tiva. Nel paragrafo successivo è riportato un elenco completo delle proprietà che assumiamo valere per assioma. Dividiamo tali proprietà in tre gruppi: quelle relative alle operazioni, le proprietà relative all'ordinamento, e l'assioma di completezza.

2. Gli assiomi dei numeri reali

Assiomi relativi alle operazioni. Sono definite le operazioni di *addizione* (+) e *moltiplicazione* ($\cdot$) tra coppie di numeri reali, con le seguenti proprietà (a b, c indicano numeri reali generici):

(2.1) *Proprietà associativa*:
$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(2.2) *Proprietà commutativa*: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.

(2.3) *Proprietà distributiva*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(2.4) *Esistenza degli elementi neutri: esistono in* **R** *due numeri distinti* 0, 1, *tali che* $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$.

(2.5) *Esistenza degli opposti: per ogni numero reale* a *esiste un numero reale, indicato con* $-a$, *tale che* $a + (-a) = 0$.

(2.6) *Esistenza degli inversi: per ogni numero reale* $a \neq 0$ *esiste un numero, indicato con* a^{-1}, *tale che* $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Assiomi relativi all'ordinamento. È definita la relazione di *minore o uguale* ($\leq$) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

(2.7) *Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali* a, b *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$.

(2.8) *Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni* $a \leq b$, $b \leq a$, *allora* $a = b$.

(2.9) *Se* $a \leq b$ *allora vale anche* $a + c \leq b + c$.

(2.10) *Se* $0 \leq a$ e $0 \leq b$ *allora valgono anche* $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$.

Assioma di completezza

(2.11) *Siano* A *e* B *due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che* $a \leq b$, *comunque si scelgano a elemento di* A *e* b *elemento di B. Allora esiste almeno un numero reale* c *tale che* $a \leq c \leq b$, *qualunque siano* a *in* A *e* b *in* B.

3. Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali

Nel paragrafo precedente sono state elencate le proprietà dei numeri reali che vengono assunte come assiomi. Tutte le altre proprietà e teoremi esposti in questo libro discendono dagli assiomi. Sono conseguenze degli assiomi anche quelle proprietà elementari che in genere fanno parte del «bagaglio matematico» di ogni studente, come ad esempio il fatto che *un prodotto è nullo quando almeno uno dei due fattori è nullo*, oppure quella regola dei segni per il prodotto (che, dagli studenti delle scuole elementari talvolta è accettata come imposizione, perché incompresa) che schematicamente si enuncia: *meno per meno fa più*; oppure la norma di frequente applicazione nel risolvere disequazioni: *moltiplicando entrambi i membri per una quantità negativa, il verso della disequazione cambia.*

Di seguito esaminiamo alcune proprietà, come quelle sopra enunciate, che sono conseguenza degli assiomi dei numeri reali.

(3.1) *Vale la regola di semplificazione rispetto alla somma: se* $a + b = a + c$, *allora* $b = c$.

Utilizziamo gli assiomi (2.4) e (2.5), di esistenza dello zero e dell'opposto $-a$, e le proprietà commutativa e associativa:

$$b = 0 + b = [a + (-a)] + b =$$

$$[(-a) + a] + b = (-a) + (a + b)$$

essendo $a + b = a + c$, si ottiene

$$b = (-a) + (a + b) = (-a) + (a + c) = [(-a) + a] + c =$$

$$= [a + (-a)] + c = 0 + c = c + 0 = c.$$

(3.2) *Vale la semplificazione rispetto al prodotto: se* $a \cdot b = a \cdot c$ *e se* $a \neq 0$, *allora* $b = c$.

