, (basterà tenere presente l'osservazione preliminare sulla convergenza dell'esponenziale di una successione di funzioni). Segue l'olomorfia della funzione

$F(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N F_i(z)$  (sappiamo che successioni convergenti di funzioni olomorfe convergono ad una funzione olomorfa (uniformemente sui compatti)).

2. Sia  $G_N = \prod_{n=1}^N F_i(z)$ : sappiamo anche che  $G'_N(z) \rightarrow F'(z)$  uniformemente sui compatti. Dato un compatto  $K \subseteq \Omega$ , poiché  $F_n$  non ha zeri,  $G_N$  è uniformemente limitata dal basso, dunque neanche  $F$  si annulla (se esistesse  $z \in K$  con  $F(z) = 0$ , esisterebbe un  $n$  con  $1 + a_n = 0$ , contro l'ipotesi di (II)).

Si può infine dimostrare induttivamente che  $\frac{G'_N}{G_N} = \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}$ : ad esempio per  $N = 2$  si ha che

$$\frac{F'_1}{F_1} + \frac{F'_2}{F_2} = \frac{F'_1 F_2 + F_1 F'_2}{F_1 F_2} = \frac{(F_1 F_2)'}{F_1 F_2}.$$

Dunque  $\frac{F'}{F} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{F'_n}{F_n}$ .

□

**Osservazione 17.4.** In generale, se  $F$  ha uno zero di ordine  $m$  in  $z_0 \in \Omega$  allora  $\overline{B_R(z_0)}$  è uno zero di un numero finito di fattori, la cui somma degli ordini è  $m$ . Infatti, si consideri  $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$  e sia  $F_n(z) = 1 + a_n(z)$ : per ipotesi esiste  $\tilde{n}$  con  $|a_n(z)| < \frac{1}{2} \forall n \geq \tilde{n}$  uniformemente in  $B_R(z_0)$  (per cui si ha  $1 + a_n(z) \neq 0$ ), e spezzando la produttoria:

$$G_N(z) = \prod_{n=1}^{\tilde{n}} F_n \prod_{n=\tilde{n}+1}^N F_n$$

capiamo che tutti gli zeri si trovano nella prima produttoria, mentre la seconda è diversa da zero. Segue la tesi perché  $\prod F_n = (F_1) \dots (F_{\tilde{n}}) H$ , dove  $H(z_0) \neq 0$ .

**Osservazione 17.5.** In generale si può assumere che  $\sum F_n - 1$  converga assolutamente ed uniformemente sui compatti e dimostrare che, conseguentemente,  $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$  converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa; la dimostrazione precedente si può adattare senza problemi una volta applicata l'osservazione preliminare con  $X = K \subset \Omega$ ,  $h_n(z) = \sum_{i=1}^n \text{Log}(1 + a_i)$  e  $h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_i)$  (ovviamente  $\text{Re } h(z)$  è uniformemente limitata su  $K$  perché limite uniforme di funzioni continue)

Si vuole tornare ora allo studio di

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Per dimostrare che vale l'uguaglianza, ci si serve di una formula ponte, la quale verrà illustrata nella seguente proposizione.

**Proposizione 17.6.** Vale la seguente espansione della cotangente

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (17.3)$$

*Dimostrazione.* Sono fornite due dimostrazioni:

1) È chiaro che vale la seguente riscrittura della formula che vogliamo dimostrare:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n}\right) \quad (17.4)$$

Si noti anzitutto che le serie sono assolutamente convergenti  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ :

se  $R > |z|$  allora  $|\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z-n}| = \frac{2}{|z-\frac{n^2}{z}|} \leq \frac{2}{|R-\frac{n^2}{R}|} \sim \frac{1}{n^2}$  che ci dà la convergenza per il criterio del confronto.

Si consideri poi la funzione ausiliaria  $f(w) = \frac{z}{w(z-w)} \pi \cot(\pi w)$ , la quale ha poli semplici in  $w = z, n \in \mathbb{Z}^*$  ed un polo doppio nell'origine: l'obiettivo è di dimostrare che il suo integrale sul bordo del quadrato di vertici

$$\left\{ (N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2}), (N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2}), -(N + \frac{1}{2}) + i(N + \frac{1}{2}), -(N + \frac{1}{2}) - i(N + \frac{1}{2}) \right\}$$

è zero, da ciò seguirà la tesi. Tale integrale è uguale alla somma dei suoi residui, i quali risultano essere collegati al primo e secondo membro di (17.3).

Più precisamente è lasciata per esercizio la seguente verifica:

- $\text{Res}[f, w = z] = -\pi \cot(\pi z)$
- $\text{Res}[f, w = n \neq 0] = \frac{z}{n(z-n)}$
- $\text{Res}[f, w = 0] = \frac{1}{z}$

che sono appunto i termini che compaiono in (17.4). Sia  $|z| < N$ . Per il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta Q_N} f(\zeta) d\zeta = \sum \text{Res} = -\pi \cot(\pi z) + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{z}{n(z-n)} + \frac{1}{z},$$

dunque è sufficiente dimostrare che il membro a sinistra va a zero per  $N \rightarrow +\infty$ . Facciamo vedere che  $\cot(\pi z)$  è uniformemente limitato sul bordo di  $Q_N$ : poiché si ha che  $\cot(\pi z) = \cot(\pi(z+1))$ , si può studiare la limitatezza solo nella fascia  $|\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}$ . Si noti anche che se si prende l'intersezione di questa regione con  $|\text{Im}(z)| \leq 1$  ci si trova su un compatto, dunque si può supporre che la parte immaginaria sia maggiore di 1 in valore assoluto. Un conto mostra che

$$\cot(\pi z) = \frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}} \cdot i$$

da cui segue che nella fascia presa in considerazione  $|\cot(\pi z)| \leq \frac{1+e^{-2\pi|y|}}{1-e^{-2\pi|y|}}$ : in conclusione

$$\left| \int_{\delta Q_N} f(\zeta) d\zeta \right| < c \cdot l(Q_N) \cdot \frac{|z|}{(N + \frac{1}{2})(|z| - (N - \frac{1}{2}))}$$

da cui l'asserto che il limite dell'integrale sul quadrato è 0.

2) Vediamo la seconda dimostrazione. Si consideri  $F(z) = \pi \cot(\pi z)$  e si osservi la validità delle seguenti tre proprietà:

- $F(z) = F(z+1)$  (è periodica di periodo 1);
- ha poli semplici in  $\mathbb{Z}$ , e non ne ha altri
- in prossimità dell'origine si può scrivere come  $\frac{1}{z} + g(z)$ , con  $g$  olomorfa.

Si può mostrare che il membro a destra dell'enunciato di (17.4) condivide le stesse proprietà. La seconda e la terza sono immediate, mentre la prima viene dal seguente ragionamento:

Si osservi che

$$\frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{N}} \left( \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z+n}$$

intesa come  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$ , e la periodicità segue dall'uguaglianza di

$$\sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n+1}$$

a

$$\frac{1}{z+1-N} - \frac{1}{z-N} + \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{z+n}$$

e prendendo il limite per  $N$  tendente ad  $\infty$ .

Sia ora  $H(z) = F(z) - (\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2})$ : essendo entrambi gli addendi di periodo 1,  $H$  è di periodo 1, dunque la singolarità eliminabile nell'origine è per periodicità eliminabile su tutti gli interi, da cui  $H$  è intera. Si vuole dimostrare che è anche limitata, per poi applicare Liouville ed ottenere la tesi. Si può studiare  $H$  solo nella regione  $|Re(z)| < \frac{1}{2}, |Im(z)| > 1$ , ed avendola già verificata per  $F$  è sufficiente vederla per l'altro addendo. Nella regione identificata, con  $z = x + iy$ , vale la seguente stima:

$$|\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}| \leq c + c \sum \frac{y}{y^2+n^2} \leq c + \tilde{c} \int_0^{\infty} \frac{y}{y^2+x^2} dx$$

La prima disuguaglianza è elementare (qualche semplice conto); la seconda disuguaglianza segue dall'osservazione che l'integrando è decrescente in  $x$ ; notare poi che l'integrale non dipende da  $y$  ed è dunque limitato in  $y$ ; infatti effettuando la sostituzione  $x \leftrightarrow xy$  si ha:

$$\int \frac{y}{y^2+x^2} dx = \int \frac{y^2}{y^2+y^2x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

La funzione risulta essere intera e limitata, dunque costante per Liouville. Tuttavia, essendo la funzione dispari,  $H(-z) = -H(z)$ ,  $\implies H \equiv 0$ . Segue la tesi.

Si può ora dimostrare:

**Proposizione 17.7.** Vale la fattorizzazione

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

*Dimostrazione.* Il membro a destra risulta essere convergente: infatti, fissato  $z \in B_R(0)$  si ha  $|1 - \frac{z^2}{n^2} - 1| = |\frac{z^2}{n^2}| < \frac{R^2}{n^2}$  che dà una serie convergente.

Siano  $G(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$  e  $P(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$ . Dalla proposizione (1.2), al di fuori di  $\mathbb{Z}$  si ha:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum \frac{F'_n(z)}{F_n(z)} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2-n^2} \tag{17.5}$$

D'altra parte è ovvio che  $\frac{G'(z)}{G(z)} = \pi \cot(\pi z)$ . Da (17.3) e (17.5) otteniamo quindi

$$(\frac{P(z)}{G(z)})' = \frac{P'G - PG'}{G^2} = \frac{P}{G} (\frac{P'}{P} - \frac{G'}{G}) = 0$$

Segue che  $\frac{P(z)}{G(z)}$  è costante, dunque  $P(z) = cG(z)$ , ma essendo  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(z)}{z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{cG(z)}{z}$ ,  $c = 1$ , da cui la tesi.

**Verso il teorema di fattorizzazione di Weierstrass**

**Definizione 17.8** (Fattore elementare). è una funzione del tipo  $E_p(z)$ , con  $p = 0, 1, \dots$ , della forma  $E_0 = (1 - z)$ ,  $E_p = (1 - z) \cdot \exp(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p})$ .

**Osservazione 17.9.**  $E_p(\frac{z}{a})$  è intera con solamente uno zero in  $a$ , il quale è semplice.

**Lemma 17.10.** per  $|z| \leq 1$ ,  $p \geq 1$ , si ha  $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$

*Dimostrazione.* Essendo  $E_p$  intera può essere riscritta come  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \implies -z^p \cdot \exp(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}) = E_p'(z) = \sum k a_k z^k \implies a_1 = \dots = a_p = 0$ . Inoltre, poiché  $a_k \leq 0 \forall k \geq p+1$ ,  $|a_k| = -a_k \forall k \geq p+1$ , quindi da  $0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k$  segue che  $\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1$ .

Se  $|z| \leq 1$ ,  $|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1} \cdot 1$ .

## 18. Teorema di fattorizzazione di Weierstrass e Teorema di Mittag-Leffler

### 18.1. Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per funzioni intere

**Teorema 18.1.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{C}$  senza punti di accumulazione tale che

$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$  e che non vi siano elementi nulli, allora data una successione di interi  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < +\infty \quad \forall r > 0$$

la funzione  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$  converge uniformemente sui compatti ad una funzione olomorfa

con zeri solo  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ , inoltre ogni  $a_i$  è uno zero della funzione limite di molteplicità  $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{a_i\}}(a_n) < +\infty$ .

*Dimostrazione.* Per il lemma sappiamo che per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , tale che  $|z| \leq |a_n|$  si ha che  $|1 - E_p(z/a_n)| \leq |z/a_n|^{p+1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^+$ .

Fissato  $r > 0$  poichè  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$ ,  $\exists N > 0$  tale che per  $n > N$  allora  $r \leq |a_n|$ .

Ma quindi, per  $r > 0$  fissato e per  $z \in B_r(0)$  per ipotesi si ottiene che

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |1 - E_p(z/a_n)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |z/a_i|^{p_i+1} \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} |r/a_i|^{p_i+1} < +\infty$$

quindi la serie  $\sum_{i=N+1}^{\infty} |1 - E_p(z/a_n)|$  converge uniformemente in  $B_r(0)$  e per quanto dimostrato

precedentemente ciò implica che la funzione  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$  soddisfa tutte le richieste del teorema.

