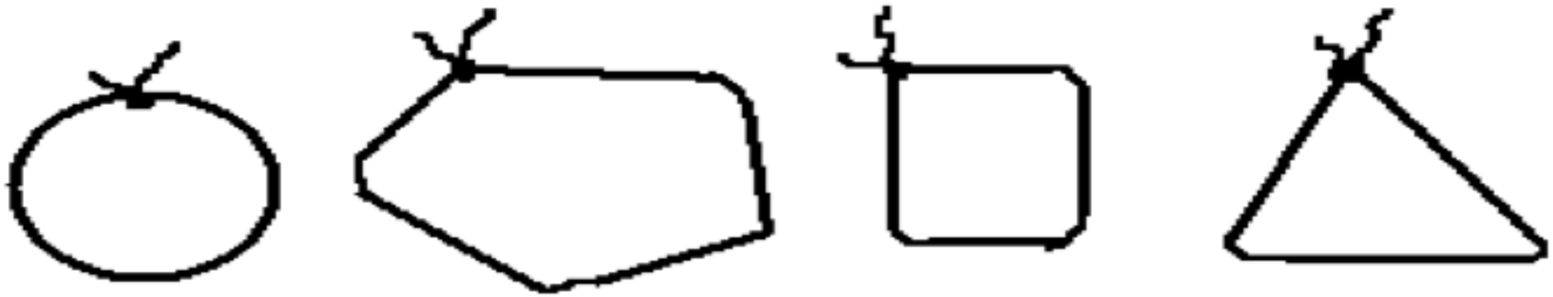


Le forme dello spazio

Caffè Scienza.
Associazione formaScienza.
Libreria Bibli.

20 Ottobre 2009.

Paolo Piazza (Sapienza UNIVERSITÀ DI ROMA)

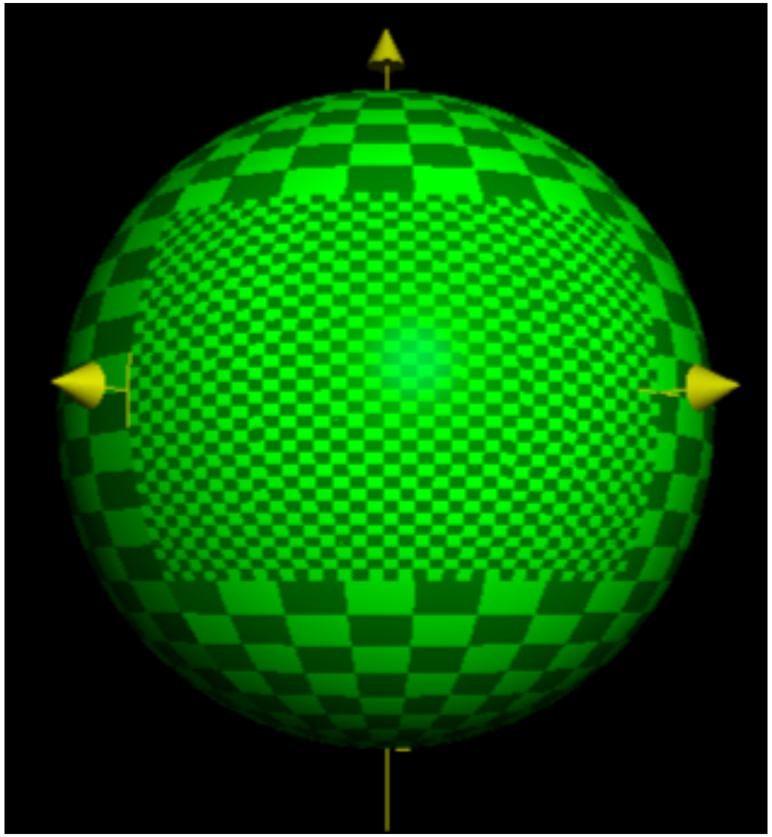
Geometria e Fisica

Ci sono di fatto tante geometrie….

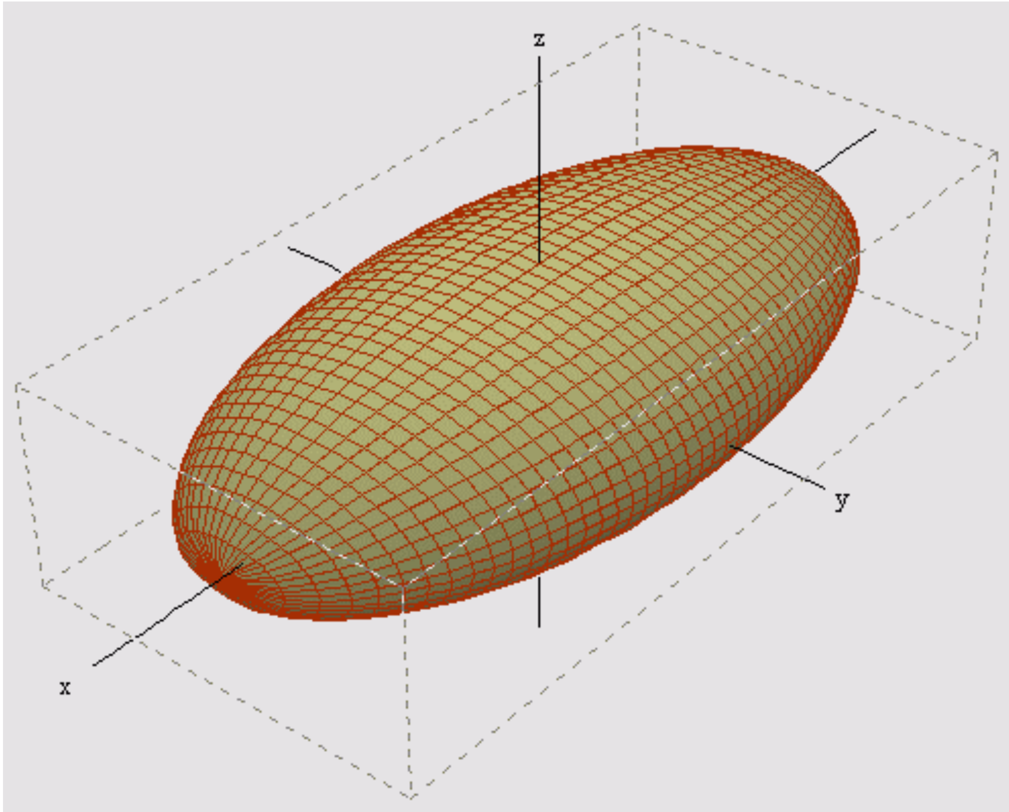
Dipende dalle proprietà che vogliamo studiare.

Geometria Euclidea: studia le proprietà delle figure che non cambiano per movimenti rigidi dello spazio.

La superfice sferica e la superficie ellissoidale sono ovviamente diverse.



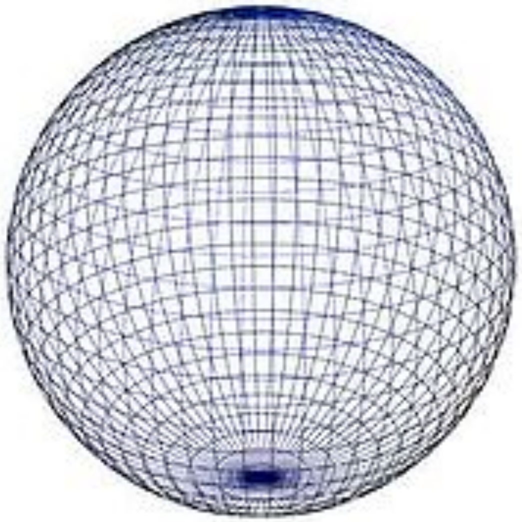
La superficie sferica
(sfera)



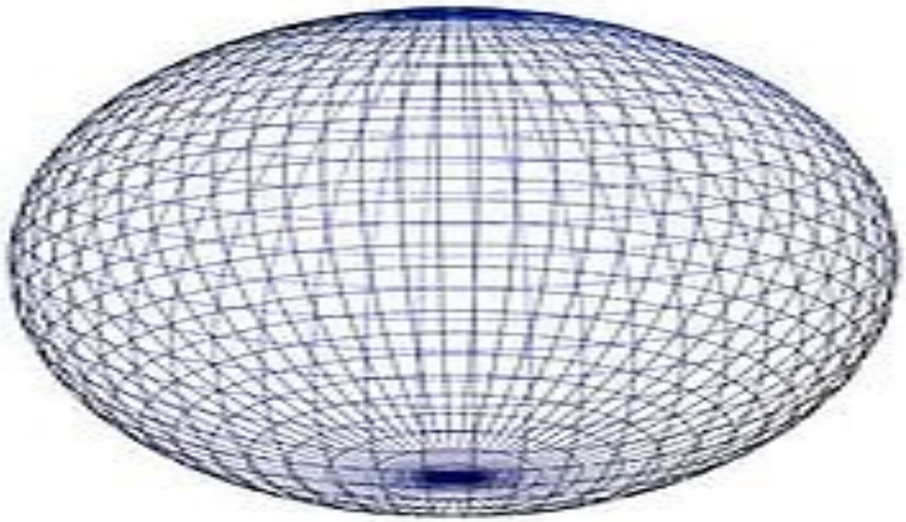
La superficie ellissoidale
(ellissoide)

Ci sono però geometrie nelle quali sono permesse operazioni meno rigide.
Ad esempio: **la topologia**

Nella topologia di dimensione 2 studio le proprietà delle superfici a meno di deformazioni continue dello spazio.

