© 88-7999-051-9

Dimostrazione: Se t è una indeterminata

$$R(tX_0, tX_1) = \begin{vmatrix} t^n A_n & t^{n-1}A_{n-1} & \dots & \dots & A_0 & 0\dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_0 \\ t^m B_m & t^{m-1}B_{m-1} & \dots & \dots & B_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & B_0 \end{vmatrix}.$$

Moltiplichiamo ora la k–esima riga dei coefficienti A_i per t^{m-k+1} e la h–esima riga dei coefficienti B_j per t^{n-h+1} $(k = 1, \dots, m,\ h = 1, \dots, n)$. Allora $R(tX_0, tX_1)$ viene moltiplicato per t^p, con

$$p = m + m - 1 + \dots + 1 + n + n - 1 + \dots + 1 = \binom{m+1}{2} + \binom{n+1}{2}.$$

Il determinante $t^p R(tX_0, tX_1)$ uguaglia $t^q R(X_0, X_1)$, con

$$q = n + m + n + m - 1 + \dots + 1 = \binom{n+m+1}{2},$$

giacché il determinante $t^p R(tX_0, tX_1)$ ha la prima colonna moltiplicata per t^{n+m}, la seconda per t^{n+m-1},..., l'ultima per t.

Otteniamo allora

$$R(tX_0, tX_1) = t^{q-p} R(X_0, X_1) = t^{mn} R(X_0, X_1),$$

cioè $R(X_0, X_1)$ è omogeneo di grado $m\,n$. □

giò visto

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema 1.3. *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due curve algebriche di $\mathrm{P}^2(K)$, con K algebricamente chiuso, di grado n ed m rispettivamente. Allora se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono prive di componenti comuni, esse si intersecano in al più $m\,n$ punti. Inoltre, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.*

Dimostrazione: Siano $F(\mathrm{X}) = 0$ e $G(\mathrm{X}) = 0$ equazioni di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, rispettivamente, con $\mathrm{gr}(F) = n$ e $\mathrm{gr}(G) = m$. Poiché F e G non sono identicamente nulli, esiste un punto P_0 del piano che non appartiene alla curva riducibile $\mathcal{C} + \mathcal{D}$. Possiamo supporre che P_0 sia il punto di coordinate $(0, 0, 1)$ (se così non fos-

© 88-7999-051-9

se, basta operare sulle due curve con una medesima sostituzione lineare omogenea). Sia allora $R(X_0, X_1)$ il risultante di F e G rispetto ad X_2. Intanto $R(X_0, X_1)$ non è identicamente nullo, poiché, in caso contrario, F e G avrebbero in comune un fattore di grado positivo in X_2, e quindi le due curve avrebbero una componente a comune. Inoltre, poiché $P_0 \notin \mathcal{C} + \mathcal{D}$, risulta $A_0 B_0 \neq 0$, ove A_0 e B_0 sono, rispettivamente, i coefficienti di X_2^n e X_2^m dei polinomi F e G. Pertanto, per la Proposizione 1.9, $R(X_0, X_1)$ è un polinomio omogeneo di grado mn, che ammette al più mn radici omogenee in K. Siano esse (α_i, β_i), $i = 1, \dots, k \leq nm$.

Per la Proposizione 1.8, $R(\alpha_i, \beta_i) = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perché il sistema

$$\begin{cases} F(\alpha_i, \beta_i, X_2) = 0 \\ G(\alpha_i, \beta_i, X_2) = 0 \end{cases}$$

abbia almeno una soluzione. Poiché $F(\alpha_i, \beta_i, X_2)$ e $G(\alpha_i, \beta_i, X_2)$ hanno al più n, rispettivamente m, zeri in K, segue che $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste di un numero finito di punti. In particolare si osservi che $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

Allora se $P_1, P_2, \dots, P_h$ sono i punti comuni a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ e se r_{ij} è la retta congiungente P_i con P_j, per ogni $i \neq j$, possiamo supporre che P_0 non appartenga alla curva riducibile le cui componenti sono $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e le rette r_{ij} (ciò è sempre possibile, operando eventualmente con una sostituzione lineare su $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$). In queste ipotesi, ciascuna delle rette $P_0 P_i$, $i = 1, \dots, h$, contiene un solo punto di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Poiché K è algebricamente chiuso,

$$R(X_0, X_1) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i X_1 - \beta_i X_0)^{h_i}$$

e, per quanto già osservato, $R(\alpha_i, \beta_i) = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perché il sistema $F(\alpha_i, \beta_i, X_2) = G(\alpha_i, \beta_i, X_2) = 0$ abbia almeno una soluzione. Dall'ipotesi fatta su P_0 segue che tale sistema ha *esattamente* una soluzione. Se infatti vi fossero due soluzioni distinte, $U = (\alpha_i, \beta_i, x_2)$ e $U' = (\alpha_i, \beta_i, x_2')$, allora la retta UU' conterrebbe il punto P_0, contro le ipotesi.