Si può procedere come nella dimostrazione della proprietà precedente, scambiando la somma con il prodotto e avendo l'accortezza di ricordare che l'inverso a^{-1} di un numero reale a esiste purché sia $a \neq 0$. In tal caso, nella linea della dimostrazione di (3.1), si ha:

$$b = b \cdot 1 = 1 \cdot b = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot b =$$

$$= a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c) = (a^{-1} \cdot a) \cdot c =$$

$$= (a \cdot a^{-1}) \cdot c = 1 \cdot c = c \cdot 1 = c.$$

(3.3) *Il prodotto* $a \cdot b$ *è nullo se e soltanto se almeno uno dei due fattori è nullo.*

Proviamo preliminarmente l'implicazione con il "se"; cioè proviamo che $a \cdot 0 = 0$ per ogni numero reale a. Ricordiamo che lo zero è, per l'assioma (2.4), l'elemento neutro rispetto alla somma, cioè tale che $a + 0 = a$ per ogni reale a; ricordiamo anche che 1, elemento neutro rispetto al prodotto, sempre per l'assioma (2.4) soddisfa la relazione $a \cdot 1 = a$ per ogni reale a. In base alla proprietà associativa abbiamo allora

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0$$

da cui, semplificando entrambi i membri in base alla proprietà (3.1), otteniamo $a \cdot 0 = 0$.

Proviamo ora l'implicazione con il «*solo se*»; a tale scopo supponiamo che $a \cdot b = 0$; se $a = 0$ la tesi è raggiunta; altrimenti, se $a \neq 0$, esiste l'inverso a^{-1} e si ha

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Si noti che, nell'ultimo passaggio, abbiamo utilizzato quanto già provato nella prima parte della dimostrazione.

La precedente proposizione (3.3) spiega perché nell'ambito dei numeri reali non sia possibile la divisione per zero, cioè perché nell'assioma (2.6) di esistenza dell'inverso a^{-1} si richieda che $a \neq 0$. Infatti, se $a = 0$ allora $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ per ogni numero reale b e perciò *non esiste* un numero reale 0^{-1} tale che $0 \cdot 0^{-1} = 1$.

(3.4) *L'opposto di un numero reale è unico.*

In base all'assioma (2.5), per ogni numero reale a esiste l'opposto di a, indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0$. Se supponiamo che risulti anche $a + b = 0$, allora, per la legge di semplificazione (3.1) si ha $-a = b$; quindi l'opposto è unico.

(3.5) *L'inverso di un numero reale non nullo è unico.*

Stessa dimostrazione del caso precedente.

(3.6) *Per ogni reale* a *vale la proprietà* $-(-a) = a$.

Il numero $-(-a)$ è, per definizione, l'opposto di $-a$; ma essendo

$$a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

risulta che a è l'opposto di $-a$, cioè $a = -(-a)$, in base alla proprietà (3.4) che l'opposto di un numero reale è unico.

(3.7) *Per ogni coppia di numeri reali* a, b *risulta* $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.

Per la proprietà distributiva si ha che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = [(-a) + a] \cdot b = 0 \cdot b = 0,$$

da cui $a \cdot b$ è l'opposto di $(-a) \cdot b$, cioè $-a \cdot b = (-a) \cdot b$.

(3.8) *Per ogni coppia di numeri reali* a, b *risulta* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Come conseguenza della precedente proprietà (3.7) e della proprietà commutativa (2.2) abbiamo

$$(-a) \cdot (-b) = -[a \cdot (-b)] = -[(-b) \cdot a] =$$

$$= -[-(b \cdot a)] = -[-(a \cdot b)];$$

la conclusione segue infine dalla (3.6), essendo $-[-(a \cdot b)] = a \cdot b$.

Gli assiomi del paragrafo 2, relativi all'ordinamento, si riferiscono alla relazione di *minore od uguale* ($\leq$) tra le coppie di numeri reali. La relazione di *maggiore od uguale* ($\geq$) è ricondotta a quella di minore od uguale mediante la definizione:

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a.$$

(Il simbolo $\Leftrightarrow$ sta per «equivale»). Pertanto la relazione di $\geq$ gode di proprietà analoghe a quelle di $\leq$.

Infine le relazioni di *minore* ($<$) e di *maggiore* ($>$), dette anche relazioni di *minore stretto* e, rispettivamente, di *maggiore stretto*, sono definite da:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b,\ a \neq b;$$

$$a > b \Leftrightarrow a \geq b,\ a \neq b.$$

(3.9) *La relazione* $a \leq b$ *è equivalente alla relazione* $b - a \geq 0$.