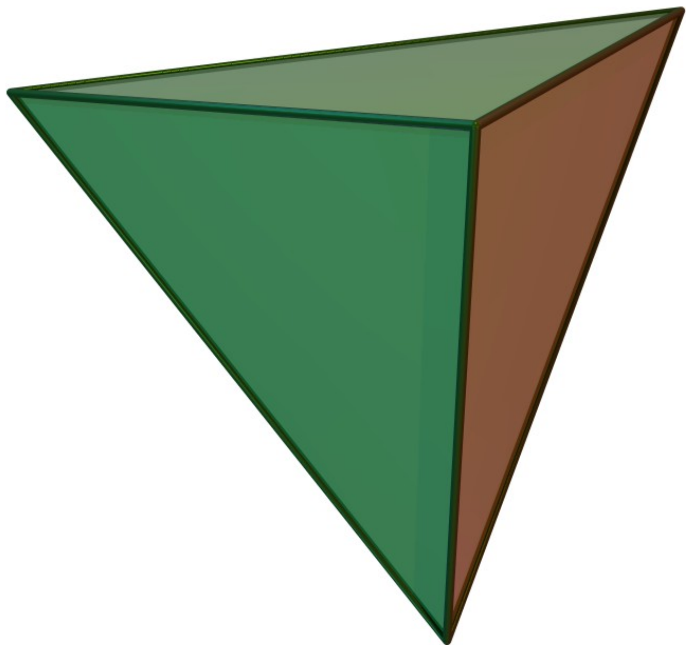


=

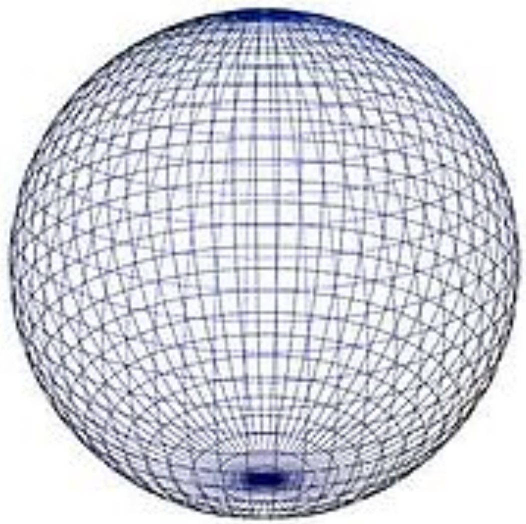


In topologia la sfera e l’ellissoide sono uguali.

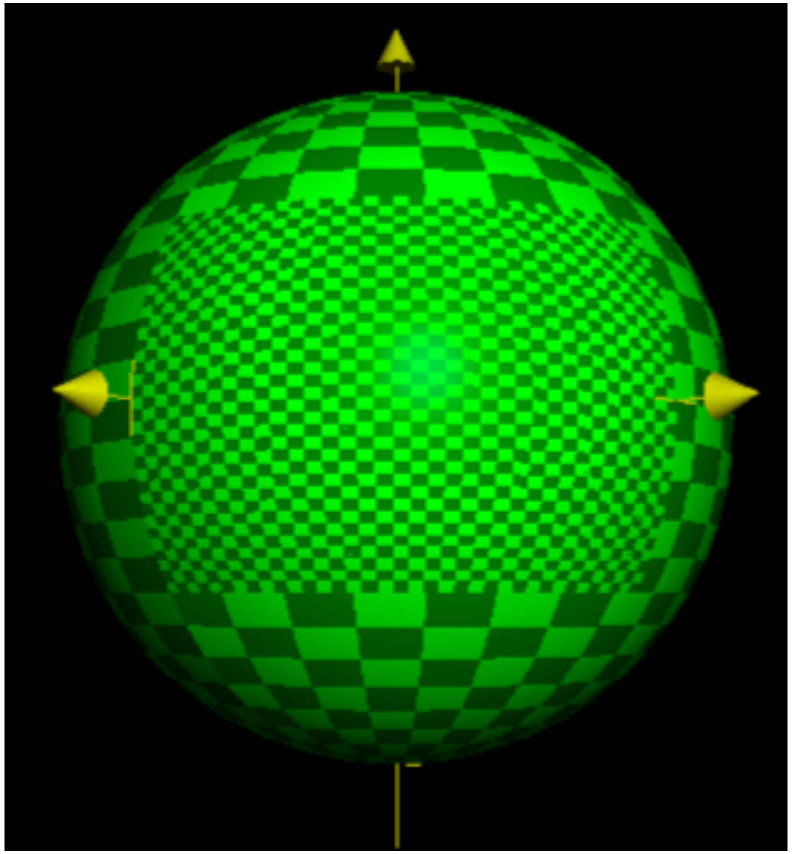
Anche il tetraedro e la sfera sono uguali nel mondo della topologia



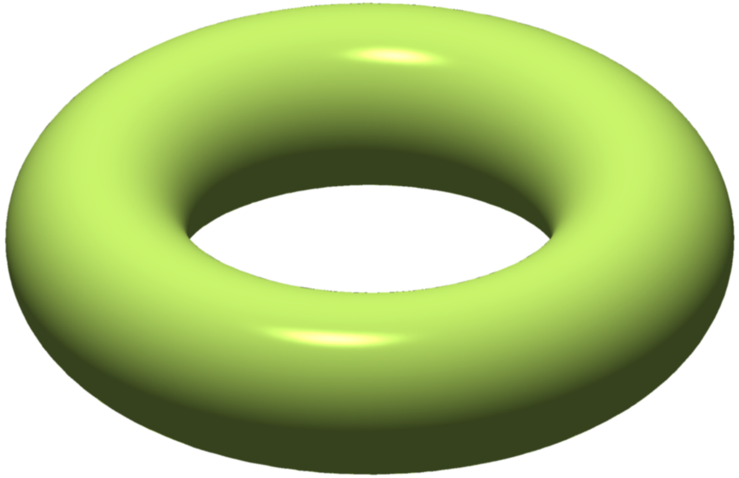
=



In topologia sono invece diversi il toro e la sfera
(intuitivamente, poi vediamo precisamente perché)



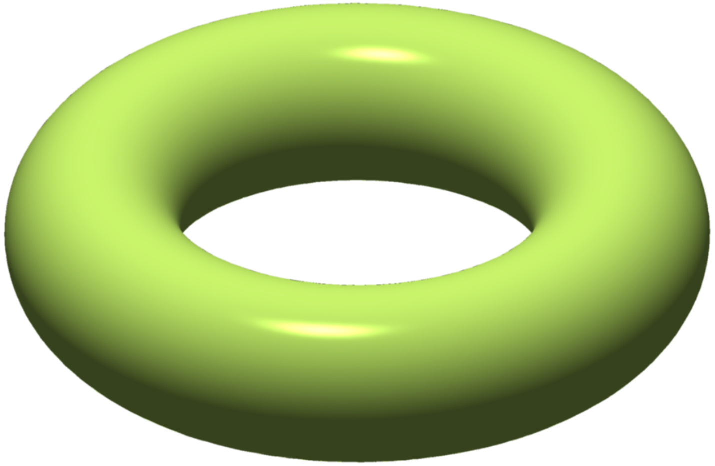
$\neq$



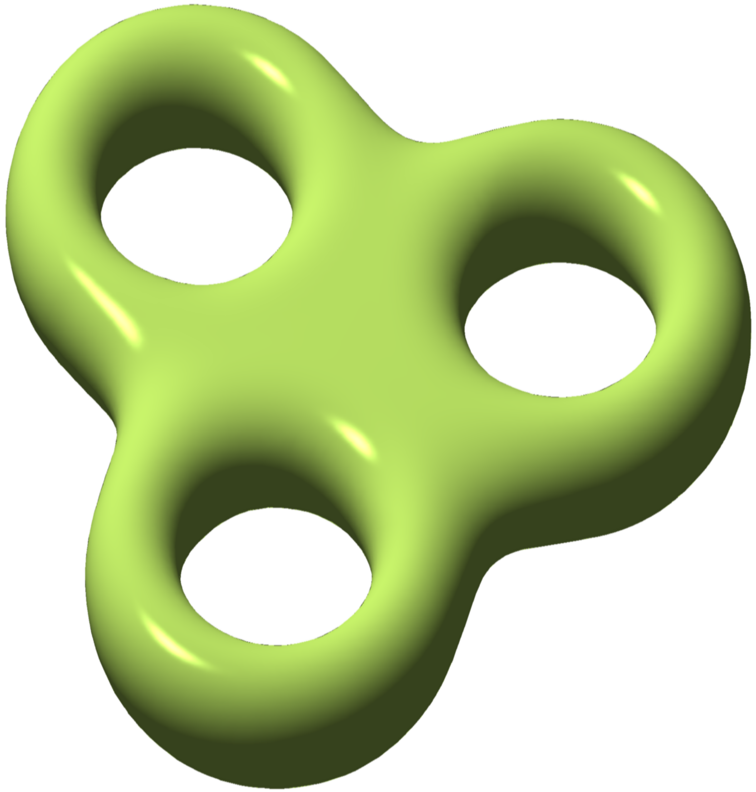
La sfera

La superfie torica (toro)