Rimane da dimostrare che se  $p_n = n - 1$  allora la condizione

$\sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} < +\infty \quad \forall r > 0$  è soddisfatta:

per mostrarlo basta notare che  $\forall r > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N}$  tale che se  $n > M$  allora  $|a_n| > 2r$ , ma quindi possiamo concludere la dimostrazione notando che

$$\sum_{i=M+1}^{\infty} \left( \frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n+1} \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1+1}} < +\infty$$

□

**Teorema 18.2.** (Di fattorizzazione di Weierstrass).

Sia  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  con 0 zero di ordine  $m$ , sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathbb{C}$  zeri di  $f$  che soddisfano le stesse ipotesi del teorema precedente, allora esiste  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  come prima tali che

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente  $\exists (p_n)_n$  e  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  tale che

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/a_n)$$

inoltre  $h$  ha gli stessi zeri di  $f$  con le stesse molteplicità, quindi la funzione  $\frac{f(z)}{h(z)}$  è meromorfa con solo singolarità eliminabili e quindi intera e mai nulla, ma quindi esiste  $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  tale che  $\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)}$  da cui la tesi. □

**Esempio 18.3.** Consideriamo ora  $f(z) = \sin(\pi z)$ .

Gli zeri di  $f$  sono semplici e sono tutti e soli i numeri interi, notiamo inoltre che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(\frac{r}{n}\right)^2 < +\infty \quad \forall r > 0$$

quindi possiamo applicare il teorema di Weierstrass per  $p_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  e ottenere che esiste  $g$  olomorfa tale che

$$f(z) = \sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} E_1(z/n) = e^{g(z)} z \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Notiamo che siamo arrivati molto vicini all'identità che avevamo già ottenuto in precedenza in modo indipendente.

Per trovare  $g$  utilizziamo nuovamente lo sviluppo della cotangente, infatti:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \pi \cot(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

quindi  $g'(z) \equiv 0$ , perciò  $g(z) = a$  costante, e facendo tendere  $z$  a 0 nell'uguaglianza

$$\frac{\sin(\pi z)}{z} = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

otteniamo  $e^a = \pi$ , abbiamo così nuovamente ottenuto l'identità già trovata nei capitoli precedenti.

## 18.2. La funzione $\sigma$ di Weierstrass

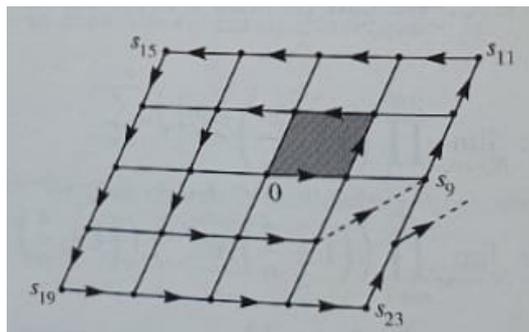
Consideriamo  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  linearmente indipendenti, sia

$$\Gamma := \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$$

il reticolo del piano generato da  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in \mathbb{C}$ .

Vorremo costruire una funzione complessa olomorfa che ha come zeri tutti e soli gli elementi di  $\Gamma$ . Considereremo la partizione di  $\Gamma$  nei sottoinsiemi

$$\Gamma_k := \{a\omega_1 + b\omega_2 \quad t.c. \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad \max(|a|, |b|) = k\}$$



Possiamo vedere facilmente dalla figura o tramite pochi conti di combinatoria (utilizzando ad esempio il principio di inclusione-esclusione), che per ogni  $k$  intero positivo  $\Gamma_k$  conta  $8k$  elementi.

Sia  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una numerazione degli elementi di  $\Gamma^*$  scelta in modo da inserire tutti gli elementi degli insiemi  $\Gamma_k$  in ordine di  $k$  (ovvero i primi 8 elementi saranno gli elementi di  $\Gamma_1$ , i successivi 16 quelli di  $\Gamma_2$  ecc.).

Notiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = +\infty$

**Lemma 18.4.**  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 > +\infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$

*Dimostrazione.* Notiamo dalla costruzione geometrica con la quale abbiamo definito  $\Gamma_k$  che  $\exists d > 0$  tale che  $\|x\| > kd$  per  $x \in \Gamma_k$  quindi:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^+} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 = \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \sum_{s_n \in \Gamma_k} \left| \frac{z}{s_n} \right|^3 \leq \sum_{n \leq 1} 8k \left| \frac{z}{kd} \right|^3 \sim \sum_{n \leq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

□

Per il lemma precedente possiamo applicare il teorema di fattorizzazione di Weierstrass per  $p_n = 2$  e ottenere la funzione con le proprietà desiderate nota come funzione  $\sigma$  di Weierstrass:

$$\sigma(z, \Gamma) = z \prod_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\omega^2}\right)$$

La derivata logaritmica di  $\sigma$  è

$$\xi(z, \Gamma) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{z}{z - \omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$$

La derivata cambiata di segno di  $\xi$  è chiamata la funzione  $\wp$  di Weierstrass:

$$\wp(z, \Gamma) = -\xi(z, \Gamma)' = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{z}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

### 18.3. Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass in domini generali

Enunciamo senza dimostrarlo il seguente importante risultato, rimandando a [Conway] per la dimostrazione :

**Teorema 18.5.** (Teorema di fattorizzazione di Weierstrass per domini generali) Sia  $E$  dominio,  $(a_n)_n \subseteq \mathbb{C}$  senza punti di accumulazione,  $(m_n)_n \subseteq \mathbb{N}$ , allora esiste  $f \in \mathcal{O}(E)$  con zeri solo in  $(a_n)_n$  di ordine  $(m_n)_n$ .

**Corollario 18.6.**  $\mathcal{M}(E)$  è il campo dei quozienti di  $\mathcal{O}(E)$

*Dimostrazione.* Sia  $f \in \mathcal{M}(E)$ , siano  $(a_n)_n$  i suoi poli di ordine rispettivamente  $(m_n)_n$ , per il teorema precedente esiste  $h \in \mathcal{O}(E)$  con zeri nei poli di  $f$  e ordine l'ordine dei poli di  $f$ , ma quindi tutti i poli di  $f \cdot h$  sono eliminabili, perciò  $f \cdot h(z) = g(z) \in \mathcal{O}(E)$  e  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  con  $g, h \in \mathcal{O}(E)$ , la tesi segue dall'arbitrarietà di  $f \in \mathcal{M}(E)$ . □

### 18.4. Il Teorema di Mittag-Leffler

Prima di enunciare e dimostrare il teorema di Mittag-Leffler premettiamo il seguente lemma tecnico (dimostrazione in [Conway, Cap. VII, Prop. 1.2]):

**Lemma 18.7.** Sia  $E$  dominio, allora esiste  $(K_n)_n$  esaustione in compatti tale che:

1.  $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$
2.  $\bigcup K_n = E$
3. ogni componente di  $\mathbb{C} \setminus K_n$  contiene una componente di  $\mathbb{C} \setminus E$

**Teorema 18.8.** (Mittag-Leffler).

Sia  $E$  dominio,  $(z_n)_n \subseteq \mathbb{C}$  successione senza punti di accumulazione,  $p_k$  polinomi in  $\frac{1}{z - z_k}$ , allora esiste una funzione meromorfa con poli in  $(z_n)_n$  e con parti principali nei poli  $z_k$  uguali a  $p_k$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo  $(K_n)_n$  come nel lemma.

Sia  $f_1 = \sum_{z_k \in K_1} p_k$  e per ogni  $n \geq 2$   $f_n = \sum_{z_k \in K_n \setminus K_{n-1}} p_k$ .  $f_n \in \mathcal{O}(K_{n-1})$  per ogni  $n$ , quindi per il

teorema di Runge esistono funzioni razionali  $R_n$  con poli in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$  che approssimano le  $f_n$  ristrette a  $K_{n-1}$ . C'è qui un piccolo ragionamento per passare dal nostro enunciato di Runge a quest'ultimo

enunciato (utilizzare il punto 3) del Lemma e la dimostrazione di Runge).

Scegliamo  $R_n$  in modo che  $\|R_n - f_n\| \leq \frac{1}{2^n}$  in  $K_{n-1}$ , sia  $f(z) = f_1(z) + \sum_{n>1} (f_n(z) - R_n(z))$ .

$f$  converge uniformemente sui compatti infatti, dato  $K$  compatto, per costruzione  $\exists N > 0$  t.c.  $K \subseteq K_N$ , ma quindi in  $K$

$$\sum_{n>N} \|f_n(z) - R_n(z)\| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} \leq \infty$$

Possiamo quindi concludere che  $f$  è una funzione meromorfa che per costruzione ha tutti e soli i poli  $(z_n)_n$  con le rispettive parti principali come richieste dall' enunciato, quindi  $f$  è la funzione desiderata.  $\square$

**Osservazione 18.9.** Se  $E = \mathbb{C}$  allora possiamo prendere  $K_n = \overline{B_n(0)}$  e risulta  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{C} = \{\infty\}$ . Quindi possiamo scegliere  $R_n$  uguale ad un'opportuna somma finita dello sviluppo di Taylor di  $f_n$  in  $z = 0$  (un polinomio è una funzione razionale con polo a  $\{\infty\}$ ).

**Esempio 18.10.** Come nel teorema precedente, ponendo  $\{z_n\} = \mathbb{N}^*$ ,  $p_k = \frac{1}{z-k}$ , vogliamo costruire una funzione  $f$  meromorfa con poli in  $\mathbb{N}^*$  e con parti principali  $p_k$ .

Notiamo che non basterà sommare le parti principali poichè

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \frac{1}{z-n} \right\| \sim \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \frac{1}{n} \right\| \rightarrow +\infty$$

In compenso, seguendo l'osservazione appena fatta, sarà sufficiente sottrarre alle parti principali un opportuno trocamento dello sviluppo di Taylor in  $z = 0$ ; proviamo a sottrarre il primo termine della serie di Taylor. Ci rendiamo conto che ciò è già sufficiente per assicurare la convergenza; ciò segue dalla seguente disuguaglianza:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \frac{1}{z-n} - \left(-\frac{1}{n}\right) \right\| = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \frac{z}{n(z-n)} \right\| \sim \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left\| \frac{1}{n^2} \right\| < +\infty$$

## 18.5. La funzione $\wp$ di Weierstrass

Ci prefiggiamo ora come obiettivo il trovare, tramite il teorema di Mittag-Leffer, una funzione meromorfa con poli in  $\Gamma := \{a\omega_1 + b\omega_2 \text{ t.c. } a, b \in \mathbb{Z}\}$  e  $\Gamma$ -periodica.

**Osservazione 18.11.** Un teorema di Liouville afferma che i poli della funzione cercata devono essere di ordine maggiore o uguale a 2. Dettagli nello Stein-Sharaki.

Come nell' esempio precedente provando semplicemente a sommare le parti principali desiderate, e quindi considerando

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{1}{(z-\omega)^2} + \frac{1}{z^2}$$

si otterrà una serie che in generale non convergerà: ad esempio, se  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = i$  e  $z = 0$  allora

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

va come

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}^2 / (0,0)} \frac{1}{n^2 + m^2}$$

che non converge, dato che va come

$$\int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{x^2 + y^2}$$

che diverge (coordinate polari). Proviamo quindi nuovamente a sottrarre i primi termini della serie di Taylor.

**Proposizione 1.**  $\sum_{\omega \in \Gamma^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$  converge assolutamente e uniformemente sui compatti.

*Dimostrazione.*

$$\sum_{\omega \in \Gamma^*} \left\| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\| = \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left\| \frac{z(z-2\omega)}{\omega^2(z-\omega)^2} \right\| \sim \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left\| \frac{1}{\omega^3} \right\| < +\infty$$

dove l'ultima disuguaglianza è stata già ottenuta precedentemente.  $\square$

**Definizione 18.12.** La seguente funzione, ben definita, è chiamata funzione  $\wp$  di Weierstrass:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Gamma^*} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

**Osservazione 18.13.** In virtù della proposizione precedente la serie presente nella definizione è convergente, quindi  $\wp$  è meromorfa con poli di ordine 2.