Infatti, se $a \leq b$, allora per la (2.9):

$$a - b \leq b - b = 0.$$

Viceversa, se $b - a \geq 0$, sempre per la (2.9) e per la proprietà associativa dell'addizione si ha:

$$a = 0 + a \leq (b - a) + a = b + [(-a) + a] = b\ .$$

(3.10) *Proprietà transitiva dell'ordinamento: se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *allora* $a \leq c$.

Supponiamo che $a \le b$ e $b \le c$; per la precedente proprietà (3.9) risulta $0 \le b - a$, $0 \le c - b$. Dalla (2.10) si ottiene poi

$$0 \le (b - a) + (c - b) = c - a$$

che, ancora per la (3.9), equivale ad $a \le c$.

(3.11) *Risulta* $a \ge 0$ *se e soltanto se* $-a \le 0$.

Infatti, per la (2.9), se $0 \le a$ allora

$$0 + (-a) \le a + (-a),$$

cioè $-a \le 0$. Viceversa, se $-a \le 0$, allora $a + (-a) \le a$, cioè $0 \le a$.

(3.12) *Se* $a \le b$ *e* $c \ge 0$ *allora* $a \cdot c \le b \cdot c$.

Infatti, se $a \le b$ allora per la (3.9) è anche $0 \le b - a$, da cui, per la (2.10) e per la proprietà distributiva (2.3):

$$0 \le (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c,$$

cioè, ancora per la (3.9), $a \cdot c \le b \cdot c$.

(3.13) *Se* $a \le b$ *e* $c \le 0$ *allora* $a \cdot c \ge b \cdot c$.

Per le ipotesi e per la (3.11) si ha $0 \le b - a$, $-c \ge 0$. Dalla (2.10) si ottiene

$$0 \le (b - a) \cdot (-c) = -b \cdot c + a \cdot c,$$

da cui, per la (3.9), $b \cdot c \le a \cdot c$.

L'assioma di completezza (2.11) a prima vista può sembrare ovvio: «se tutti i numeri dell'insieme A sono minori od uguali a tutti i numeri dell'insieme B, allora esisterà certamente un numero c intermedio fra A e B, cioè tale che $a \le c \le b$ per ogni elemento a di A e per ogni elemento b di B; basterà infatti scegliere come numero c il più grande elemento di A, oppure il più piccolo elemento di B».

Ebbene, *la frase scritta precedentemente fra virgolette è sbagliata!* Infatti non tutti gli insiemi numerici hanno il più grande o il più piccolo elemento (rimandiamo al paragrafo 12 per un approfondimento di questo punto): ad esempio, l'insieme

$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

che, rappresentato sulla retta dà luogo ad uno schema come quello in figura 1.1, ha il più grande elemento, che è uguale ad 1, ma non ha il più piccolo elemento; potremmo essere tentati di dire che lo zero è il più piccolo elemento di B, ma lo zero *non è* un elemento di B! Infatti lo zero è diverso da 1/n qualunque sia n (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore della frazione è nullo).

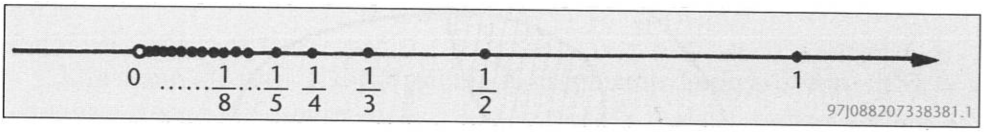

Figura 1.1

L'assioma di completezza è, in effetti, un assioma molto più profondo di quanto possa sembrare a prima vista. Come mostreremo nel paragrafo 5, soltanto tramite l'assioma di completezza è possibile distinguere l'insieme dei numeri rappresentabili sotto forma di frazione, insieme detto dei *numeri razionali*, dall'insieme dei numeri reali.

4. Cenni di teoria degli insiemi

Introduciamo alcune notazioni e definizioni tratte dalla teoria degli insiemi. Sia S un insieme di natura qualsiasi. Per indicare che x è un elemento di S scriveremo:

$$x \in S \qquad (x \textit{ appartiene a } S).$$

Per indicare, invece, che y non è un elemento di S, scriveremo:

$$y \notin S \qquad (y \textit{ non appartiene a } S).$$

Se A è un insieme i cui elementi sono anche elementi di S, diremo che A è un *sottoinsieme* o *parte* di S.