Analogamente, un toro è diverso da un 3-toro



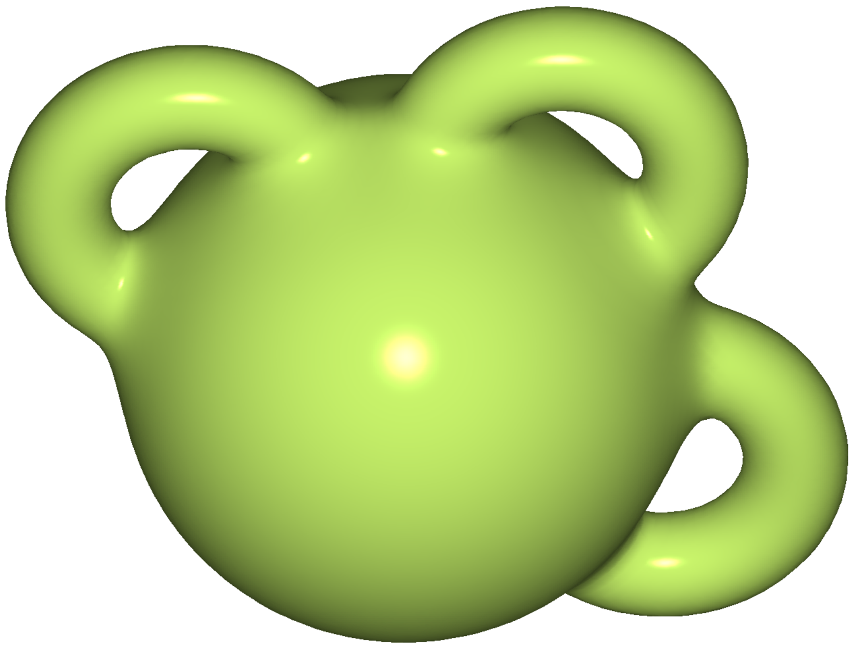
$\neq$



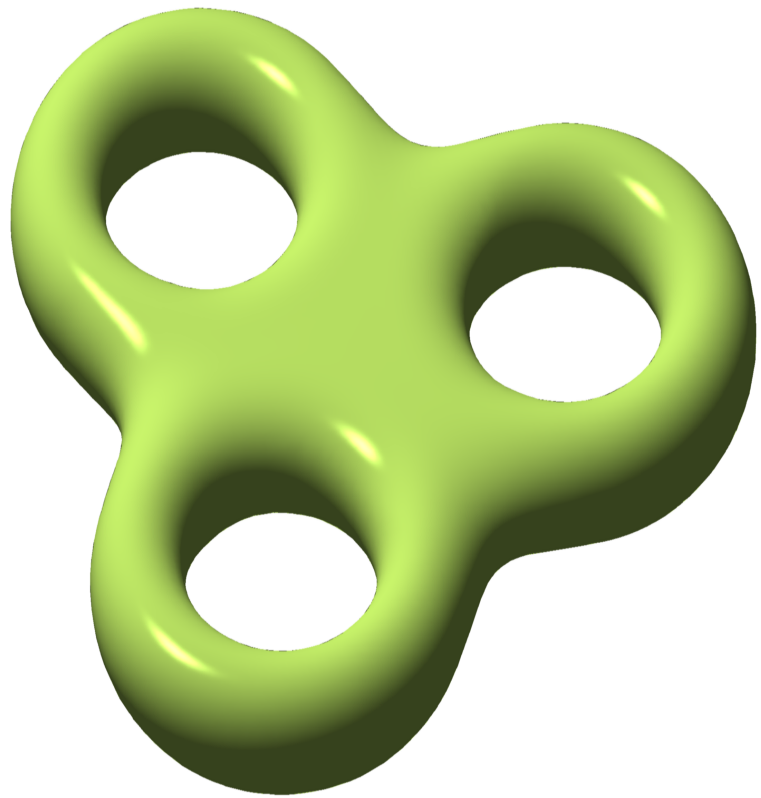
toro

3-toro

Mentre sono uguali una sfera con tre manici ed il 3-toro



=

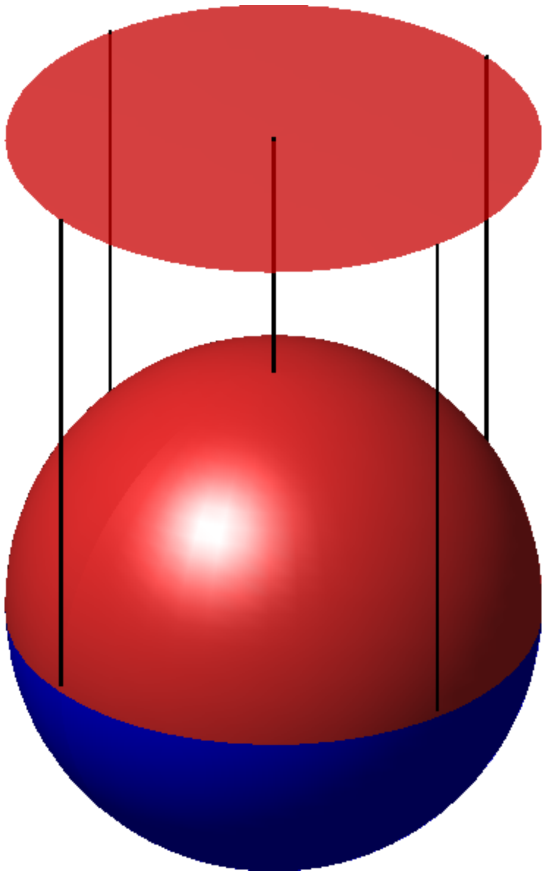


Sfera con 3 manici attaccati

3-toro

Ma ci sono altre geometrie …

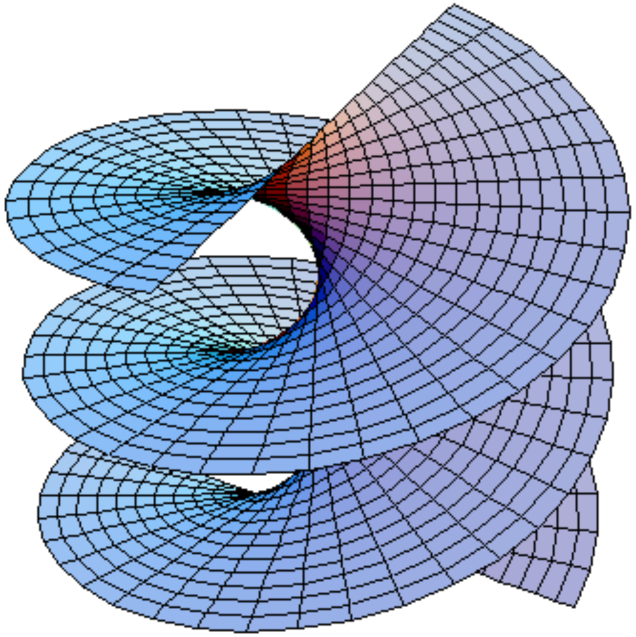
Definizione:
una superficie regolare S è una figura geometrica che intorno ad ogni punto è fatta come un disco nel piano.



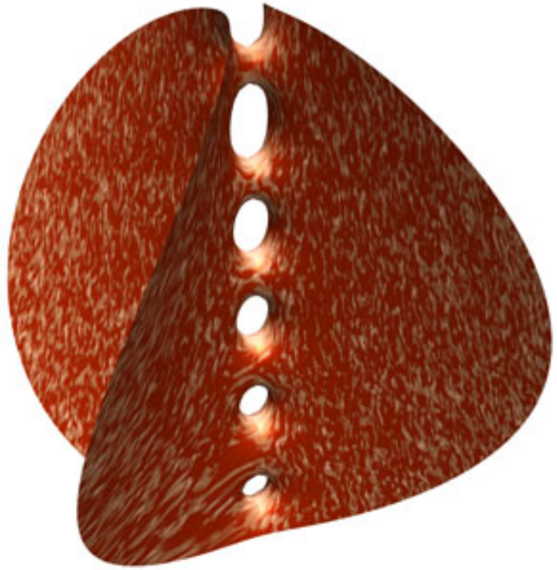
Dare una superficie regolare vuol dire dare S insieme ad un atlante A di carte
Si scrive (S, A)

Esempi di superfici regolari **chiuse**:
sfera, toro, ellissoide, toro con g buchi.