**Proposizione 2.** La funzione  $\wp$  è  $\Gamma$ -periodica e definisce quindi una funzione ellittica

*Dimostrazione.* Data la definizione  $\wp$  è pari.

La derivata

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

è  $\Gamma$ -periodica, infatti  $\forall \bar{\omega} \in \Gamma$

$$\wp'(z + \bar{\omega}) = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z + \bar{\omega} - \omega)^3} = -2 \sum_{\omega \in \Gamma} \frac{1}{(z - \omega)^3} = \wp'(z)$$

Quindi  $\wp(z + \omega) - \wp(z)$  è costante per  $\omega \in \Gamma$ , e ponendo  $z = -1/2\omega$  otteniamo  $\wp(-1/2\omega + \omega) - \wp(-1/2\omega) = \wp(1/2\omega) - \wp(-1/2\omega) = 0$  per parità.

Quindi  $\wp(z + \omega) - \wp(z) \equiv 0$  e  $\wp$  è  $\Gamma$  periodica.  $\square$

Enunciamo, senza dimostrarlo, il seguente importante teorema che mostra l'importanza della funzione  $\wp$  di Weierstrass nello studio delle funzioni ellittiche:

**Teorema 18.14.** Ogni funzione ellittica  $f$  è esprimibile nella forma:

$$f(z) = R(\wp(z)) + \wp'(z)S(\wp(z))$$

con  $R, S$  funzioni razionali.

## 19. La funzione gamma

### 19.1. La funzione $\Gamma(s)$ in $\mathbb{C}$

**Definizione 19.1.** Preso  $s \in \mathbb{R}, s > 0$  si definisce la funzione gamma

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Notiamo che l'integrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$  converge perchè per  $t \sim 0$   $e^{-t}$  è limitato e  $t^{s-1}$  è integrabile; d'altra parte per  $t$  grande  $e^{-t}$  va a 0 più velocemente di ogni potenza da cui la convergenza dell'integrale anche a  $t = \infty$ .

Estendiamo ora  $\Gamma(s)$  in  $\mathbb{C}$  per  $Re(s) > 0$ ; vale il seguente risultato:

**Proposizione 19.2.**  $\Gamma(s)$  si estende ad una funzione olomorfa in  $Re(s) > 0$  ed è ancora data da  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$ .

*Dimostrazione.* Presi  $M > \delta > 0$  e l'insieme  $S_{\delta, M} = \{s \in \mathbb{C} \text{ tali che } \delta < Re(s) < M\}$  mostriamo che l'enunciato vale per  $s = (\sigma + i\tau) \in S_{\delta, M}$ . Siccome (per  $t > 0$ )

$$t^s = e^{\log(t^s)} = e^s \log(t) = e^{(\sigma+i\tau)\log(t)}$$

si ha

$$\begin{aligned} |t^s| &= |t^\sigma| = t^\sigma \\ |e^{-t} t^{s-1}| &= e^{-t} t^{\sigma-1} \end{aligned} \quad (19.1)$$

Ne segue che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$$

è assolutamente convergente.

Preso la funzione

$$F(\varepsilon, s) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-t} t^{s-1} dt$$

si ha che  $F(\varepsilon, s)$  è olomorfa in  $S_{\delta, M}$ ; basta verificare che  $F(\varepsilon, s)$  verifica le equazioni di Cauchy-Riemann, il che è immediato una volta giustificato il passaggio delle derivate sotto il segno di integrale (il che è standard). Possiamo in alternativa utilizzare Morera + Fubini.

Notiamo ora che  $F(\varepsilon, s)$  converge uniformemente a  $\Gamma(s)$ ; vale infatti:

$$|\Gamma(s) - F(\varepsilon, s)| = \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{s-1} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt + \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt. \quad (19.2)$$

Ora, per  $t$  abbastanza piccolo vale la stima  $|e^{-t} t^{\sigma-1}| \leq t^{\sigma-1}$  e quindi:

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\sigma-1} dt \leq \int_0^{\varepsilon} t^{\delta-1} dt = \frac{\varepsilon^\delta}{\delta} \quad (19.3)$$

che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  converge uniformemente a 0. Per quel che concerne invece il secondo termine si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{\sigma-1} dt \right| &\leq \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} |e^{-t} t^{\sigma-1}| dt \leq \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-t} t^{M-1} dt = \\ &\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} t^{M-1} dt \leq C \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt \end{aligned} \quad (19.4)$$

con  $C$  una costante positiva. Tale termine converge a 0 per  $\varepsilon \rightarrow 0$  indipendentemente da  $s$ , e quindi  $F(\varepsilon, s)$  converge uniformemente a  $\Gamma(s)$  e quindi  $\Gamma(s)$  è olomorfa in  $S_{\delta, M}$  in quanto limite uniforme di funzioni olomorfe.

Dall'arbitrarietà di  $\delta$  e  $M$  si ha che  $\Gamma(s)$  è olomorfa per  $Re(s) > 0$ . □

**Corollario 19.3.** Se  $Re(s) > 0$  allora  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

*Dimostrazione.*

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt = e^{-t} t^s \Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

ma vale anche:

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}(e^{-t} t^s) dt = - \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} (e^{-t} t^s) dt + s \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} (e^{-t} t^{s-1}) dt \longrightarrow -\Gamma(s+1) + s \Gamma(s) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

da cui segue direttamente la tesi.  $\square$

**Lemma 19.4.**  $\Gamma(n+1) = n!$

*Dimostrazione.* È immediato verificare che  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ; allora dal corollario 19.3 segue direttamente il risultato.  $\square$

**Proposizione 19.5. Estensione meromorfa di  $\Gamma(s)$**

$\Gamma(s)$  (definita in  $Re(s) > 0$ ) si può estendere ad una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  con poli semplici solo in  $-n$  per  $n \in \mathbb{N}$ , e residuo in  $s = -n$  pari a  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo ad estendere  $\Gamma(s)$  per  $s \in Re(s) > -1$ . Consideriamo la funzione:

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \tag{19.5}$$

Siccome  $\Gamma(s+1)$  è olomorfa in  $Re(s+1) > 0$  cioè per  $Re(s) > -1$ , vediamo che  $F_1(s)$  è meromorfa in  $Re(s) > -1$ , con unico polo in  $s = 0$ .

Dalla proposizione precedente sappiamo anche che  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$  per  $Re(s) > 0$  e quindi  $F_1|_{Re(s)>0} = \Gamma(s)$ .

$F_1$  è dunque un'estensione meromorfa di  $\Gamma(s)$  a  $Re(s) > -1$ .

In generale preso  $m > 1, m \in \mathbb{N}$  si definisce:

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+(m+1))(s+(m-2))\dots s}$$

e con argomenti simili a quelli appena dati per  $F_1$  si vede facilmente che  $F_m$  è meromorfa in  $Re(s) > -m$  con poli in

$$s \in \{-(m-1), -(m-2), \dots, 0\}$$

e  $F_m|_{Re(s)>0} = \Gamma(s)$ . Inoltre queste estensioni sono compatibili:  $F_m = F_k$  per  $1 \leq k \leq m$  sul dominio di definizione di  $F_k$ .

Vogliamo ora calcolare il residuo in  $s = -n$ . Dal corollario 19.3 si ha che

$$\Gamma(-n+m) = \Gamma((-n+m-1)+1) = (-n+m-1)!$$

È allora elementare dimostrare che

$$Res[F_m, s = -n] = \frac{(-1)^n}{n!}$$

I dettagli sono lasciati per esercizio.  $\square$

**Osservazione 19.6.** L'estensione verifica ancora l'equazione funzionale  $F_m(s+1) = sF_m(s)$  con  $m \in \mathbb{N}$ .

Infatti:

$$F_m(s+1) = \frac{\Gamma(m+s+1)}{(s+1)(m-1)\dots(s+1)} = \frac{(s+m)\Gamma(m+s)}{(s+m)\dots(s+1)} = \frac{\Gamma(m+s)}{(s+m-1)\dots(s+1)} = sF_m(s)$$

## 19.2. Fattorizzazione di $\frac{1}{\Gamma(s)}$

Dimostreremo ora una fattorizzazione per  $\frac{1}{\Gamma(s)}$ .

Consideriamo  $\Gamma_n := \int_0^n t^{s-1} (1 - \frac{t}{n})^n dt$  per  $Re(s) > 0, n \geq 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\leq e^{-t} \quad \text{per } n \geq t, \\ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &\rightarrow e^{-t} \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La seconda è ben nota, mentre la prima discende dall'osservazione che per  $t \geq 0, t \leq n$

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) - (-t) = -t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^{k-1} \leq 0 \quad (19.6)$$

e quindi

$$n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$$

da cui la tesi dato che la funzione esponenziale è monotona. La (19.6) si ottiene dall'espansione del logaritmo

$$\text{Log}(1+w) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{w^k}{k}, \quad |w| < 1$$

prendendo  $w = -t/n$  e moltiplicando per  $n, n \geq t$ .

Allora per Lebesgue

$$\Gamma_n(s) \rightarrow \Gamma(s).$$

Cambiando coordinate con  $\tau = \frac{t}{n}$

$$\Gamma_n(s) = \int_0^1 (\tau n)^{s-1} (1-\tau)^n n d\tau = n^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^n d\tau \quad (19.7)$$

Per  $n = 1$  si ha quindi:

$$\int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau) d\tau = \int_0^1 (\tau^{s-1} - \tau^s) d\tau = \left[ \frac{\tau^s}{s} - \frac{\tau^{s+1}}{s+1} \right]_0^1 = \frac{1}{s(s+1)} \quad (19.8)$$

In particolare, siccome :

$$\begin{aligned} \Gamma_{n-1}(s+1) &= \int_0^1 \left( \tau^s (n-1)^s (1-\tau)^{n-1} (n-1) \right) d\tau = (n-1)^s \int_0^1 \left( \tau^s (1-\tau)^{n-1} \right) d\tau = \\ &= (n-1)^s \left[ \left( \frac{-\tau^s (1-\tau)^n}{n} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau \right] = (n-1)^s \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau \end{aligned}$$

Allora si può scrivere:

$$\Gamma_n(s) = n^s \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^n d\tau = \frac{n^{s+1}}{s(n-1)^s} (n-1)^s \int_0^1 \left( \frac{s}{n} \tau^{s-1} (1-\tau)^n \right) d\tau = \left( \frac{n}{n-1} \right)^s \frac{n}{s} \Gamma_{n-1}(s+1) \quad (19.9)$$

Applicando induttivamente (19.9)  $n-1$  volte otteniamo

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n-2)} \Gamma_1(s+n-1)$$

e quindi, infine,

$$\Gamma_n(s) = \frac{n^s n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

Abbiamo quindi, con calcoli elementari

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = \frac{1}{n^s} (1+s) \left(1 + \frac{s}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{s}{n}\right)$$

Prendiamo ora la funzione  $G$  con poli solo in  $\{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$  costruita durante lezione sul teorema di fattorizzazione di Weierstrass:

$$G(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

$G(s)$  è intera e si ha

$$G(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}};$$

Possiamo anche scrivere

$$\frac{1}{\Gamma_n(s)} = se^{\gamma_n s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}}$$

dove  $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n)$

**Proposizione 19.7.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$  esiste ed è la costante di Eulero  $\gamma$ .

Omettiamo per il momento la semplice dimostrazione.

Ma allora vale:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma_n(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} se^{\gamma_n s} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} = se^{\gamma s} G(s)$$

Questa identità vale per  $Res >$  ma poi per continuità analitica vale su tutto  $\mathbb{C}$ . Riassumendo

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-\frac{s}{k}} \quad (19.10)$$

Osserviamo che  $1/\Gamma(s)$  è intera, con zeri in  $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$ .

Segue anche che

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1} e^{\frac{s}{k}} \quad (19.11)$$

Alcuni testi, ad esempio il Conway, prendono questa espansione come *definizione* di  $\Gamma(s)$ .