Allora, poiché $\mathrm{gr}\,(R(X_0, X_1)) = mn$, $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste di al più mn punti. □

già visto

La conclusione di questo teorema può affinarsi introducendo, come si è fatto nel caso di una curva e una retta, il concetto di molteplicità d'intersezione.

Definizione 1.11. *Siano $\mathcal{C} : F(\mathrm{X}) = 0$ e $\mathcal{D} : G(\mathrm{X}) = 0$ due curve di $\mathrm{P}^2(K)$. Sia $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Supponiamo che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non abbiano componenti comuni, che la retta congiungente $P_0(0,0,1)$ e P non contenga nessun altro punto di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ e che $P_0 \notin \mathcal{C} + \mathcal{D}$. Allora se*

$$R(X_0, X_1) = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i X_1 - \beta_i X_0)^{h_i}$$

e se α_i, β_i sono le prime due coordinate del punto P, la ***molteplicità d'intersezione*** *di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ in P, denotata con $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = I_P(F; G)$, è la molteplicità del fattore lineare $\alpha_i X_1 - \beta_i X_0$ che compare nella fattorizzazione di $R(X_0, X_1)$.*

Se $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, si pone $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 0$; se P appartiene ad una componente comune a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, si pone $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \infty$.

Definizione perfettamente analoga si dà nel caso di due curve affini. Si suppone che le due curve di equazioni rispettive $f(X, Y) = 0$ e $g(X, Y) = 0$ non contengano il punto improprio $P_0(0,0,1)$ e che la retta congiungente P_0 con $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ non contenga altri punti di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Si calcola quindi $R(X)$. Se

$$R(X) = a \prod_{i=1}^{k} (X - a_i)^{h_i}$$

e a_i è l'ascissa del punto P, allora $I_P(f; g)$ eguaglia la molteplicità del fattore lineare $X - a_i$.

Vale la pena di sottolineare che, per la determinazione della molteplicità d'intersezione, se si calcola $R(X_0, X_1)$ (risp., $R(X)$) bisogna supporre che il punto $P_0(0,0,1)$ non appartenga a nessuna delle due curve. Ovviamente, se si calcola $R(X_0, X_2)$ (risp., $R(Y)$) bisogna supporre che il punto $(0,1,0) \notin \mathcal{C} + \mathcal{D}$ e che la retta congiungente tale punto con un punto P dell'intersezione non contenga, oltre P, altri punti dell'intersezione delle due curve.

Con questa definizione di molteplicità d'intersezione il teorema precedente afferma che le due curve proiettive hanno *esatta-*

ⓒ 88-7999-051-9

mente $m\,n$ punti a comune, purché ciascun punto venga contato con la sua molteplicità d'intersezione. Si ha cioè il seguente Teorema di Bézout.

Teorema 1.4. *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due curve algebriche di $\mathrm{P}^2(K)$, con K algebricamente chiuso, di grado rispettivamente n ed m. Allora, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono prive di componenti comuni, esse si intersecano in $m\,n$ punti, purché ciascun punto venga contato con la sua molteplicità d'intersezione.*

Se $P_1, \ldots, P_k$ sono i punti di $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, il teorema afferma che

$$\sum_{i=1}^{k} I_{P_i}(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = m\,n\,.$$

Della definizione di molteplicità d'intersezione ora data vanno sottolineati due aspetti che ne limitano fortemente l'uso.

Primo, bisogna dimostrare che tale definizione è invariante per sostituzioni lineari (si ricordino le ipotesi fatte sul punto P_0). Questa dimostrazione sarà omessa.

Secondo, la determinazione della molteplicità d'intersezione coinvolge il risultante di due polinomi, strumento di calcolo poco agevole da maneggiare.

Ciò nonostante, è possibile dedurre, dalla definizione data, alcune proprietà di $I_P(F;G)$, che ne permettono quasi sempre la determinazione senza ricorrere al calcolo del risultante. Elenchiamo queste proprietà, omettendone la dimostrazione.

Proprietà 1. $I_P(F;G) = I_P(G;F)$.

Proprietà 2. *Se $G = \prod_{i=1}^{s} G_i$, allora*

$$I_P(F;G) = I_P(F;\prod_{i=1}^{s} G_i) = \sum_{i=1}^{s} I_P(F;G_i)\,.$$

Proprietà 3. *Per ogni $A \in K[X_0, X_1, X_2]$,*

$$I_P(F;G) = I_P(F;G + AF).$$

Proprietà 4. *Sia $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ e supponiamo che P sia r–plo per $\mathcal{C}$ ed s–plo per $\mathcal{D}$. Allora $I_P(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq r\,s$ e il segno di uguaglianza vale se, e soltanto se, le tangenti principali di $\mathcal{C}$ in P sono tutte distinte da quelle di $\mathcal{D}$ in P.*