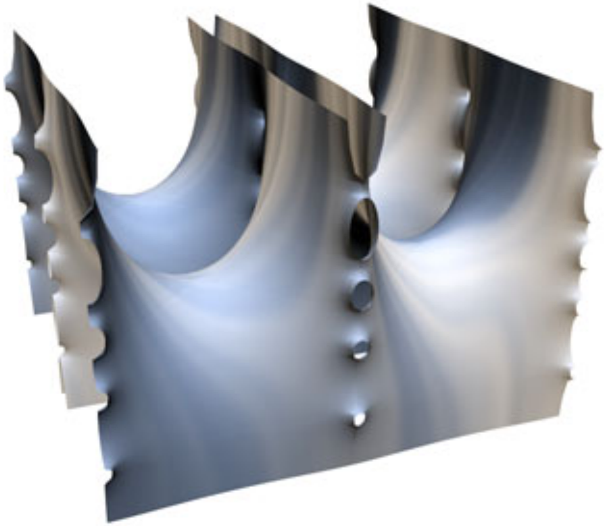
Esempi di superfici aperte



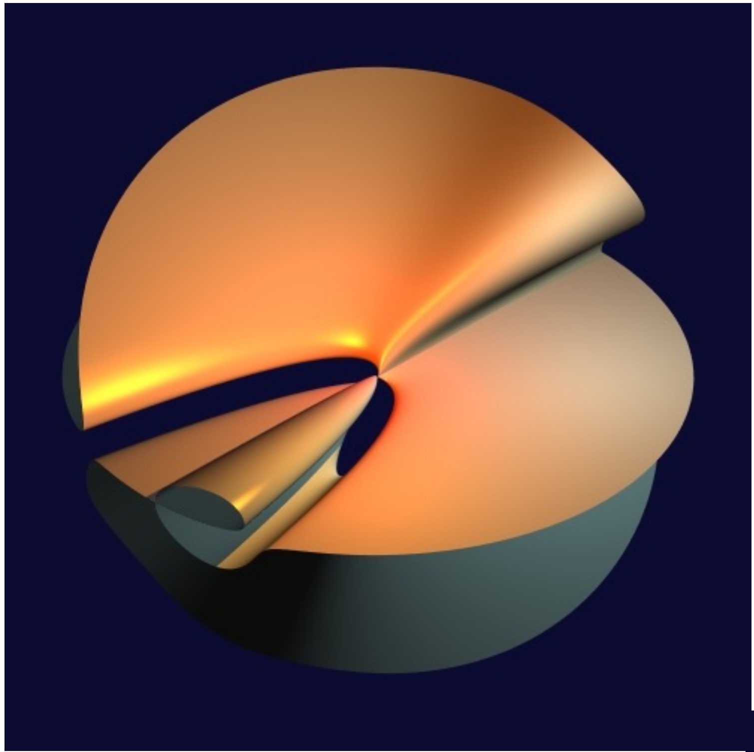
Elicoide



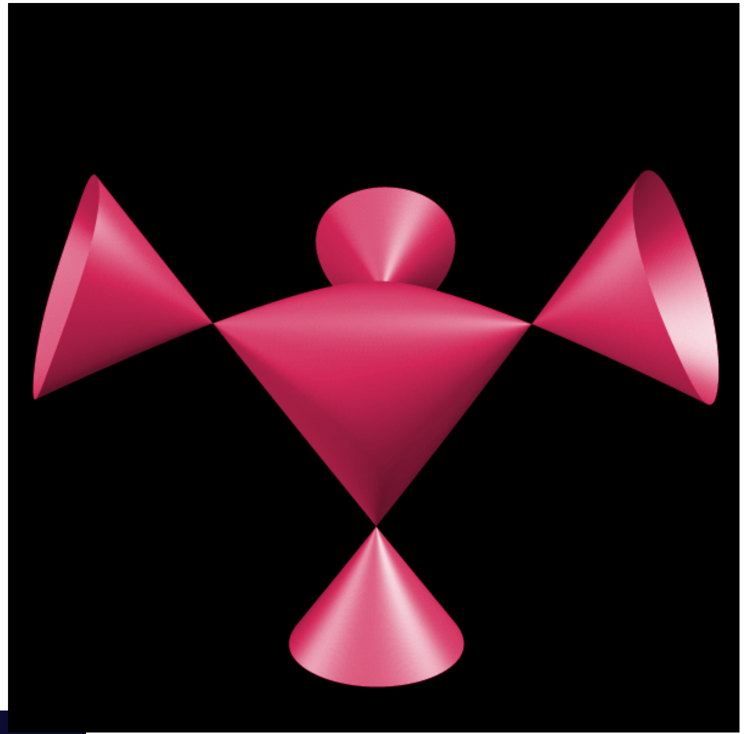
Superficie di Enneper

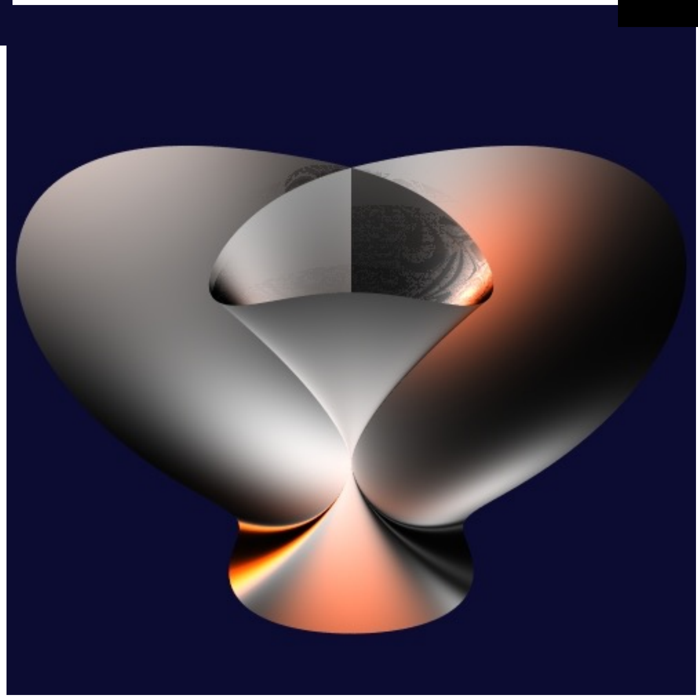


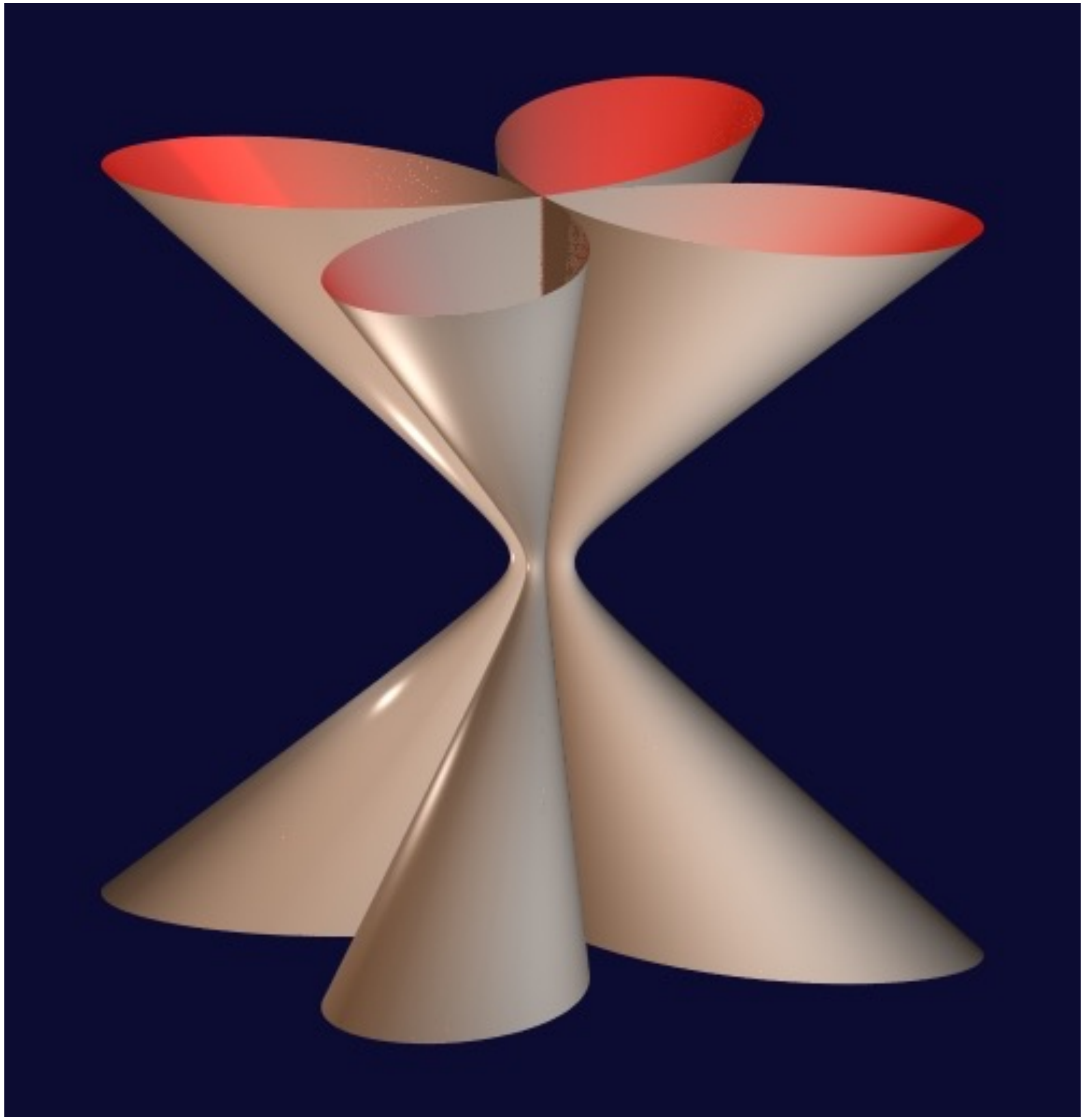
Superficie di Scherk



Superfici singolari
(non-esempi)





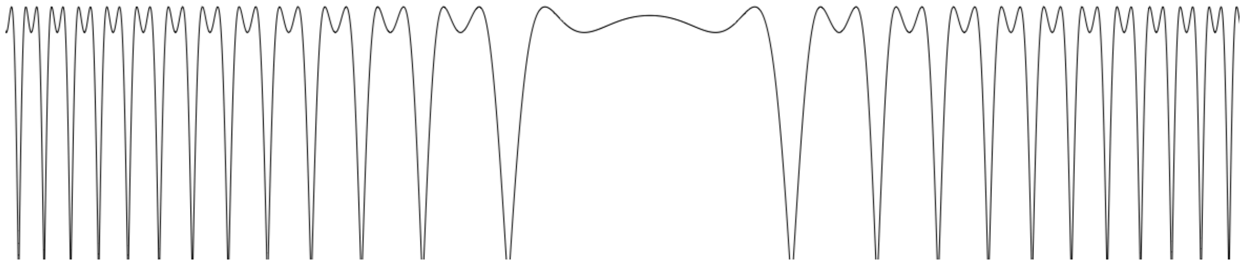


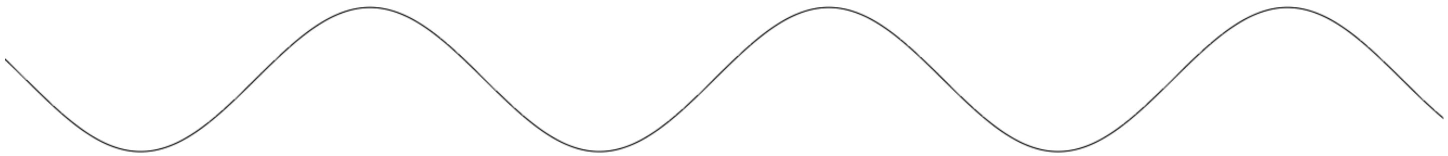
Un’altra superficie **singolare**

Possiamo parlare di deformazioni regolari di una superficie regolare (S,A).

Concetto un po' sofisticato……

Diciamo che la differenza fra deformazione regolare e deformazione continua è la stessa che c'è fra le due curve qui sotto:





A priori ho MOLTA più libertà di deformare continuamente che regolarmente.

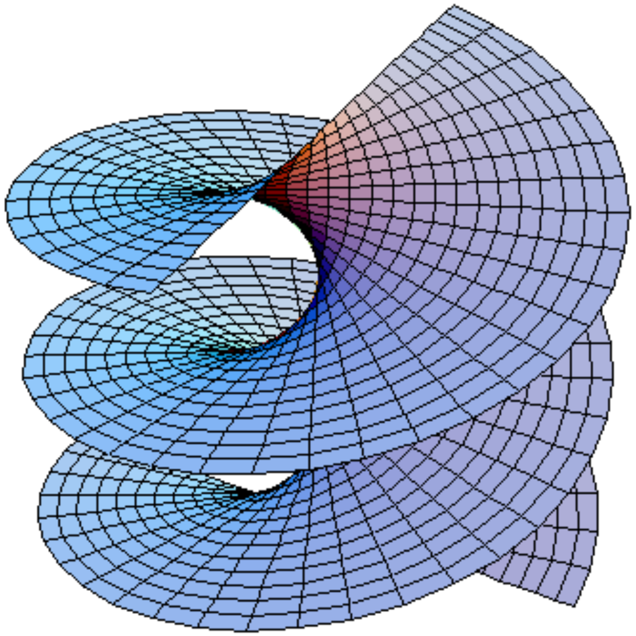
Osservazione:
abbiamo definito una nuova geometria, quella delle superfici regolari.

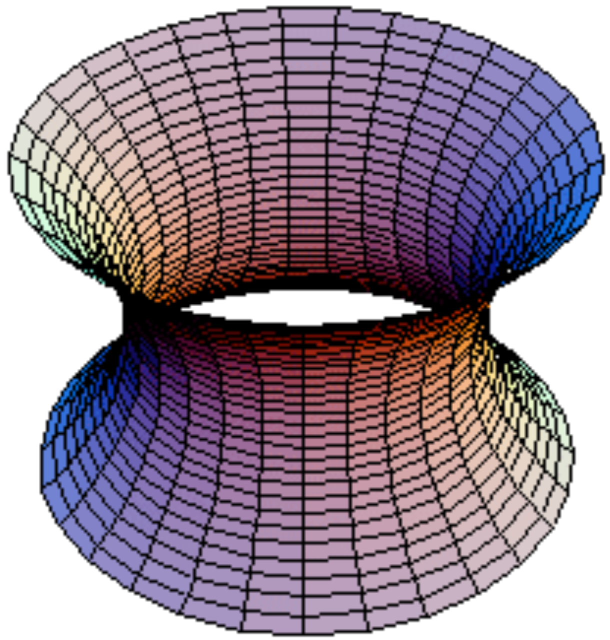
C’è una terza geometria, quella **metrica**.