**Osservazione 19.8.** Ricordando che:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right) = G(s)G(-s) \\ \implies \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(-s)} &= -s^2 G(s)G(-s) = -s \frac{\sin(\pi s)}{\pi} \end{aligned}$$

e da quanto osservato precedentemente,  $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$ , capiamo che vale la **formula di Eulero**:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \quad (19.12)$$

Quindi,

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \Gamma(1-s) \frac{\sin(\pi s)}{\pi}$$

Osserviamo che  $\Gamma(1-s)$  ha poli in  $s \in \mathbb{N}^+$  e che essi vengono cancellati dagli zeri di  $\sin(\pi s)$ . Ritroviamo allora che  $\frac{1}{\Gamma(s)}$  è intera con zeri in  $s = -n$  con  $n \in \mathbb{N}$  (questi sono gli zeri di  $\sin(\pi s)$  che non vengono cancellati dai poli di  $\Gamma(1-s)$ ).

**Osservazione 19.9.** Da quanto visto segue anche l'importante osservazione che  $\Gamma(s)$  non ha zeri.

**Osservazione 19.10.** Per un approccio diverso alla formula di Eulero potete consultare [SS].

## 20. La funzione zeta di Riemann

Sappiamo già che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge per  $\alpha > 1$ ; estendiamo ciò nei complessi.

**Proposizione 3.** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  converge per  $s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1$  e definisce una funzione olomorfa.

*Dimostrazione.* Dimostriamo la proposizione in  $\{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 1 + \delta\}$  per  $\delta > 0$ , per la sua generalità seguirà la tesi. Sia  $s = \sigma + it$  con  $\sigma > 1 + \delta$ , allora:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta+1}}$$

Quindi la serie converge uniformemente e per il teorema di Weierstrass la serie definisce una funzione olomorfa.  $\square$

Questa funzione è detta Zeta di Riemann ed è denotata con:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Prima di continuare lo studio di questa funzione diamo un veloce ripasso alla Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} | f \text{ è } C^\infty, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall n, k \in \mathbb{N}\}$$

$\mathcal{S}$  è detto *spazio delle funzioni a decrescenza rapida* (spazio di Schwartz) e la Trasformata di Fourier è una funzione  $\chi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  tale che<sup>15</sup>:

$$\chi(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx, \quad \text{con } f \in \mathcal{S}.$$

La nostra notazione sarà:  $\hat{f}(\xi) := \chi(f)(\xi)$ .

**Proposizione 4.** (Formula di Poisson) Data  $g \in \mathcal{S}$  vale:  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k)$ .

Riprendiamo lo studio della funzione Zeta di Riemann introducendo la funzione Theta.

**Definizione 20.1.** (funzione Theta)  $\theta(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t}$ , per  $t > 0$ .

**Proposizione 5.**  $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$ ,  $\forall t > 0$ .

*Dimostrazione.* Definiamo  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ,  $g(x) = f(\sqrt{t}x) = e^{-\pi t x^2}$  funzioni a decrescita rapida. Segue immediatamente<sup>16</sup> che  $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{t}}\right)$  e abbiamo già dimostrato come applicazione del teorema di Cauchy che  $\hat{f} = f$ , quindi otteniamo:  $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \xi^2 / t}$ . Usando la proposizione (4) otteniamo:

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi \frac{n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

$\square$

**Proposizione 6.**  $\theta(t) \leq C t^{-\frac{1}{2}}$  per  $0 < t \leq 1$ ,  $|\theta(t) - 1| \leq C e^{-\pi t}$  per  $t \geq 1$ .

*Dimostrazione.* Per il risultato precedente già sappiamo che:

$$\theta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \left( 1 + 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \frac{1}{t}} \right)$$

<sup>14</sup>  $|n^{-s}| = |e^{-s \text{Log} n}| = |e^{-\sigma \text{Log} n}| = n^{-\sigma}$ .

<sup>15</sup> In generale si dimostra che  $\chi$  è una biezione (usando l'Anti-Trasformata di Fourier).

<sup>16</sup> basta eseguire il cambio variabile  $y = \sqrt{t}x$ .

D'altra parte la serie  $\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \tau}$  ammette le seguenti maggiorazioni per  $\tau \geq 1$ :

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 \tau} \leq \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n \tau} = \frac{e^{-\pi \tau}}{1 - e^{-\pi \tau}} \leq K e^{-\pi \tau}, \quad \text{con } K = \frac{1}{1 - e^{-\pi}}.$$

Infatti ponendo  $\tau = \frac{1}{t}$  e osservando che la funzione  $e^{-\pi \tau}$  è limitata, si ottiene la prima maggiorazione. Invece per la seconda maggiorazione:

$$|\theta(t) - 1| = 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 t} \leq 2K e^{-\pi t}.$$

□

Adesso enunciamo un teorema che lega le funzioni Zeta, Theta e Gamma.

**Teorema 1.** Per  $\Re(s) > 1$  vale la seguente uguaglianza:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du. \quad (20.1)$$

*Dimostrazione.* Osserviamo prima di tutto che:

$$\int_0^\infty e^{-\pi n^2 u} u^{\frac{s}{2}-1} du \stackrel{(u = \frac{t}{\pi n^2})}{=} \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \frac{\theta(u) - 1}{2} = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 u}.$$

Quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} [\theta(u) - 1] du &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 u} du = 17 \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 u} du = \sum_{n \geq 1} \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.** La funzione  $\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$  è olomorfa in  $\Re(s) > 1$  e si estende ad una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$ , con poli semplici in  $s = 0, s = 1$ . Inoltre soddisfa  $\xi(s) = \xi(1 - s)$ .

*Dimostrazione.* Ovviamente  $\xi(s)$  è olomorfa in  $\Re(s) > 1$  perché è prodotto di tre funzioni olomorfe. Usiamo il teorema precedente per scriverci  $\xi(s)$  in modo differente al fine di liberarci di  $\zeta(s)$  (che, per adesso, è definita solo in  $\Re(s) > 1$ ). Osserviamo prima di tutto che grazie alla proposizione (5),  $\psi(u) := \frac{\theta(u) - 1}{2}$  gode della seguente proprietà:

$$\psi(u) = u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2}.$$

Quindi per il teorema (1):

$$\begin{aligned} \xi(s) &= \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du = \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \left( u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{1}{2u^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \right) du + \int_1^\infty \dots = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} u^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{1}{u}\right) du + \int_1^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \psi(u) du = \left( \begin{array}{l} \text{nel primo integrale effet-} \\ \text{tuiamo la sostituzione } \tau = \frac{1}{u} \\ \text{e uniamo gli integrali.} \end{array} \right) = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^\infty (u^{-\frac{s+1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}) \psi(u) du. \end{aligned}$$

In particolare l'integrale è sempre convergente (grazie alla stima della proposizione 6) ed al variare di  $s \in \mathbb{C}$ , si vede facilmente<sup>18</sup> che definisce una funzione olomorfa. Quindi  $\xi(s)$  si estende in tutto  $\mathbb{C}$  a una funzione meromorfa con poli semplici in  $s = 0, s = 1$ .

□

<sup>17</sup>Possiamo applicare la convergenza dominata perché valgono le seguenti stime:  $|u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{1 \leq n \leq N} e^{-\pi n^2 u}| \leq |u^{\frac{s}{2}-1}| C e^{-\pi u}$  per  $t \in [1, \infty)$   
 $|u^{\frac{s}{2}-1} \sum_{1 \leq n \leq N} e^{-\pi n^2 u}| \leq |u^{\frac{s}{2}-1}| (Ct^{-\frac{1}{2}} - 1)$  per  $t \in (0, 1)$ .

<sup>18</sup>integrando sotto segno di integrale o usando il teorema di Morera unito al teorema di Fubini.

Adesso sappiamo come si comportano  $\xi(s)$  e  $\Gamma^{-1}(s)$  in tutto  $\mathbb{C}$  e quindi, grazie al prossimo risultato, possiamo estendere anche la Zeta di Riemann.

**Teorema 3.**  $\zeta(s)$  si estende ad una funzione meromorfa in  $\mathbb{C}$  che ha un'unica singolarità (semplice) in  $s = 1$ .

*Dimostrazione.* Grazie al Teorema (2) e sapendo che la funzione  $\Gamma$  non si annulla mai, vale la seguente uguaglianza per  $\Re(s) > 1$ :

$$\zeta(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \xi(s) \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right).$$

A destra abbiamo un prodotto di funzioni meromorfe in  $\mathbb{C}$ , che rappresenta quindi un'estensione di  $\zeta(s)$ , in particolare (essendo  $\Gamma^{-1}$  intera) gli unici possibili poli per  $\zeta$  possono stare in  $s = 0$ ,  $s = 1$ , ma ricordando che  $\Gamma^{-1}$  si annulla in  $-2\mathbb{N}$ , otteniamo che  $\zeta(s)$  ha un unico polo semplice in  $s = 1$ .  $\square$

**Osservazione 20.2** (zeri banali). Per il Teorema (2), essendo  $\xi(s)$  olomorfa in  $s \in -2\mathbb{N}^*$ , la funzione  $\zeta(s)$  si deve annullare in quei punti per contrastare i poli della funzione  $\Gamma(\frac{s}{2})$ .

Adesso enunciamo un famoso teorema che lega la funzione zeta ai numeri primi.

**Teorema 4** (Eulero). Per  $\Re(s) > 1$  vale la seguente uguaglianza:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

*Dimostrazione.* Prima di tutto osserviamo che la funzione a destra è ben definita e olomorfa per  $\Re(s) > 1$ . Proviamo ciò in  $\{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 1 + \delta\}$ , la tesi seguirà per la generalità di  $\delta > 0$ . Ovviamente le funzioni  $f_p := \frac{1}{1 - p^{-s}}$  sono olomorfe, inoltre:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \text{ primo}} f_p(s) - 1 \right| &\leq \sum_{p \text{ primo}} \frac{|p^{-s}|}{1 - |p^{-s}|} = \sum_{p \text{ primo}} \frac{p^{-\Re(s)}}{1 - p^{-\Re(s)}} \leq \sum_{p \text{ primo}} \frac{p^{-(1+\delta)}}{1 - p^{-(1+\delta)}} \leq^{19} \\ &\leq \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \leq N}} \frac{p^{-(1+\delta)}}{1 - p^{-(1+\delta)}} + 2 \sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p > N}} p^{-(1+\delta)} \leq \sum_{p \text{ primo}} \frac{p^{-(1+\delta)}}{1 - p^{-(1+\delta)}} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-(1+\delta)} < \infty \end{aligned}$$

Quindi la produttoria  $\prod f_p$  definisce una funzione olomorfa in  $\Re(s) > 1$  per il teorema visto nella lezione sui prodotti infiniti.

Adesso andiamo a verificare la tesi per  $\Re(s) > 1 \cap \mathbb{R}$ , il risultato generale seguirà dall'unicità del prolungamento analitico. Indichiamo con  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  la successione dei numeri primi. Fissati  $0 < N < M$ , definiamo:

$$p_{(N)} := \max\{p \text{ primo} | p \leq N\}.$$

Ricordiamo che per il Teorema fondamentale dell'Aritmetica ogni naturale ha un'unica fattorizzazione in numeri primi, quindi segue:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} \frac{1}{n^s} &\leq \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{(N)} \\ k_i \leq M}} \frac{1}{(p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_{(N)}^{k_{(N)}})^s} \\ &= \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \dots + \frac{1}{p_1^{Ms}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{p_{(N)}^s} + \dots + \frac{1}{p_{(N)}^{Ms}}\right) \leq \\ &\leq \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}}\right) \leq \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right). \end{aligned}$$

Invece per la disuguaglianza opposta:

$$\prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \dots + \frac{1}{p^{Ms}}\right) \leq^{20} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Adesso basta mandare  $M \rightarrow \infty$  per ottenere la tesi.  $\square$

<sup>19</sup>Per  $p$  primo abbastanza grande ( $p > N$ ), si ha che  $p^{-(1+\delta)} \leq \frac{1}{2}$ .

<sup>20</sup>La produttoria finita genera una somma finita di termini distinti (per il Teorema fondamentale dell'Aritmetica)  $\frac{1}{a}$ , con  $a \in \mathbb{N}$ .

