te chiuso. Per fissare le idee si può supporre $K = \mathbf{C}$.

Studiare l'intersezione di due curve, cioè determinarne i punti comuni, equivale a risolvere un sistema algebrico di due equazioni. Iniziamo, in questo paragrafo, dal caso più semplice, cioè l'intersezione di una curva algebrica di grado n con una retta.

Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva di grado n di equazione $F(X_0, X_1, X_2) = 0$. Se r è una retta, essa può essere individuata da due suoi punti distinti, $P(a, b, c)$ e $Q(a', b', c')$, sicché ogni altro punto di r ha coordinate $(\lambda a+\mu a', \lambda b+\mu b', \lambda c+\mu c')$, con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Tale punto può sinteticamente denotarsi con $\lambda P + \mu Q$. Ovviamente $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{C}$ se, e soltanto se, $F(\lambda P + \mu Q) = 0$, ove $F(\lambda P + \mu Q) = F(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$.

L'equazione $F(\lambda P + \mu Q) = 0$ è omogenea di grado n in λ e μ e le sue soluzioni danno i punti di $r \cap \mathcal{C}$. Se $F(\lambda P + \mu Q)$ è identicamente nullo, allora la retta r è contenuta nel supporto di $\mathcal{C}$. Escluso questo caso, l'equazione $F(\lambda P + \mu Q) = 0$ è del tipo

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1}\mu + \cdots + a_{n-1}\lambda\mu^{n-1} + a_n\mu^n = 0.$$

Sia $h \geq 0$ la molteplicità di λ come fattore di $F(\lambda P + \mu Q)$. Allora

$$F(\lambda P + \mu Q) = \lambda^h G(\lambda, \mu),$$

ove $G(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo di grado $n - h$, non divisibile per λ. Il polinomio $G(1, \mu)$, essendo K algebricamente chiuso, si fattorizza in

$$G(1, \mu) = a(\mu - b_1) \ldots (\mu - b_{n-h}), \;\; a \neq 0.$$

Omogeneizzando otteniamo

$$G(\lambda, \mu) = a(\mu - b_1\lambda) \ldots (\mu - b_{n-h}\lambda).$$

Quindi

$$F(\lambda P + \mu Q) = a\lambda^h(\mu - b_1\lambda) \ldots (\mu - b_{n-h}\lambda).$$

Pertanto l'equazione $F(\lambda P + \mu Q) = 0$ ammette n soluzioni omogenee, ciascuna contata con la sua molteplicità. Ciò permette di dare la seguente:

Definizione 1.5. *Siano r e $\mathcal{C}$, rispettivamente, una retta e una curva algebrica di $\mathbf{P}^2(K)$. Si dice che r e $\mathcal{C}$ hanno molteplicità di intersezione $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ nel punto $P_0 = \lambda_0 P + \mu_0 Q$ di r, se (λ_0, μ_0) è una radice di molteplicità $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ del polinomio $F(\lambda P + \mu Q)$. Si pone $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = 0$ se $P_0 \notin \mathcal{C}$ e $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = \infty$ se $r \subset \mathcal{C}$.*

La definizione data non dipende dalla scelta di P e Q su r, come si può verificare. Da quanto abbiamo visto nel caso in cui $F(\lambda P + \mu Q)$ non sia identicamente nullo e dalla definizione sopra data, si ottiene il seguente:

Teorema 1.1. (Corollario del Teorema di Bézout) *Siano $\mathcal{C}$ ed r, rispettivamente, una curva algebrica di grado n ed una retta di $\mathbf{P}^2(K)$ non contenuta in $\mathcal{C}$. Allora*

$$\sum_{P_0 \in r} I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = n .$$

(A parole: *il grado di una curva algebrica proiettiva uguaglia il numero dei punti comuni alla curva e a una retta non contenuta in essa, purché ciascun punto sia contato con la propria molteplicità d'intersezione*).

La nozione di molteplicità d'intersezione di una retta e una curva in un punto si dà anche nel caso affine. Infatti se $\mathcal{C}$ è una curva affine di equazione $f(X, Y) = 0$ e la retta r ha equazioni parametriche $x = a + lt$, $y = b + mt$, dal sistema fra queste equazioni si ottiene l'equazione $f(a + lt, b + mt) = 0$, le cui soluzioni danno le coordinate dei punti di $r \cap \mathcal{C}$.

Definizione 1.6. *Si dice che la retta r e la curva affine $\mathcal{C}$ hanno molteplicità d'intersezione $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ in $P_0 = (a + lt_0, b + mt_0)$, se t_0 è una radice di molteplicità $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r)$ del polinomio $f(a + lt, b + mt)$, convenendo di porre $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = 0$ se $P_0 \notin \mathcal{C}$ e $I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) = \infty$ se $r \subset \mathcal{C}$.*

Passando alle chiusure proiettive, r^*, $\mathcal{C}^*$, si vede che questa definizione è ben posta.

In particolare, se $P_\infty(0, l, m)$ è il punto improprio di r, si ha che $I_{P_\infty}(\mathcal{C} \cap r)$ è uguale alla massima potenza di λ che divide $F(\lambda P + \mu Q)$, ove F è il polinomio omogeneizzato di f. Pertanto il grado di $f(a + lt, b + mt)$ è uguale a $n - I_{P_\infty}(\mathcal{C} \cap r)$. Si ha allora:

Teorema 1.2. *Siano $\mathcal{C}$ ed r, rispettivamente, una curva di grado n ed una retta affini, con $r \not\subset \mathcal{C}$. Allora $\sum_{P_0 \in r} I_{P_0}(\mathcal{C} \cap r) \leq n$. L'uguaglianza vale se, e soltanto se, il punto improprio di r non è un punto improprio di $\mathcal{C}$.*

Il concetto di molteplicità d'intersezione di una curva e una retta è invariante per sostituzioni lineari.

Segnaliamo infine l'utile osservazione:
se una curva di grado n interseca una retta in più di n punti, allora la curva è riducibile e si spezza nella retta e in una curva di grado $n-1$.

1.3. Studio locale delle curve algebriche piane

Sia $\mathcal{C}$ una curva (affine o proiettiva) definita su un campo algebricamente chiuso.

Definizione 1.7. *La molteplicità $m_P(\mathcal{C})$ di un punto P per $\mathcal{C}$ (o di $\mathcal{C}$ in P) è il minimo di $I_P(\mathcal{C} \cap r)$ al variare della retta r nel fascio di centro P.*

Ovviamente, $0 \leq m_P(\mathcal{C}) \leq \mathrm{gr}(\mathcal{C})$ e $m_P(\mathcal{C}) = 0$ se, e soltanto se, il punto non appartiene alla curva.

Se $m_P(\mathcal{C}) = 1$ il punto si dice *semplice o non singolare*, mentre quando $m_P(\mathcal{C}) > 1$ il punto si dice *multiplo o singolare*. Più precisamente, se $m_P(\mathcal{C}) = s$ il punto si dice *s-plo*. Se $s = 2$ il punto si dice *doppio*.

La molteplicità di un punto è invariante per sostituzioni lineari.

Indichiamo ora un criterio che permette di determinare i punti singolari di una curva algebrica. Prima abbiamo bisogno di alcuni fatti sui polinomi.

Sia A un anello commutativo con unità. Se $f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_iX^i + \cdots + a_nX^n$ è un polinomio di $A[X]$, si definisce *derivata* di f rispetto ad X, e sarà denotata con $f'(X)$, oppure con $\mathrm{D}(f)$, il polinomio

$$f'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + ia_iX^{i-1} + \cdots + na_nX^{n-1}.$$