Dove studiamo le superfici regolari dotate di una metrica, cioè
di un modo di misurare, sulla superficie, le lunghezze delle curve.

In questa geometria consideriamo solo deformazioni metriche,
cioè che mantengono le distanze. Sono dette ISOMETRIE.

Esempio: elicoide e catenoide sono isometriche.





Su una superfie metrica si può definire in ogni punto la CURVATURA.
Due superfici isometriche hanno necessariamente stessa curvatura. (Gauss)

RIASSUMENDO.

Possiamo studiare una superficie S in (almeno) 3 modi:

- come un mondo topologico di dimensione 2
- come un mondo di dimensione 2 dotato di un atlante *A*
- come un mondo di dimensione 2 con un atlante ed un metro

Ottengo 3 geometrie distinte perché le deformazioni permesse sono diverse.

Quante più deformazioni posso fare, tanto meno ricca è la geometria che ottengo.

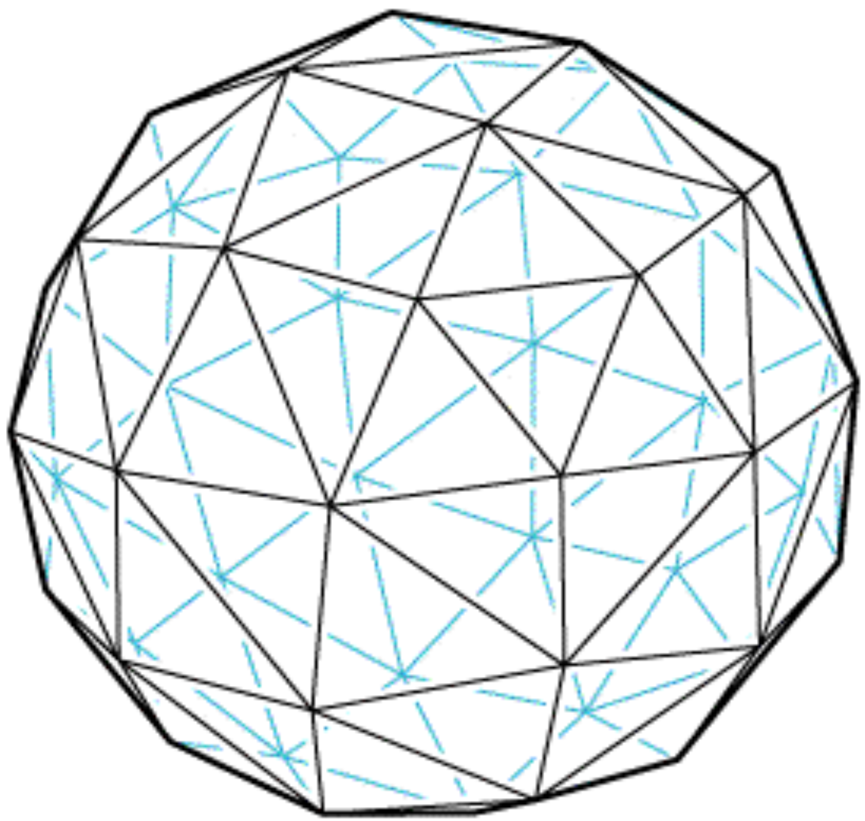
DOMANDA: MA CHE FANNO I MATEMATICI ?!

RISPOSTA: STUDIANO QUESTI OGGETTI E DIMOSTRANO (NUOVI) TEOREMI !

VEDIAMONE UN PAIO.

Teorema di classificazione delle superfici topologiche chiuse.

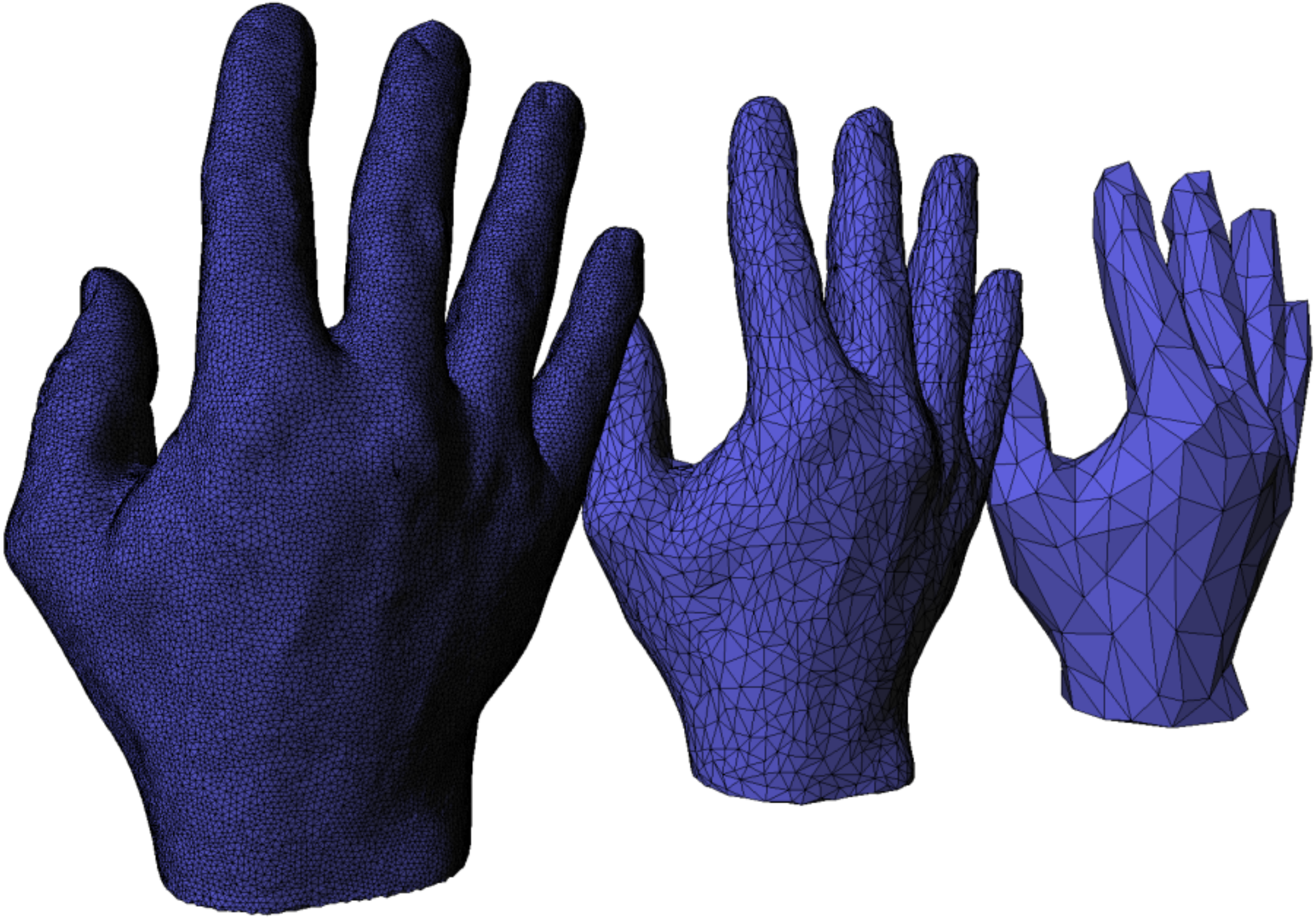
- Piastrelliamo la nostra superficie S con piastrelle triangolari.



- Contiamo il numero di vertici e otteniamo un numero V.
- Poi contiamo i lati e otteniamo un numero L
- Poi contiamo i triangoli e otteniamo T.

Il numero V-L+T si chiama **caratteristica di Eulero-Poincaré** di S e si denota con $\chi(S)$.

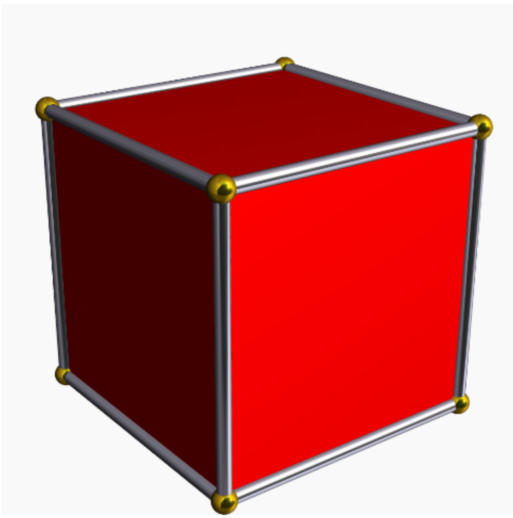
Quindi $\chi(S) = V - L + T$

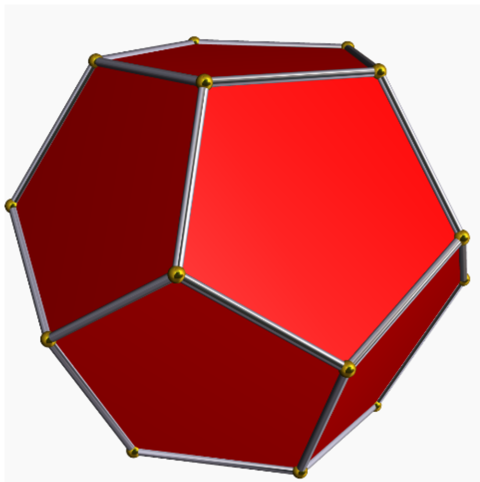


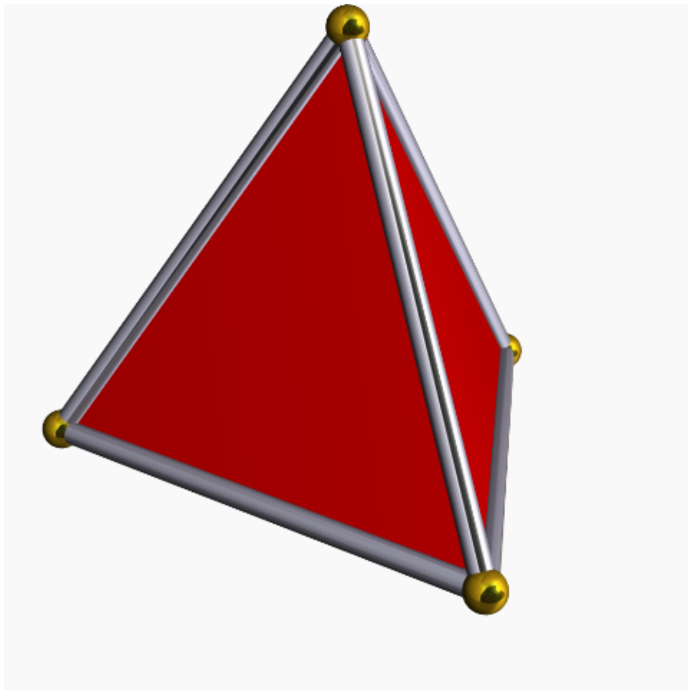
Teorema (parte prima).