Osservando che i termini della produttoria non sono mai nulli in  $\Re(s) > 1$ , sempre per i risultati sui prodotti infiniti, segue il prossimo corollario.

**Corollario.**  $\zeta(s)$  non si annulla in  $\Re(s) > 1$ .

Ricordando che  $\xi(s) = \xi(1-s)$  per il Teorema (2), vale quindi la seguente equazione funzionale:

$$\zeta(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Quindi per  $\Re(s) < 0$ , otteniamo che gli unici zeri di  $\zeta(s)$  sono quelli banali ( $s \in -2\mathbb{N}^*$ ).

**Teorema 5** (zeri banali). Gli zeri di  $\zeta(s)$  fuori dalla striscia  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  sono quelli in  $-2\mathbb{N}^*$ .

Quella che segue è una delle congetture più famose in matematica e riguarda gli zeri non banali della Zeta di Riemann.

**Congettura.** (Ipotesi di Riemann) Se  $z_0 \in \mathbb{C}$  è uno zero di  $\zeta(s)$  e  $0 \leq \Re(z_0) \leq 1$ , allora  $\Re(z_0) = \frac{1}{2}$ .

## 21. Il teorema dei numeri primi

In questa sezione si assumerà che la variabile  $s$  sia della forma  $\sigma + it$ , cioè  $\sigma = \Re(s)$  e  $t = \Im(s)$ . Inoltre si indicherà con  $\mathbb{P}$  l'insieme dei numeri primi positivi.

Se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ , indichiamo con  $\pi(x)$  il numero di primi minori o uguali a  $x$ . Ricordiamo che  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

L'obiettivo di questa sezione e della prossima è dimostrare il seguente celebre risultato

**Teorema 21.1** (Teorema dei numeri primi).  $\pi(x) \sim x/\log(x)$

Per realizzare tale scopo dimostreremo alcuni risultati preliminari e sposteremo il problema su un'altra funzione,  $\psi_1(x)$ , che sarà in relazione con  $\zeta$ .

### 21.1. La retta $\Re(s) = 1$

Vogliamo dimostrare il seguente

**Teorema 21.2.**  $\zeta(s)$  non ha zeri sulla retta  $\Re(s) = 1$ .

**Lemma 21.3.** Se  $\Re(s) > 1$  allora  $\log(\zeta(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$  per alcuni  $c_n \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Sia  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ . Ricordiamo il prodotto di Eulero  $\zeta(s) = \prod_p \left( \frac{1}{1-p^{-s}} \right)$ . Per  $x \in [0, 1)$  si ha la nota espansione in serie di potenze  $\log \left( \frac{1}{1-x} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}$ .

Allora

$$\begin{aligned} \log(\zeta(s)) &= \log \left( \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \right) = \sum_p \log \left( \frac{1}{1-p^{-s}} \right) \\ &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-sm}}{m} = \sum_{p,m} \frac{p^{-sm}}{m} \end{aligned}$$

(la doppia sommatoria, con  $p$  che varia sui primi e  $m$  sugli interi positivi, converge assolutamente, quindi non dobbiamo specificare l'ordine di somma).

Possiamo allora definire, per  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{m} & n = p^m \text{ per un certo } p \in \mathbb{P} \text{ e un certo } m \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(osserviamo che  $c_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$ ).

Otteniamo dunque  $\log(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$  per  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ .

Se  $\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1\}$  sappiamo che  $\zeta(s)$  non si annulla in  $\Omega$ ; quindi  $\log_{\Omega}(\zeta(s))$  è ben definito. Ma allora per continuazione analitica otteniamo la tesi.  $\square$

**Osservazione 21.4.** Se  $\theta \in \mathbb{R}$  si ha  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) = 1 + 2 + 2 \cdot 2 \cos(\theta) + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 + 2 \cdot 2 \cos(\theta) + 2 \cos^2 \theta = 2(1 + \cos \theta)^2$ . Quindi  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0 \forall \theta \in \mathbb{R}$ .

**Osservazione 21.5.** Se  $n \in \mathbb{Z}^+$  si ha  $\Re(n^{-s}) = \Re(e^{-(\sigma+it) \log n}) =$

$$\begin{aligned} &\Re \left( e^{-\sigma \log n} [\cos((-t) \log n) + i \sin((-t) \log n)] \right) = \\ &e^{-\sigma \log n} \cos((-t) \log n) = \\ &e^{-\sigma \log n} \cos(t \log n) = \\ &n^{-\sigma} \cos(t \log n). \end{aligned}$$

**Proposizione 21.6.** Se  $\sigma > 1$  e  $t \in \mathbb{R}$  allora  $\log |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it) \zeta(\sigma + 2it)| \geq 0$ .

*Dimostrazione.* Sia ha  $\log |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| = 3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| = 3\Re(\log(\zeta(\sigma))) + 4\Re(\log(\zeta(\sigma + it))) + \Re(\log(\zeta(\sigma + 2it)))$  (si è utilizzato che  $\Re(\log(z)) = \log |z|$  in quanto  $\log(z) = \log |z| + i(\dots)$ , qualunque sia la definizione).

Ma per 21.3 e 21.5

$$\begin{aligned} & 3\Re(\log(\zeta(\sigma))) + 4\Re(\log(\zeta(\sigma + it))) + \Re(\log(\zeta(\sigma + 2it))) = \\ & 3\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma}\right) + 4\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-(\sigma+it)}\right) + \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-(\sigma+2it)}\right) = \\ & 3 \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma} \cos(t \log n) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma} \cos(2t \log n) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)), \\ & \text{che è } \geq 0 \text{ per 21.4 e perché } c_n \geq 0 \forall n. \quad \square \end{aligned}$$

*Dimostrazione del teorema 21.2.* Supponiamo per assurdo che  $\exists t_0 \in \mathbb{R} \mid \zeta(1 + it_0) = 0$ .  $t_0 \neq 0$  perché 1 è un polo per  $\zeta$ .  $\zeta$  è olomorfa in  $1 + it_0$ , per cui  $\exists \delta > 0$  ed una funzione  $G$  olomorfa in  $B_\delta(1 + it_0)$  tale che  $\zeta(\sigma + it_0) = (\sigma + it_0 - (1 + it_0))G(s) = (\sigma - 1)G(s)$  per  $\sigma \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ .

Sia  $K = \overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(1 + it_0)$  e sia  $c = \max_{s \in K} |G(s)|$ . Allora per  $\sigma \in (1 - \delta/2, 1 + \delta/2)$  si ha  $|\zeta(\sigma + it_0)|^4 \leq C|\sigma - 1|^4$  ( $C = c^4$ ).

Sappiamo che 1 è un polo semplice per  $\zeta$ , quindi analogamente esistono  $\delta', C' > 0$  tali che  $|\zeta(\sigma)|^3 \leq C'|\sigma - 1|^{-3}$  per  $\sigma \in (1 - \delta', 1 + \delta')$ .

Infine  $\zeta$  è olomorfa in  $\sigma + 2it_0$  e quindi esistono  $\delta'', C''$  tali che  $|\zeta(\sigma + 2it_0)| < C''$  per  $\sigma \in (1 - \delta'', 1 + \delta'')$ .

Allora, se  $\delta^* = \min \delta/2, \delta', \delta''$  e  $C^* = CC''C'''$ , si ha che  $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta(\sigma + 2it_0)| \leq C^*|\sigma - 1|$  per  $\sigma \in (1 - \delta^*, 1 + \delta^*)$  e quindi  $\lim_{\sigma \rightarrow 1} |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it_0)\zeta(\sigma + 2it_0)| = 0$ . Ma allora  $\exists \sigma^* > 1$  tale che  $|\zeta^3(\sigma^*)\zeta^4(\sigma^* + it_0)\zeta(\sigma^* + 2it_0)| < 1$  e quindi  $\log |\zeta^3(\sigma^*)\zeta^4(\sigma^* + it_0)\zeta(\sigma^* + 2it_0)| < 0$ , in contraddizione con 21.6.  $\square$

## 21.2. Andamento di $\zeta(s)$ vicino a $\Re(s) = 1$

Nel corso della dimostrazione del teorema dei numeri primi avremo bisogno di conoscere l'andamento di  $\zeta$  vicino alla retta  $\Re(s) = 1$ . La prossima proposizione svolge proprio questo ruolo:

**Proposizione 21.7.** Sia  $s = \sigma + it$ ; per ogni  $\sigma : 0 \leq \sigma_0 \leq 1, \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon$  tale che

1.  $|\zeta(s)| \leq c_\varepsilon |t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}$ , se  $\sigma_0 \leq \sigma$  e  $|t| \geq 1$
2.  $|\zeta'(s)| \leq c_\varepsilon |t|^\varepsilon$ , se  $1 \leq \sigma$  e  $|t| \geq 1$
3.  $1/|\zeta(s)| = O(|t|^\varepsilon)$  per  $\sigma \geq 1$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Vedremo la dimostrazione nella prossima lezione.  $\square$

## 21.3. Riduzione del problema alla funzione $\psi_1$

**Definizione 21.8** (Funzione di Tchebychev). Se  $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , definiamo

$$\psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+ \mid p^m \leq x} \log p.$$

**Definizione 21.9** (Funzione di von Mangoldt). Se  $n \in \mathbb{Z}^+$  definiamo

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } \exists p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+ \mid n = p^m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Osservazione 21.10.** Chiaramente  $\psi(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n)$ .

Se  $y \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $[y]$  la sua parte intera, cioè il più grande intero  $\leq y$ .

**Lemma 21.11.**  $\psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \left[ \frac{\log x}{\log p} \right] \log p$

*Dimostrazione.* In 21.8, se  $p \leq x$ ,  $\log p$  è sommato  $m$  volte dove  $m = \max \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid p^n \leq x\}$ , ma  $p^n \leq x \Leftrightarrow n \log p \leq \log x \Leftrightarrow n \leq \frac{\log x}{\log p}$ , quindi  $m = \max \left\{ n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq \frac{\log x}{\log p} \right\} = \left[ \frac{\log x}{\log p} \right]$ .  $\square$

**Proposizione 21.12.** Se  $\psi(x) \sim x$  per  $x \rightarrow +\infty$  allora  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

*Dimostrazione.* Dato che in generale  $\liminf \leq \limsup$ , è sufficiente dimostrare le due seguenti disuguaglianze:

$$(1) \quad 1 \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x}$$

e

$$(2) \quad \limsup_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq 1$$

Dimostrazione di (1): Per 21.11 si ha  $\psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \left[ \frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \log x = \pi(x) \log x$ . Dunque  $\frac{\psi(x)}{x} \leq \pi(x) \frac{\log x}{x}$ . Ma per ipotesi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ , per cui  $1 = \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x}$ .