▶ **Esempio 1.13.** Sia dato il sistema

$$\begin{cases} f(X,Y) = Y^2 - X^3 = 0 \\ g(X,Y) = Y^2 - X^5 = 0\,. \end{cases}$$

È facile calcolare i punti comuni alle due curve: si ottengono subito, dato che $Y^2 = X^3$, $Y^2 = X^5$ implica $X^2 = 0$, $X = \pm 1$. Si hanno i punti

$$(0,0), (1,1), (1,-1), (1,i), (1,-i).$$

Le due curve hanno inoltre in comune il punto all'infinito $(0,0,1)$ e ciò impedisce di applicare direttamente la definizione di molteplicità d'intersezione, utilizzando $R(X)$. Si potrebbe ricorrere allora a $R(Y)$. Utilizzando però le proprietà enunciate, la molteplicità d'intersezione nei vari punti si calcola agevolmente.

Applicando successivamente le Proprietà 2 e 3, si trova:

$$\begin{aligned} I_{(0,0)}(f;g) &= I_{(0,0)}(f;g-f) = I_{(0,0)}(f;X^3 - X^5) = \\ &I_{(0,0)}(f;X^3(1-X^2)) = I_{(0,0)}(f;X^3) + I_{(0,0)}(f;1-X^2) = \\ &3I_{(0,0)}(f;X) + I_{(0,0)}(f;1-X^2)\,. \end{aligned}$$

Ora, $I_{(0,0)}(f;X) = 2$, dato che il punto $(0,0)$ è doppio per $f = 0$, con unica tangente principale $Y = 0$, mentre $I_{(0,0)}(f;1-X^2) = 0$, dato che $1 - X^2 = 0$ non contiene $(0,0)$. In definitiva allora $I_{(0,0)}(f;g) = 6$.

I punti $(1,1), (1,-1), (1,i), (1,-i)$ sono semplici per entrambe le curve, che hanno in essi tangenti distinte. Pertanto in essi la molteplicità d'intersezione vale 1, tenendo conto della Proprietà 4.

In base al Teorema di Bézout allora $I_{(0,0,1)}(f;g) = 5$. Calcoliamola esplicitamente.

Passiamo in coordinate omogenee, ottenendo

$$F(X_0, X_1, X_2) = X_0X_2^2 - X_1^3 = 0$$

88-7999-051-9

$$G(X_0, X_1, X_2) = X_0^3 X_2^2 - X_1^5 = 0 .$$

Allora, indicato con P il punto (0,0,1),

$$\begin{aligned}
I_P(F; G) &= I_P(F; G - X_1^2 F) = \\
I_P(F; X_0 X_2^2 (X_0^2 - X_1^2)) &= I_P(F; X_0 X_2^2) + I_P(F; X_0^2 - X_1^2) = \\
&I_P(F; X_0) + 2 I_P(F; X_2) + \\
&\qquad I_P(F; X_0 - X_1) + I_P(F; X_0 + X_1) .
\end{aligned}$$

Ora, $I_P(F; X_0) = 3$, dato che $X_0 = 0$ è la tangente in P, che ha molteplicità d'intersezione 3; $I_P(F; X_2) = 0$, dato che $X_2 = 0$ non contiene P; $I_P(F; X_0 - X_1) = I_P(F; X_0 + X_1) = 1$, essendo il punto P semplice per $F = 0$, con tangente la retta $X_0 = 0$. In conclusione, $I_P(F; G) = 5$. ◀

1.6. Formule di Plücker

Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva di grado $n \geq 2$ avente equazione $F(\mathbf{X}) = 0$, ove $\mathbf{X}$ denota la terna delle indeterminate (X_0, X_1, X_2). Se $P(a_0, a_1, a_2)$ è un punto del piano, si definisce *prima polare* di $\mathcal{C}$ rispetto a P la curva algebrica di grado $n - 1$ di equazione

$$a_0 F_0(\mathbf{X}) + a_1 F_1(\mathbf{X}) + a_2 F_2(\mathbf{X}) = 0 ,$$

ove, come al solito, $F_i(\mathbf{X})$ denota la derivata parziale del polinomio omogeneo F rispetto alla indeterminata X_i, $i = 0, 1, 2$. Questa curva sarà denotata con $\Delta_P \mathcal{C}$.

Quando P è uno dei punti (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), la prima polare ha, rispettivamente, equazione

$$F_0(\mathbf{X}) = 0, \ F_1(\mathbf{X}) = 0, \ F_2(\mathbf{X}) = 0 .$$

Vogliamo ora studiare le intersezioni di $\mathcal{C}$ con le sue prime polari. A tal proposito supporremo che il campo sia algebricamente chiuso e che $\mathcal{C}$ sia irriducibile.

Osserviamo preliminarmente che $A \in \mathcal{C}$ è un punto singolare se, e soltanto se, $A \in \Delta_P \mathcal{C}$, per ogni punto P: infatti A è singolare se, e soltanto se, $F_i(A) = 0$, cioè se, e soltanto se, $A \in \Delta_P \mathcal{C}$.