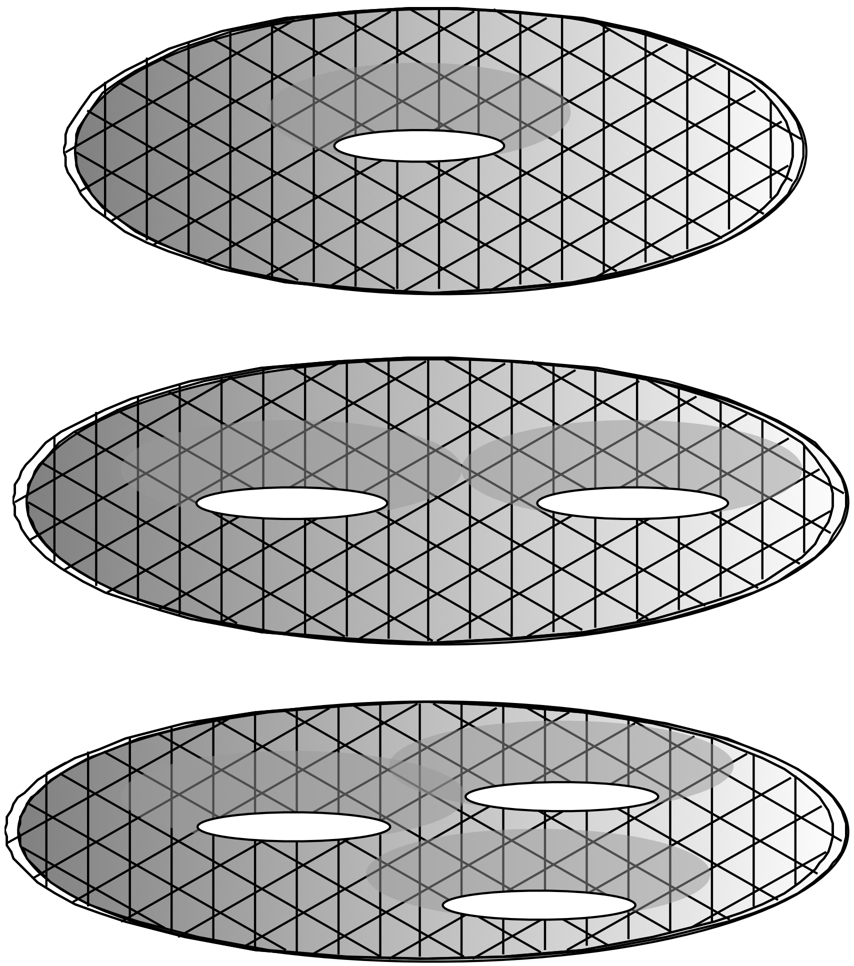
1) $\chi(S)$ non dipende dal piastrellatore
2) Se S è deformabile continuamente in T allora $\chi(S)=\chi(T)$.

$$\chi(\text{sfera}) = \chi(\text{cubo}) = \chi(\text{dodeca}) = \chi(\text{tetra}) = V - L + T = 2$$









χ(toro) = 0

χ(toro con due buchi) = -2

χ(toro con tre buchi) = -4

....

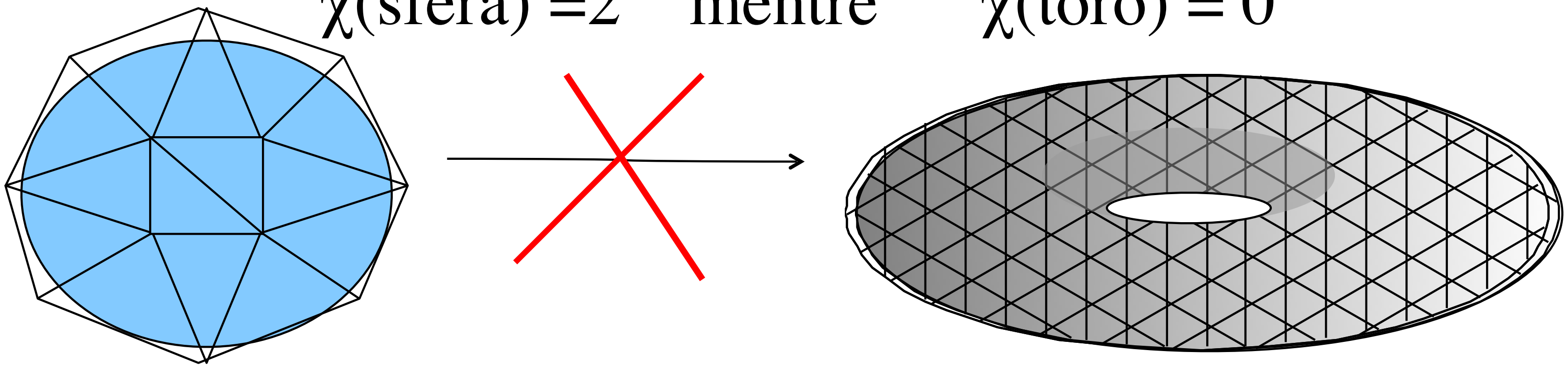
χ(toro con g buchi)= 2-2g

Teorema (parte prima).

1) $\chi(S)$ non dipende dal piastrellatore
2) Se S è deformabile continuamente in T allora $\chi(S)=\chi(T)$.

Quindi: sfera e toro NON sono topologicamente equivalenti perché

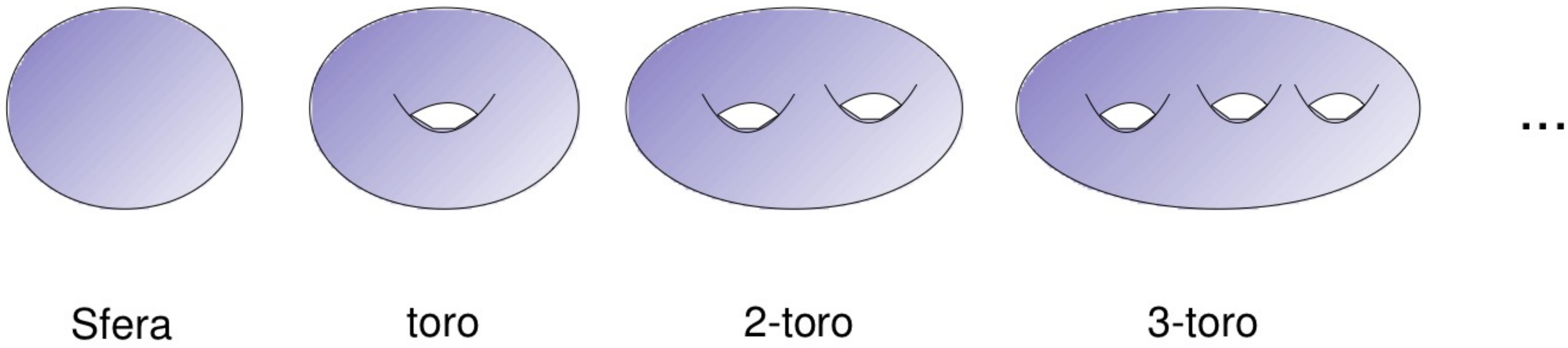
$\chi(\text{sfera}) = 2$ mentre $\chi(\text{toro}) = 0$



Analogamente, **tutte le superfici dell'esempio sono distinte (per il teorema)**.

Teorema (parte seconda)
Ogni superficie chiusa è deformabile ad un toro con g buchi

Magia!



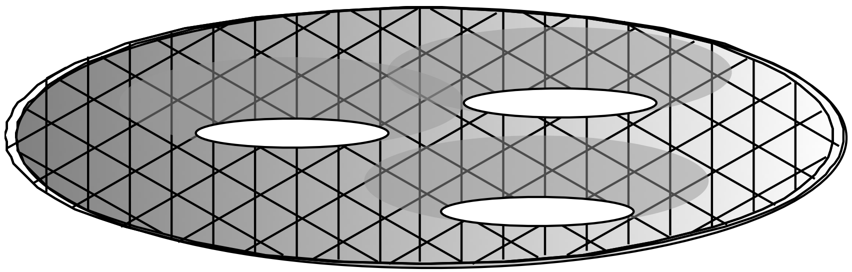
Il teorema di classificazione “mette ordine” nell’universo topologico.
Nell’universo topologico ci sono molte meno superfici chiuse del previsto !!

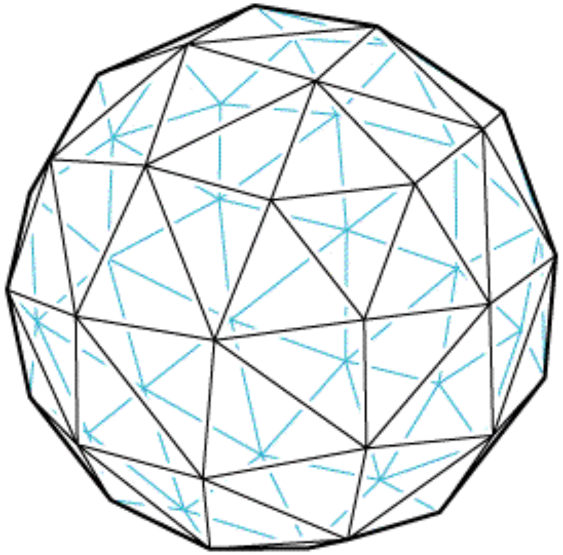
Il teorema di classificazione è un teorema "interno" all'universo topologico.