Dimostrazione di (2): Fissiamo  $\alpha \in (0, 1)$ .  $\psi = \sum_{p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+, |p^m \leq x} \log p \geq \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} \log p \geq \sum_{p \in \mathbb{P}, |x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \sum_{p \in \mathbb{P}, |x^\alpha < p \leq x} \log(x^\alpha) = (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \alpha \log x \geq (\pi(x) - x^\alpha) \alpha \log x$ , per cui  $\psi(x) + x^\alpha \alpha \log x \geq \pi(x) \alpha \log x$ . Dividendo per  $x$  si ottiene  $\frac{\psi(x)}{x} + \alpha x^{\alpha-1} \log x \geq \alpha \pi(x) \frac{\log x}{x}$ . Dall'ipotesi si ottiene che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\psi(x)}{x} + \alpha x^{\alpha-1} \log x \right) = 1 + 0 = 1$  e dunque  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \alpha \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq \left( \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} + \alpha x^{\alpha-1} \log x \right) = 1$ , per cui  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq \frac{1}{\alpha}$ . Ma ciò vale  $\forall \alpha \in (0, 1)$ , per cui  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leq 1$ .  $\square$

**Definizione 21.13.** Se  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \geq 0$ , definiamo  $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(u) du$

**Proposizione 21.14.** Se  $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$  per  $x \rightarrow +\infty$  allora  $\psi(x) \sim x$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

*Dimostrazione.* Se  $\alpha < 1 < \beta$ , dato che  $\psi$  è crescente, si ha

$$\frac{1}{(1-\alpha)x} [\psi_1(x) - \psi_1(\alpha x)] = \frac{1}{(1-\alpha)x} \int_{\alpha x}^x \psi(u) du \leq$$

$$\psi(x) \leq$$

$$\frac{1}{(\beta-1)x} \int_x^{\beta x} \psi(u) du = \frac{1}{(\beta-1)x} [\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)].$$

$$\text{Da } \psi(x) \leq \frac{1}{(\beta-1)x} [\psi_1(\beta x) - \psi_1(x)] \text{ si ottiene } \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{1}{\beta-1} \left[ \frac{\psi_1(\beta x)}{(\beta x)^2} \beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2} \right].$$

$$\text{Ma per ipotesi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta-1} \left[ \frac{\psi_1(\beta x)}{(\beta x)^2} \beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2} \right] = \frac{1}{\beta-1} \left[ \frac{1}{2} \beta^2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} (\beta + 1), \text{ da cui}$$

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\beta-1} \left[ \frac{\psi_1(\beta x)}{(\beta x)^2} \beta^2 - \frac{\psi_1(x)}{x^2} \right] = \frac{1}{2} (\beta + 1).$$

Ma ciò vale  $\forall \beta > 1$ , per cui  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq 1$ . Analogamente, usando l'altra parte della disuguaglianza iniziale, si ottiene  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} \geq 1$ , per cui  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ .  $\square$

In conseguenza di 21.14 e 21.12, per dimostrare 21.1 è sufficiente dimostrare che  $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ .

## 21.4. Dimostrazione di $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$

Ora vogliamo mettere in relazione  $\psi_1$  con  $\zeta$ . Supponiamo  $\Re(s) > 1$ . Da 21.3 abbiamo

$$\log(\zeta(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+} \frac{p^{-ms}}{m}.$$

Derivando si ottiene che  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{Z}^+} \log(p) p^{-ms} = - \sum_{n=1}^{+\infty} d_n n^{-s}$  dove

$$c_n = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ma allora

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Il comportamento asintotico  $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$  sarà una conseguenza, tramite il risultato appena ottenuto, della relazione tra  $\psi_1$  e  $\zeta$ , che è espressa dalla seguente

**Proposizione 21.15.**  $\forall c > 1 \psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds$

*Dimostrazione.* Vedremo la dimostrazione nella prossima lezione.  $\square$

Assumiamo questa proposizione, l'andamento di  $\zeta$  vicino alla retta  $\Re(s) = 1$  e concludiamo la dimostrazione del teorema dei numeri primi.

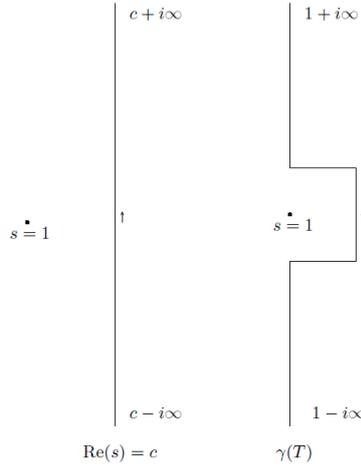


Figura 2:  $\Re(s) = c$  e  $\gamma(T)$

Sia

$$F(s) = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right)$$

con  $x \geq 2$  fissato. Fissiamo  $c > 1$ . Vogliamo dimostrare che

$$\int_{\Re(s)=c} F(s) ds = \int_{\gamma(T)} F(s) ds,$$

dove  $\gamma(T)$  è il percorso mostrato in figura 2, che collega con segmenti verticali e orizzontali nell'ordine:  $1 - i\infty, 1 - Ti, c - Ti, c + Ti, 1 + Ti$  e  $1 + i\infty$  (si veda anche figura 4 a sinistra).  $T \gg 0$  sarà scelto adeguatamente più avanti.

Osserviamo che

$$\int_{\Re(s)=c} F(s) ds - \int_{\gamma(T)} F(s) ds = \int_{\partial R_+} F(s) ds + \int_{\partial R_-} F(s) ds$$

dove  $R_+$  e  $R_-$  sono i rettangoli infiniti mostrati in figura 4 al centro ( $R_-$  collega nell'ordine  $c - i\infty, c - Ti, 1 - Ti, 1 - i\infty$ ;  $R_+$  collega nell'ordine  $1 + i\infty, 1 + Ti, c + Ti, c + i\infty$ ).

Fissiamo un  $l > T$  e scomponiamo ciascuno dei due rettangoli infiniti  $R_+$  e  $R_-$  in due rettangoli, uno finito di altezza  $l - T$  e uno infinito, come mostrato in figura 4 a destra. Chiamiamo  $R_+(l)$  e  $R_-(l)$  i rettangoli finiti e  $\tilde{\gamma}_+(l)$  e  $\tilde{\gamma}_-(l)$  i bordi dei rettangoli infiniti (ad esempio  $\tilde{\gamma}_-(l)$  collega nell'ordine  $c - i\infty, c - li, 1 - li$  e  $1 - i\infty$ ).

Otteniamo così

$$\begin{aligned} & \int_{\Re(s)=c} F(s) ds - \int_{\gamma(T)} F(s) ds = \\ & \int_{\partial R_+(l)} F(s) ds + \int_{\partial R_-(l)} F(s) ds + \int_{\tilde{\gamma}_+(l)} F(s) ds + \int_{\tilde{\gamma}_-(l)} F(s) ds \end{aligned}$$

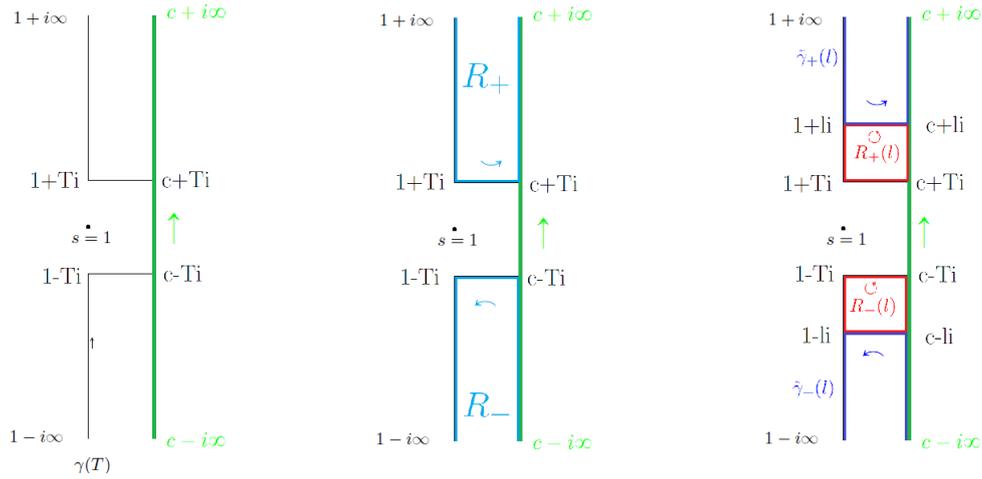


Figura 3: I cammini usati nella dimostrazione di  $\int_{\Re(s)=c} F(s) ds = \int_{\gamma(T)} F(s) ds$

Da 21.7 (punti (2) e (3)) si ha che  $\forall \eta > 0 \exists A > 0 \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq A|t|^\eta$  con  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $|t| \geq 1$ . Da ciò si ottiene

$$|F(s)| = \frac{|x|^{s+1}}{|s||s+1|} \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \frac{|x|^{s+1}}{|s|^2} A|t|^\eta \leq \frac{|x|^{s+1}}{|t|^2} A|t|^\eta = |x|^{s+1} A|t|^{-2+\eta}$$

( $|s| \leq |s+1|$  perché siamo nel semipiano destro). Ma allora  $|F(s)|$ , quando  $|t| \rightarrow +\infty$ , va a 0 più velocemente di  $|t|^{-\frac{3}{2}}$ , per cui  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\gamma}_+(l)} F(s) ds = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\gamma}_-(l)} F(s) ds = 0$ .

Ma per olomorfia  $\int_{\partial R_+(l)} F(s) ds = \int_{\partial R_-(l)} F(s) ds = 0$ , quindi  $\int_{\Re(s)=c} F(s) ds - \int_{\gamma(T)} F(s) ds = 0$ , cioè

$$\int_{\Re(s)=c} F(s) ds = \int_{\gamma(T)} F(s) ds$$

che è quello che volevamo dimostrare.

## 22. Il teorema dei numeri primi (continuazione)

### 22.1. Stime di $\zeta(s)$ in prossimità di $\text{Re } s = 1$

Vogliamo andare a studiare la crescita di  $\zeta$  vicino a  $\text{Re } s = 1$ ; ciò sarà fatto confrontando la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  con l'integrale  $\int_1^{\infty} x^{-s} dx$ .

**Proposizione 22.1.** Esiste una successione di funzioni intere  $\{\delta_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$  per le quali vale la stima  $|\delta_n(s)| \leq |s|/n^{\sigma+1}$ , con  $s = \sigma + it$ , e tali che per  $N > 1$  fissato si abbia

$$\sum_{1 \leq n < N} \frac{1}{n^s} - \int_1^N \frac{dx}{x^s} = \sum_{1 \leq n < N} \delta_n(s) \quad (22.1)$$

*Dimostrazione.* Si definisca  $\delta_n(s) = \int_n^{n+1} \left[ \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right] dx$ .

Per il teorema dei valori intermedi applicato a  $f(x) = x^{-s}$  si ha, per ogni  $x$  tale che  $n \leq x \leq n+1$ ,

$$\left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$$

in quanto  $|x - n| \leq 1$  e  $\forall \xi \in [n, x]$  si ha  $|f'(\xi)| = \frac{|s|}{|\xi|^{\sigma+1}}$ .

Segue dunque che  $|\delta_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$ ; si conclude notando che

$$\int_1^N \frac{dx}{x^s} = \sum_{1 \leq n < N} \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} \quad (22.2)$$

□

**Corollario 22.2.** Per  $s$  in  $\text{Re } s > 0$  si ha  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = H(s)$ , con  $H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(s)$  olomorfa in tale semipiano.

*Dimostrazione.* Si prenda  $N \rightarrow \infty$  in (22.1); per la stima vista sopra per  $|\delta_n(s)|$  si ha la convergenza totale della serie in  $\text{Re } s \geq \sigma$  per ogni  $\sigma > 0$ , dunque l'olomorfia in  $\text{Re } s > 0$ .

Si noti ora che su  $\text{Re } s > 1$  il termine di sinistra tende a  $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ , i.e., vale la tesi; per prolungamento analitico, in virtù della sopracitata olomorfia della serie in  $\text{Re } s > 0$ , l'uguaglianza continua a valere anche in tale semipiano. □

Come visto in precedenza, in  $\text{Re } s > 1$  si ha  $|\zeta(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ , dunque  $\zeta$  è limitata in ogni semipiano  $\text{Re } s \geq 1 + \delta$  con  $\delta > 0$ . Siamo ora interessati a cosa accade per  $\text{Re } s = 1$ .

**Proposizione 22.3.** Sia  $s = \sigma + it$ ; per ogni  $\sigma : 0 \leq \sigma_0 \leq 1$ ,  $\varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon$  tale che

1.  $|\zeta(s)| \leq c_\varepsilon |t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}$ , se  $\sigma_0 \leq \sigma$  e  $|t| \geq 1$
2.  $|\zeta'(s)| \leq c_\varepsilon |t|^\varepsilon$ , se  $1 \leq \sigma$  e  $|t| \geq 1$
3.  $1/|\zeta(s)| = O(|t|^\varepsilon)$  per  $\sigma \geq 1$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Per quanto visto si ha  $|\delta_n(s)| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}$ ; poiché  $|n^{-s}| = n^{-\sigma}$ , dalla definizione di  $\delta_n$  si ottiene per disuguaglianza triangolare la stima  $|\delta_n(s)| \leq \frac{2}{n^\sigma}$ , donde si ha

$$|\delta_n(s)| \leq \left( \frac{|s|}{n^{\sigma_0+1}} \right)^\delta \left( \frac{2}{n^{\sigma_0}} \right)^{1-\delta} \leq \frac{2|s|^\delta}{n^{\sigma_0+\delta}} \quad (22.3)$$

per ogni  $\delta \geq 0$ , in virtù del fatto che  $n^{-\sigma_0} \geq n^{-\sigma}$ .