Tra i sottoinsiemi di S si suole considerare anche l'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, che si indica con ϕ.

Se A e B sono due sottoinsiemi di S, l'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme degli elementi di S che sono comuni ad A e B (figura 1.2):

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \quad e \quad x \in B\}. \tag{4.1}$$

L'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme costituito dagli elementi di S che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B (figura 1.3):

(4.2) $A \cup B = \{x \in S : x \in A \text{ } \textit{oppure} \text{ } x \in B\}.$

Diremo che A è *contenuto* in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B:

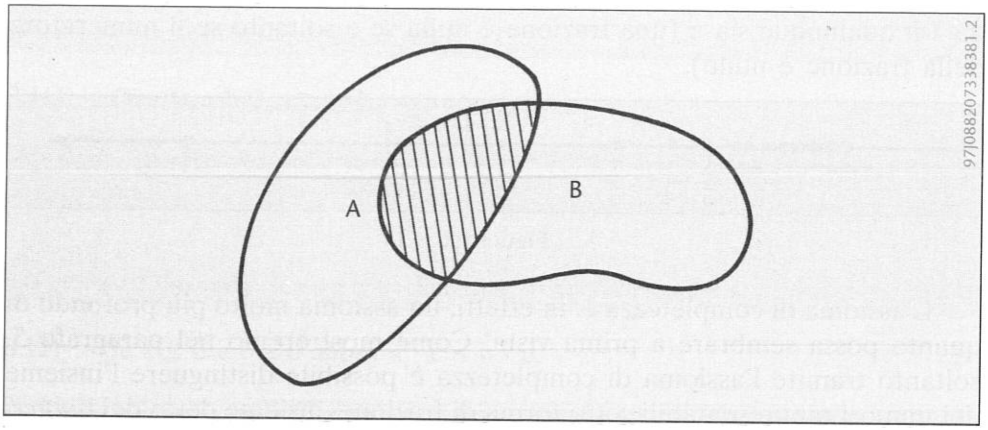

Figura 1.2

(4.3) $(A \subseteq B) \quad \Leftrightarrow \quad (a \in A \Rightarrow a \in B)$

Si conviene che l'insieme vuoto sia contenuto in ogni sottoinsieme di S. Se A è contenuto in B ed è diverso da B, si dice che A è una *parte propria* di B.

Il simbolo $\Leftrightarrow$ si legge «*se e solo se*» o, come già detto, «*equivale*» ed il simbolo $\Rightarrow$ si legge «*implica*».

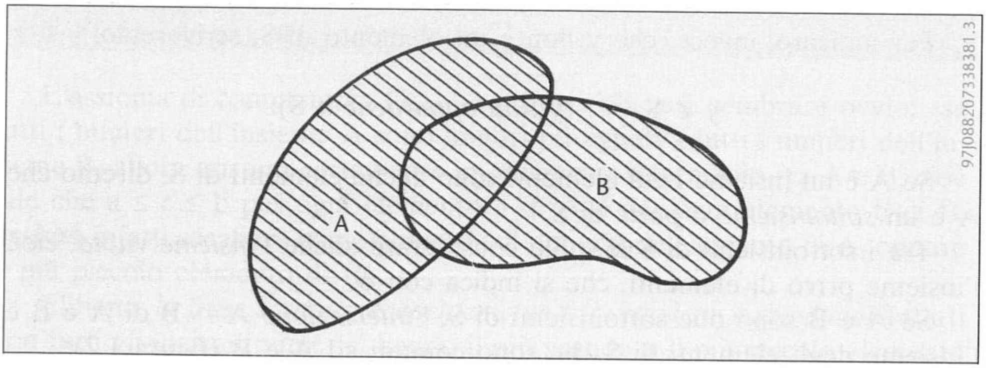

Figura 1.3

Se A e B sono due sottoinsiemi dell'insieme S, il *complemento* $A - B$ di B rispetto ad A è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B (figura 1.4):