Vediamo un teorema che collega universi diversi, quello topologico
e quello metrico.

Parliamo del **Teorema di Gauss-Bonnet**.

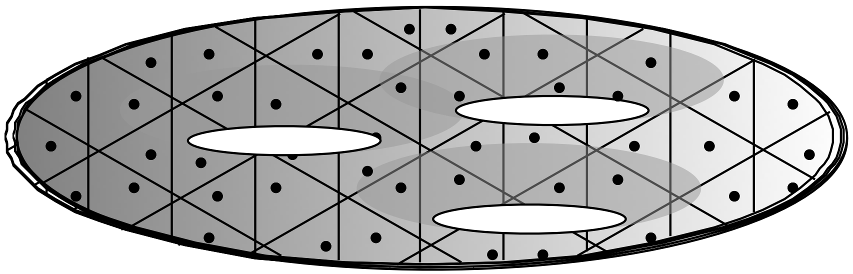
Riconsideriamo la piastrellatura della nostra superficie S.
Supponiamo ci siano 100 piastrelle.
Diamo loro un nome: $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$.





Consideriamo la somma:

$$\text{Area}(T_1) + \text{Area}(T_2) + \ldots\ldots + \text{Area}(T_{100}) \qquad \sim \text{Area}(S)$$



Ogni piastrella tocca la superficie in almeno un punto;
scegliamo per ogni triangolo uno di questi punti di S:

p_1 per T_1, p_2 per T_2, ……., p_{100} per $T_{100.}$

In ognuno di questi punti calcoliamo la curvatura di S:

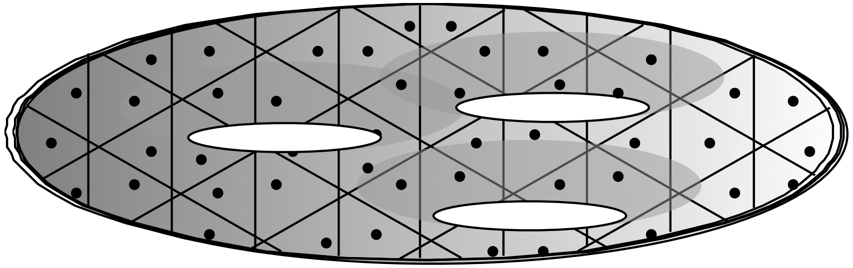
$k(p_1)$, $k(p_2)$, …, $k(p_{100})$.

La somma

$$k(p_1)\text{Area }(T_1) + k(p_2)\text{Area }(T_2)+\ldots\ldots+ k(p_{100})\text{Area }(T_{100})$$

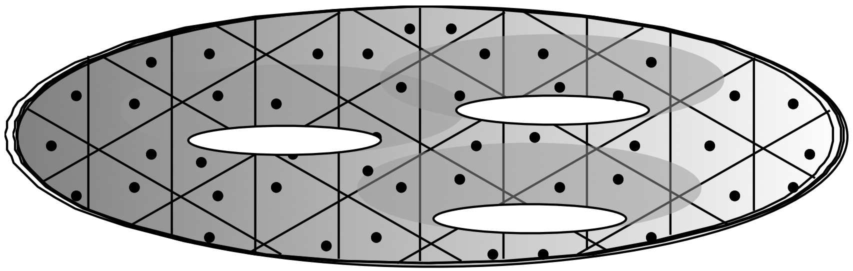
approssima un oggetto molto importante,

l'integrale della curvatura su S



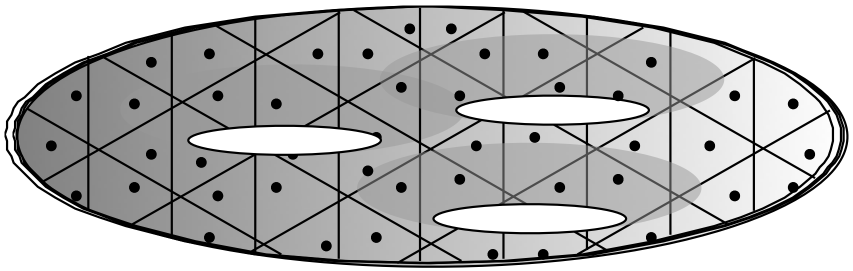
$k(p_1)\text{Area }(T_1) + k(p_2)\text{Area }(T_2) + \ldots\ldots + k(p_{100})\text{Area }(T_{100}) \sim \int_S k$

$$\int_S k = \begin{array}{l} \sqrt{2}\ ? \\ \sqrt{37}\,\pi^{23}\ ? \end{array}$$



$$\boxed{k(p_1)\mathrm{Area}\,(T_1) + k(p_2)\mathrm{Area}\,(T_2) + \ldots\ldots + k(p_{100})\mathrm{Area}\,(T_{100}) \quad \sim \quad \int_S k}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_S k \; = \; \begin{cases} 2 & \text{sulla la sfera} \\ 0 & \text{sul toro} \\ -2 & \text{sul 2-toro} \\ -4 & \text{sul 3-toro} \end{cases}$$



$$k(p_1)\text{Area}(T_1) + k(p_2)\text{Area}(T_2) + \ldots\ldots + k(p_{100})\text{Area}(T_{100}) \sim \int_S k$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_S k =}$$

2	su S deformabile a sfera
0	su S deformabile a toro
-2	su S deformabile a 2-toro
-4	su S deformabile a 3-toro
...	
2-2g	su S deformabile a g-toro

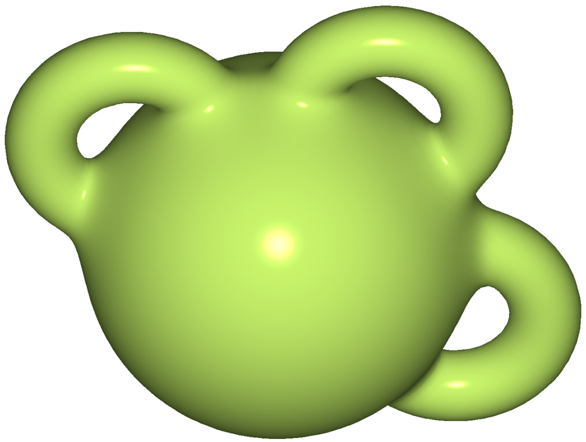
Teorema di Gauss-Bonnet.

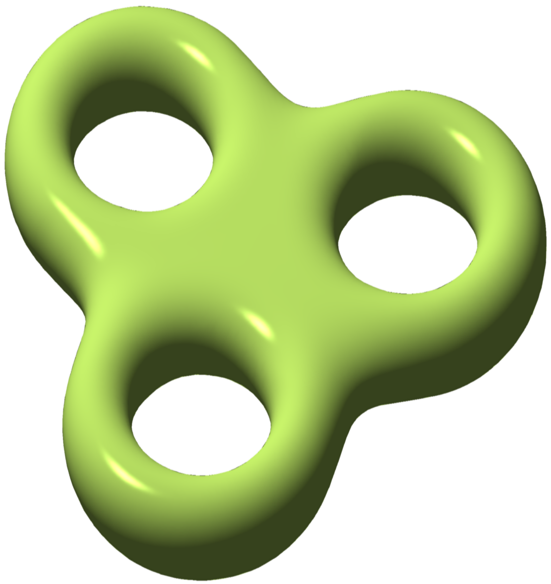
Sia (S,A) una superficie regolare dotata di metrica e sia k(p) la sua curvatura. Consideriamo $K(p)=k(p)/2\pi$. Allora:

$$\int_S K = (2-2g)$$

dove g è il numero di buchi di S

Magia un'altra volta !



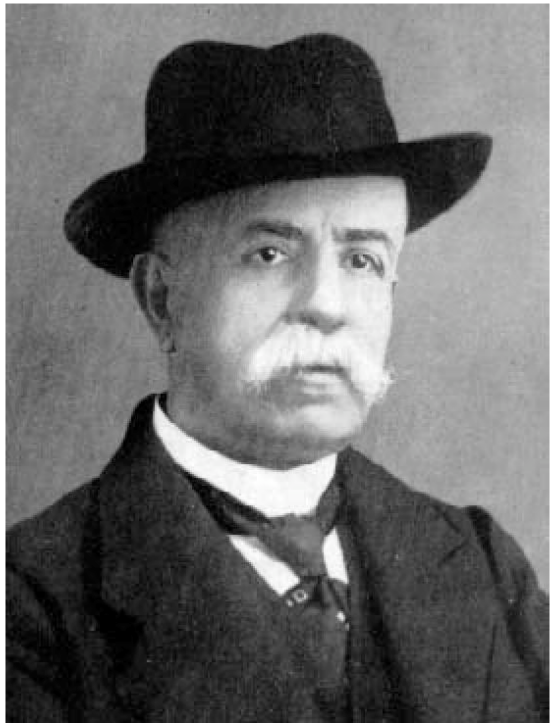


Osservazione: vi faccio notare che abbiamo parlato di “integrale su S”.

In generale, tutti i concetti dell’Analisi Matematica che si studiano sulla retta o sul piano possono essere estesi a superfici curve.