Si prendano  $\delta = 1 - \sigma_0 + \varepsilon$ ,  $\sigma = \text{Re } s \geq \sigma_0$ . Per il Corollario 22.2 si ha allora

$$|\zeta(s)| \leq \left| \frac{1}{s-1} \right| + 2|s|^{1-\sigma_0+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad (22.4)$$

Si noti ora che  $\frac{1}{|s-1|} \leq \frac{1}{|t|} \leq |t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}$ , per cui rimane da mostrare che per  $\varepsilon$  fissato  $|s|^{1-\sigma_0+\varepsilon} \leq A|t|^{1-\sigma_0+\varepsilon}$  per un opportuno  $A$ .

Si noti che se  $\sigma \geq 2$   $|\zeta(s)| \leq \frac{\pi^2}{6}$ , dunque essendo  $|t| \geq 1$  e  $1 - \sigma_0 + \varepsilon > 0$  vale la tesi; possiamo quindi limitarci a considerare  $\sigma_0 \leq \sigma \leq 2$ . Si ha ora  $|s| \leq 5\frac{1}{2}|t|$ , indi per cui esiste  $A$  per cui vale la disuguaglianza per ogni  $s = \sigma + it$  con  $\sigma_0 \leq \sigma$  e  $|t| \geq 1$ , come richiesto.

Passiamo dunque alla seconda stima, che seguirà facilmente dalla prima. Senza perdita di generalità sia  $\varepsilon < 1$ . Si noti innanzitutto che, per  $r < 1$ , si ha per Cauchy

$$\zeta'(s) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \zeta(s + re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \quad (22.5)$$

Supponiamo ora che  $|t| > 1$ , in modo che esista  $\varepsilon > 0$  tale che  $|t - \varepsilon| \geq 1$ , Prendendo  $r = \frac{\varepsilon}{2}$  e usando la proposizione precedente per stimare l'integrando, con  $\sigma_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , si ha la tesi.

Il caso  $|t| = 1$  segue ora da quanto sopra tramite passaggio al limite, usando la continuità della norma e l'olomorfia di  $\zeta'$  in  $\{\text{Re } s > 0\} \setminus \{1\}$ .

Veniamo infine alla terza stima. Possiamo supporre che valga  $1 \leq \sigma < 2$ , dal momento che per  $\sigma \geq 2$  si ha, per il teorema fondamentale dell'aritmetica,

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = |\Pi_p(1 - p^{-s})| < \Pi_p(1 + p^{-\sigma}) < \zeta(\sigma) \leq \zeta(2) \quad (22.6)$$

Per quanto visto in precedenza si ha, per  $\sigma > 1$ ,

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1 \quad (22.7)$$

e, in virtù della stima sopra e del Corollario 22.2, si ha per  $1 < \sigma < 2$ ,  $|t| \geq 1$

$$|\zeta^4(\sigma + it)| \geq c |\zeta^{-3}(\sigma)| |t|^{-\varepsilon} \geq c'(\sigma - 1)^3 |t|^{-\varepsilon} \quad (22.8)$$

Si osservi che tale disuguaglianza vale chiaramente anche per  $\sigma = 1$ , dunque

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq c'(\sigma - 1)^{3/4} |t|^{-\varepsilon/4} \quad \text{per } 1 \leq \sigma < 2 \text{ e } |t| \geq 1. \quad (22.9)$$

Distinguiamo due casi, a seconda che valga o meno  $\sigma - 1 \geq A|t|^{-5\varepsilon}$  per un'opportuna costante  $A$ . Osserviamo che, in caso affermativo, combinando tale disuguaglianza con la (22.8) si ottiene la tesi; supponiamo quindi che essa non valga, e si prenda  $\sigma' > \sigma$  per il quale valga l'uguaglianza  $\sigma' - 1 = A|t|^{-5\varepsilon}$ , assumendo  $t$  sufficientemente grande da assicurarsi che  $\sigma' < 2$ .

Per disuguaglianza triangolare si ha

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq |\zeta(\sigma' + it)| - |\zeta(\sigma' + it) - \zeta(\sigma + it)| \quad (22.10)$$

e dunque, usando il teorema del valor medio, la stima del punto 2 e il fatto che  $|\sigma' - \sigma| \leq |\sigma' - 1|$  per quanto supposto, si trova

$$|\zeta(\sigma' + it) - \zeta(\sigma + it)| \leq c'' |\sigma' - \sigma| |t|^\varepsilon \leq c'' |\sigma' - 1| |t|^\varepsilon \quad (22.11)$$

Usando la stima per  $|\zeta(\sigma + it)|$  vista in precedenza prendendo  $\sigma = \sigma'$  (valida in quanto  $\sigma' < 2$  per costruzione), si ha allora

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq c'(\sigma' - 1)^{3/4} |t|^{-\varepsilon/4} - c''(\sigma' - 1) |t|^\varepsilon. \quad (22.12)$$

Si prenda  $A = (\frac{c'}{2c''})^4$ , in modo da avere

$$\begin{aligned} c'(\sigma' - 1)^{3/4} |t|^{-\varepsilon/4} &= c' |\sigma' - 1| A^{-\frac{1}{4}} |t|^\varepsilon \\ &= 2c'' (\sigma' - 1) |t|^\varepsilon \end{aligned} \quad (22.13)$$

Mettendo insieme le stime viste si ottiene

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq c'' (\sigma' - 1) |t|^\varepsilon = Ac'' |t|^{-4\varepsilon}, \quad (22.14)$$

dunque prendendo  $\frac{\varepsilon}{4}$  invece che  $\varepsilon$  nell'applicare la stima del punto 2 si conclude.  $\square$

## 22.2. Il teorema dei numeri primi: fine della dimostrazione

Dimostriamo ora l'espressione integrale per  $\psi_1$  impiegata nella dimostrazione del teorema dei numeri primi.

**Proposizione 22.4.** Per ogni  $c > 1$  si ha

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds \quad (22.15)$$

Premettiamo alla dimostrazione il seguente lemma.

**Lemma 22.5.** Per ogni  $c > 0$  si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{a^s}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a \leq 1, \\ 1 - 1/a & \text{se } 1 \leq a. \end{cases} \quad (22.16)$$

*Dimostrazione.* Si noti innanzitutto che  $|a^s| = a^c$ , dunque l'integrale converge. Supponiamo  $a \geq 1$  e si scriva  $a = e^\beta$ , con  $\beta \geq 0$ . Definiamo poi

$$f(s) = \frac{a^s}{s(s+1)} = \frac{e^{s\beta}}{s(s+1)} \quad (22.17)$$

e notiamo che  $\text{Res}[f, 0] = 1$ ,  $\text{Res}[f, -1] = -\frac{1}{a}$ .

Si definisca ora il circuito  $\Gamma(T)$  come quello costituito dall'unione di  $S(T)$ , il segmento verticale da  $c - iT$  a  $c + iT$ , e  $C(T)$ , il semicerchio di centro  $s = c$  e raggio  $T$  a sinistra della retta  $\text{Re } s = c$ , percorso in senso antiorario. Si prenda inoltre  $T$  abbastanza grande da far sì che la regione limitata racchiusa da  $\Gamma(T)$  contenga 0 e  $-1$ , in modo che per il teorema dei residui si abbia

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(T)} f(s) ds = 1 - \frac{1}{a}$$

Per concludere basta ora mostrare che l'integrale sul semicerchio va a 0 quando  $T$  va a infinito. Per  $T$  sufficientemente grande si ha  $\frac{1}{|s(s+1)|} \leq \frac{1}{(T-c)(T-c-1)} \leq \frac{2}{T^2}$  per  $s$  sul semicerchio, dunque

$$\left| \int_{C(T)} f(s) ds \right| \leq \int_{C(T)} \frac{2e^{\beta c}}{T^2} ds \leq \frac{C}{T^2} 2\pi T \rightarrow 0 \quad \text{per } T \rightarrow \infty \quad (22.18)$$

e abbiamo concluso.

Consideriamo quindi  $0 \leq a \leq 1$ . Prendendo un circuito analogo a quello sopra ma speculare rispetto a  $\text{Re } s = c$  e notando che non contiene poli di  $f$ , per il teorema dei residui basta mostrare che l'integrale sul nuovo semicerchio  $C'(T)$  va a 0 per  $T$  che va a infinito.

Usando che  $|a| \leq 1$  e  $|s| \geq (T^2 + c^2)^{1/2} > T$  per  $s$  in  $C'(T)$ , si ha

$$\left| \int_{C'(T)} f(s) ds \right| \leq \int_{C'(T)} \frac{2}{T^2} ds \leq \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0 \quad \text{per } T \rightarrow \infty \quad (22.19)$$

e si conclude. □

Armati di tale lemma, accingiamoci a dimostrare la proposizione 22.4.

*Dimostrazione.* Si noti che

$$\psi(u) = \sum_{1 \leq n \leq u} \Lambda(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f_n(u) \quad (22.20)$$

con  $f_n(u) = 1$  se  $n \leq u$ , 0 altrimenti. Segue che

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_1^x \psi(u) du = \int_0^x \psi(u) du \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f_n(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \Lambda(n) f_n(u) du \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \Lambda(n) \int_n^x du \end{aligned}$$

e quindi

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x - n)$$

dove si è potuto scambiare serie e integrale in virtù di

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) f_n(u) du = \int_0^x \sum_{n=1}^{[x]} \Lambda(n) f_n(u) du = \sum_{n=1}^{[x]} \int_0^x \Lambda(n) f_n(u) du = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \Lambda(n) f_n(u) du. \quad (22.21)$$

Ricordando che per  $\operatorname{Re} s > 1 - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$  si ha, applicando il Lemma 22.5 con  $a = \frac{x}{n}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds &= x \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(x/n)^s}{s(s+1)} ds \\ &= x \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left( 1 - \frac{n}{x} \right) \\ &= \psi_1(x). \end{aligned} \quad (22.22)$$

□

Siamo ora finalmente in grado di completare la dimostrazione della stima asintotica desiderata per  $\psi_1$ , che per quanto visto in precedenza implicherà il teorema dei numeri primi.

**Proposizione 22.6.** Si ha  $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$  per  $x \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Si definisca

$$g(s) := \frac{1}{2\pi i} \frac{F(s)}{x^{s+1}} = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{s(s+1)} \zeta'(s) \frac{1}{\zeta(s)}$$

Per quanto già visto si ha  $\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(T)} F(s) ds$ , dunque  $\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \int_{\gamma(T)} g(s) x^{s-1} ds$ . Segue dalle stime sopra che per opportuni  $A_i > 0$  si ha

$$|g(s)| < A_1 |t|^{-2} A_2 |t|^{\frac{1}{4}} A_3 |t|^{\frac{1}{4}} < A_4 |t|^{-\frac{3}{2}}$$

quando  $\sigma \geq 1$ ,  $|t| > t_0$ , per un  $t_0$  opportuno. Sia ora  $\varepsilon > 0$  e si definisca la spezzata infinita  $\gamma(T, \delta)$  come mostrato in figura, con  $T$  scelto in modo che

$$\int_T^{\infty} |g(1+it)| dt < \varepsilon$$

e  $0 < \delta < 1$  tale che il rettangolo  $\delta \leq \sigma \leq 1$ ,  $-T \leq t \leq T$  non contenga zeri di  $\zeta(s)$ .

Tali scelte sono possibili in virtù della stima sopra per  $|g|$  e del fatto che  $\zeta(s)$  non ha zeri sulla retta  $\operatorname{Re} s = 1$  e, per olomorfia, ne ha un numero finito nel rettangolo  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ ,  $-T \leq t \leq T$ .

Per il teorema dei residui si trova ora

$$\int_{\gamma(T)} g(s) x^{s-1} ds - \int_{\gamma(T, \delta)} g(s) x^{s-1} ds = \frac{1}{2}$$

da cui segue

$$\frac{\psi_1}{x^2} - \frac{1}{2} = \int_{\gamma(T, \delta)} g(s) x^{s-1} ds$$

Procediamo ora a studiare i vari  $J_i := \int_{\gamma_i} g(s) x^{s-1} ds$ , con i  $\gamma_i$  definiti come in figura. Poichè  $g$  assume valori coniugati per valori coniugati di  $s$ , si ha

$$|J_1| = |J_5| = \left| \int_T^{\infty} g(1+it) x^{it} dt \right| \leq \int_T^{\infty} |g(1+it)| dt < \varepsilon$$

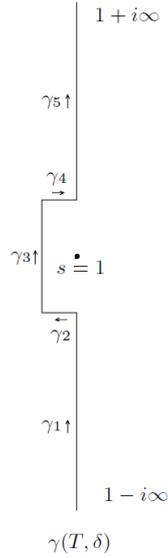


Figura 4:  $\gamma(T, \delta)$

Poichè  $x > 1$  si ha inoltre, detto  $M$  il massimo di  $|g(s)|$  sull'unione di  $\gamma_2, \gamma_3$  e  $\gamma_4$ ,

$$|J_2| = |J_4| = \left| \int_{\delta}^1 g(\sigma + iT)x^{\sigma+iT-1}d\sigma \right| \leq M \int_{\delta}^1 x^{\sigma-1}d\sigma < \frac{M}{\log x},$$

$$|J_3| \leq 2MTx^{\delta-1}$$

Mettendo insieme le disuguaglianze ottenute si trova

$$\left| \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \right| < 2\varepsilon + \frac{2M}{\log x} + \frac{2MT}{x^{1-\delta}} < 3\varepsilon$$

per ogni  $x > x_0 = x_0(\varepsilon)$ , da cui si conclude. □

Il teorema dei numeri primi è ora completamente dimostrato.

### 22.3. Appendice: un raffinamento delle stime vicino a $\text{Re } s = 1$

Le stime mostrate nella Proposizione 22.3, pur se sufficienti ai nostri scopi, sono ben lontane dall'essere ottimali. Per completezza proponiamo un loro leggero raffinamento, che fornirà un'altra dimostrazione dell'esistenza del prolungamento analitico di  $\zeta$  in  $\text{Re } s > 0$  fornendone l'espressione esplicita. Premettiamo il seguente teorema generale.

**Teorema 22.7.** Sia  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  una successione reale non decrescente e tendente a  $+\infty$ , e sia

$$C(x) = \sum_{n:\lambda_n \leq x} c_n,$$

con  $c_n$  successione di numeri complessi. Dati  $X \geq \lambda_1$  e una funzione  $\phi$  avente derivata continua, si ha

$$\sum_{\lambda_n \in X} c_n \phi(\lambda_n) = - \int_{\lambda_1}^X C(x) \phi'(x) dx + C(X) \phi(X). \quad (22.23)$$

Se inoltre  $C(X) \phi(X) \rightarrow 0$  per  $X \rightarrow \infty$ , si ha

$$\sum_1^{\infty} c_n \phi(\lambda_n) = - \int_{\lambda_1}^{\infty} C(x) \phi'(x) dx,$$

se uno dei due termini è convergente.

*Dimostrazione.* Sia  $S$  il termine a sinistra nell'espressione (22.23). Si ha allora

$$\begin{aligned} C(X)\phi(X) - S &= \sum_{\lambda_1 \leq X} c_n \{\phi(X) - \phi(\lambda_n)\} = \sum_{\lambda_n \leq X} \int_{\lambda_n}^X c_n \phi'(x) dx \\ &= \int_{\lambda_1}^X \sum_{\lambda_n \leq x} c_n \phi'(x) dx = \int_{\lambda_1}^X C(x) \phi'(x) dx \end{aligned}$$

come desiderato. La seconda formula segue prendendo  $X \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Corollario 22.8.** Si ha  $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$  per  $\sigma > 1$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema appena mostrato si ha, prendendo  $\lambda_n = n$ ,  $c_n = 1$ ,  $\phi(x) = x^{-s}$ ,

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} = s \int_1^X \frac{[x]}{x^{s+1}} dx + \frac{[X]}{X^s} \quad (22.24)$$

da cui segue immediatamente

$$\sum_{n \in X} \frac{1}{n^s} = \frac{s}{s-1} - \frac{s}{(s-1)X^{s-1}} - s \int_1^X \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{X^{s-1}} - \frac{\{X\}}{X^s}. \quad (22.25)$$

Poichè  $|X^{1-s}| = X^{1-\sigma}$  e  $\left| \frac{\{X\}}{X^s} \right| \leq X^{-\sigma}$ , prendendo  $X \rightarrow \infty$  si trova per  $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \quad (22.26)$$

come desiderato.  $\square$

**Teorema 22.9.** Si ha

1.  $|\zeta(s)| < A_1 \log t \quad (\sigma \geq 1, t \geq 2)$
2.  $|\zeta'(s)| < A_2 \log^2 t \quad (\sigma \geq 1, t \geq 2)$
3.  $|\zeta(s)| < A(\delta)t^{1-\delta} \quad (\sigma \geq \delta, t \geq 1)$  se  $0 < \delta < 1$ .

**Osservazione 22.10.** Poichè per la (22.26)  $\zeta(\sigma + it)$  e  $\zeta(\sigma - it)$  sono coniugati quanto sopra vale, mutatis mutandis, anche per  $t < 0$ .

*Dimostrazione.* Da (22.25) e (22.26) segue, per  $\sigma > 0$ ,  $t \geq 1$  e  $X \geq 1$ ,

$$\zeta(s) - \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{(s-1)X^{s-1}} + \frac{\{X\}}{X^s} - s \int_X^\infty \frac{(x)dx}{x^{s+1}} \quad (22.27)$$

da cui si ha, poichè  $|s| < \sigma + t$ ,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tX^{\sigma-1}} + \frac{1}{X^\sigma} + |s| \int_X^\infty \frac{dx}{x^{\sigma+1}} \\ &< \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{1}{tX^{\sigma-1}} + \frac{1}{X^\sigma} + \left(1 + \frac{t}{\sigma}\right) \frac{1}{X^\sigma} \end{aligned} \quad (22.28)$$

Se  $\sigma \geq 1$  si ha

$$|\zeta(s)| < \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} + \frac{1}{t} + \frac{1}{X} + \frac{1+t}{X} < (\log X + 1) + 3 + \frac{t}{X} \quad (22.29)$$

dalla quale, prendendo  $X = t$ , segue la prima disuguaglianza con  $A_1 = 1 + \frac{5}{\log 2}$ .

Se  $\sigma \geq \eta$ , con  $0 < \eta < 1$ ,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &< \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^\eta} + \frac{1}{tX^{\eta-1}} + \left(2 + \frac{t}{\eta}\right) \frac{1}{X^\eta} \\ &< \int_0^{[X]} \frac{dx}{x^\eta} + \frac{X^{1-\eta}}{t} + \frac{3t}{\eta X^\eta} < \frac{X^{1-\eta}}{1-\eta} + X^{1-\eta} + \frac{3t}{\eta X^\eta}. \end{aligned} \quad (22.30)$$

Prendendo nuovamente  $X = t$  segue

$$|\zeta(s)| < t^{1-\eta} \left( \frac{1}{1-\eta} + 1 + \frac{3}{\eta} \right) \quad (22.31)$$

ossia la terza stima con  $A(\delta) = \left( \frac{1}{1-\delta} + 1 + \frac{3}{\delta} \right)$ .

Deduciamo infine la seconda disuguaglianza in maniera simile a quanto fatto per la corrispondente stima vista nella Proposizione 22.3. Sia  $s_0 = \sigma_0 + it_0$  un punto di  $\sigma > 1$ ,  $t \geq 2$  e  $C$  il cerchio di centro  $s_0$  e raggio  $\rho < \frac{1}{2}$ . Per Cauchy si ha

$$|\zeta'(s_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta(s)}{(s-s_0)^2} ds \right| < \frac{M}{\rho}, \quad (22.32)$$

con  $M$  il massimo di  $|\zeta(s)|$  sul compatto  $C$ ; poiché  $\sigma \geq \sigma_0 - \rho \geq 1 - \rho$  e  $1 < t < 2t_0$  per ogni punto  $s = \sigma + it$  di  $C$ , segue da (22.31)

$$M < (2t_0)^\rho \left( \frac{1}{\rho} + 1 + \frac{3}{1-\rho} \right) < \frac{10t_0\rho}{\rho}, \quad (22.33)$$

poiché  $\rho < 1 - \rho < 1$ ,  $2^\rho < 2$  e dunque

$$|\zeta'(s_0)| < 10t_0^\rho/\rho^2. \quad (22.34)$$

Si prenda  $\rho = \frac{1}{(\log t_0 + 2)}$ . Si ha  $t_0^\rho = e^{\rho \log t_0} < e$ , da cui si trova

$$|\zeta'(s_0)| < 10e(\log t_0 + 2)^2.$$

e si conclude per l'arbitrarietà di  $s_0$  prendendo  $A_2 = 10e(\frac{2}{\log 2})^2$ .  $\square$

**Lemma 22.11.** Si ha  $\frac{1}{\zeta(s)} = O((\log t)^7)$  uniformemente su  $\text{Re } s \geq 1$ , per  $t \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione.* Possiamo supporre che valga  $1 \leq \sigma < 2$ , dal momento che per  $\sigma \geq 2$  si ha, per il teorema fondamentale dell'aritmetica,

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| = |\Pi_p(1-p^{-s})| < \Pi_p(1+p^{-\sigma}) < \zeta(\sigma) \leq \zeta(2) \quad (22.35)$$

Per  $1 < \sigma < 2$ ,  $t \geq 2$ , in virtù di

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)| \geq 1 \quad (22.36)$$

e dunque di

$$\{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\}^3 \left| \frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1} \right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1} \quad (22.37)$$

si ha ora, poichè  $\zeta(\sigma) \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\sigma} dx = 1 + \frac{1}{\sigma-1}$ ,

$$(\sigma-1)^3 \leq \{(\sigma-1)\zeta(\sigma)\}^3 |\zeta(\sigma+it)|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \leq 8|\zeta(\sigma+it)|^4 A_1 \log(2t). \quad (22.38)$$

Poiché  $\log 2t \leq \log t^2 = 2\log t$  si ha allora

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq \frac{(\sigma-1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\log t)^{\frac{1}{4}}} \quad (22.39)$$

per  $1 \leq \sigma < 2$ ,  $t \geq 2$ , con  $A_3 = 2A_1^{\frac{1}{4}}$  e l'uguaglianza chiaramente vera per  $\sigma = 1$ .

Sia ora  $1 < \eta < 2$ . Se  $1 \leq \sigma \leq \eta$ ,  $t \geq 2$  si ha

$$|\zeta(\sigma+it) - \zeta(\eta+it)| = \left| \int_\sigma^\eta \zeta'(u+it) du \right| \leq A_2 \log^2 t (\eta-1) \quad (22.40)$$

e dunque per (22.39) vale

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma+it)| &\geq |\zeta(\eta+it)| - A_2(\log t)^2(\eta-1) \\ &\geq \frac{(\eta-1)^{\frac{3}{4}}}{A_3(\log t)^t} - A_2(\log t)^2(\eta-1) \end{aligned} \quad (22.41)$$

per ogni  $1 \leq \sigma < 2$ ,  $t \geq 2$ . Si prenda  $\eta = \eta(t)$  in modo che valga

$$\frac{(\eta - 1)^3}{A_3(\log t)^{\ddagger}} = 2A_2(\eta - 1)(\log t)^2,$$

i.e.,  $\eta = 1 + (2A_3A_2)^{-4}(\log t)^{-9}$ ,

assumendo  $t$  sufficientemente grande da far sì che  $\eta < 2$ . Segue quindi

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq A_2(\eta - 1)(\log t)^2 = A_4(\log t)^{-7},$$

ossia la tesi. □