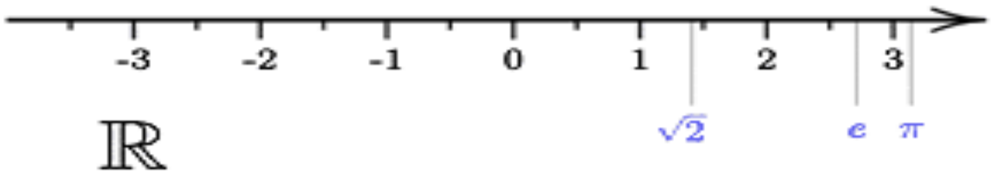
Tullio Levi-Civita

Gregorio Ricci-Curbastro

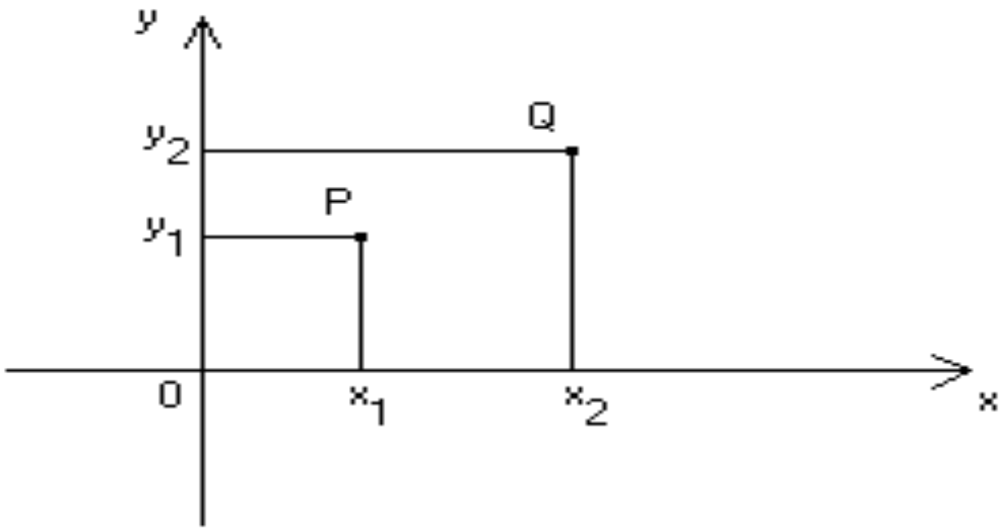


Mondi di dimensione 3,4,5,…n.

Parliamo innanzitutto di dimensioni:
I punti di una retta sono in corrispondenza biunivoca con i numeri reali IR



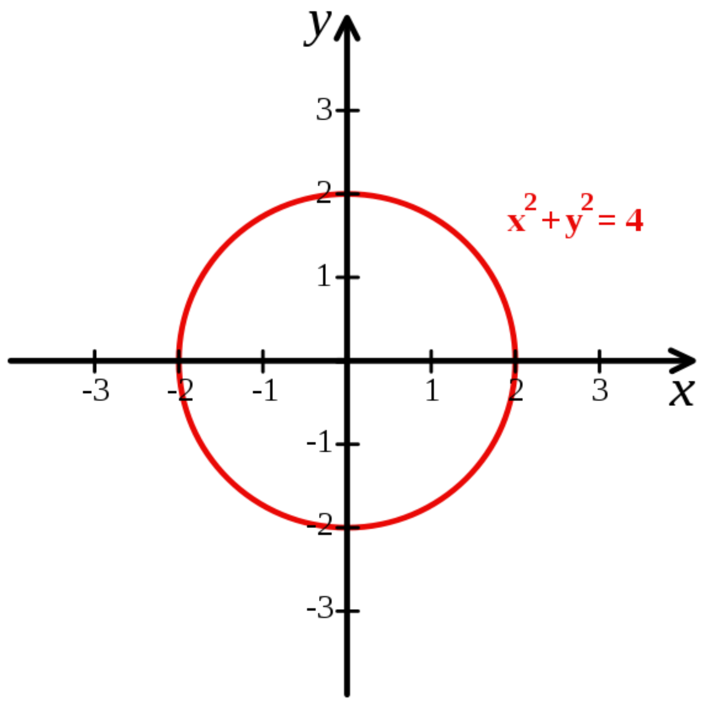
Nel piano ho bisogno di due numeri (x,y) per descrivere un punto:



Quindi: Piano = IR × IR = insieme delle coppie di numeri reali
Si scrive : IR × IR = IR^2 .   In definitiva: Piano= IR × IR=IR^2

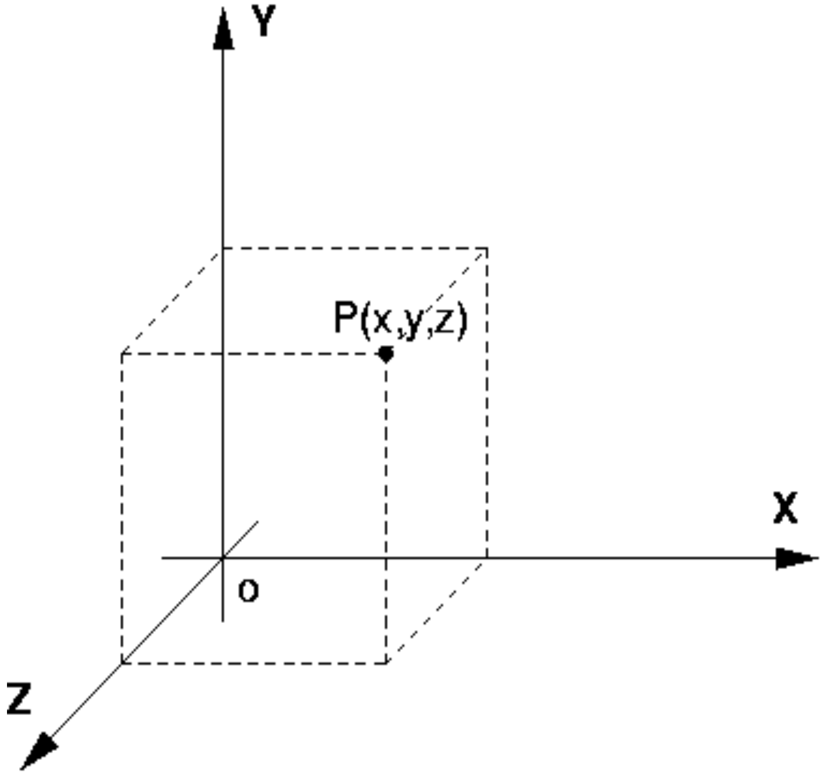
Un disco di raggio *r* nel piano è definito come l'insieme delle coppie (x,y) di IR^2 tali che

$$x^2 + y^2 \text{ è minore o uguale a } r^2$$



Ad esempio il disco di raggio 2 in IR^2 è l'insieme dei punti all'interno della circonferenza rossa

Analogamente, per determinare un punto nello spazio abbiamo bisogno di 3 numeri reali:



spazio = IR × IR × IR = insieme delle triple di numeri reali

Si scrive IR × IR × IR = IR^3 . Quindi: spazio = IR × IR × IR = IR^3

Possiamo parlare dell' intorno sferico di raggio r in IR^3:
è l'insieme delle triple (x,y,z) con la proprietà che

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{è minore o uguale a } r^2$$

Ora, possiamo anche parlare dello spazio-tempo

$$IR \times IR \times IR \times IR = IR^4$$

IR^4 ha dimensione 4, ogni punto è descritto da quattro numeri.

Possiamo parlare dell'intorno sferico di raggio r in IR^4 .

È l'insieme delle quadruple (x,y,z,t) tali che

$$x^2+ y^2 + z^2 + t^2 \quad \text{è minore o uguale a } r^2$$

In generale possiamo parlare di IR^n e dell'intorno sferico di raggio r in IR^n

È l'insieme delle n-ple $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ tali che

$$(x_1)^2+ (x_2)^2 + \ldots.+ (x_n)^2 \quad \text{è minore o uguale a } r^2$$

EPILOGO

Abbiamo parlato di superfici come di mondi di dimensione 2
ottenuti “mettendo insieme” dischi del piano (carte).

Un mondo di dimensione 3 è ottenuto mettendo insieme intorni sferici
di dimensione 3. Localmente è come un intorno sferico ma globalmente
è più complicato.

Un mondo di dimensione n è ottenuto mettendo insieme intorni sferici
di dimensione n.

I matematici studiano questi spazi (dette varietà) da almeno 3 punti di vista:

- quello topologico (deformazioni continue)
- quello delle carte (deformazioni regolari)
- quello metrico (deformazioni metriche)

La complessità della teoria esplode dopo la dimensione 2 !!
Ad esempio: la CURVATURA è un TENSORE di tipo (1,3).

Esempi:

1) Ci sono voluti 100 anni per dimostrare un teorema di classificazione per mondi di dimensione 3 (Teorema di Perelman, 2003)

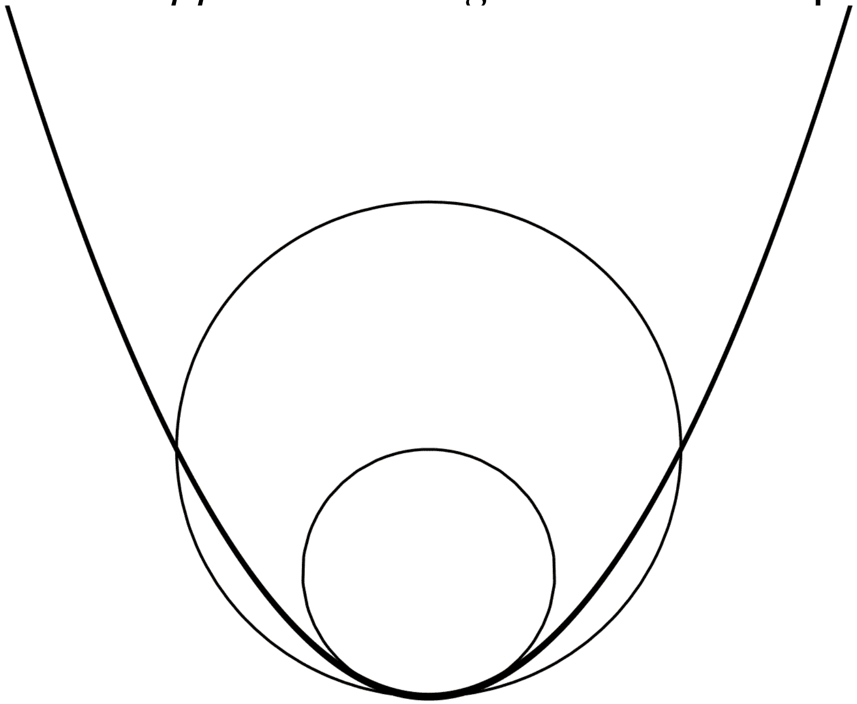
2) Ci sono un'infinità non-numerabile di atlanti di $\mathbb{R}^4$ non deformabili l'uno nell'altro ! (Teorema di Donaldson, 1986)

DOMANDA: MA TUTTO QUESTO HA QUALCOSA A CHE FARE CON LA FISICA ?!

Grazie!

DEFINIZIONE DI CURVATURA

La curvatura di una curva piana in un punto è l'inverso del raggio del cerchio che *approssima meglio* la curva in quel punto.

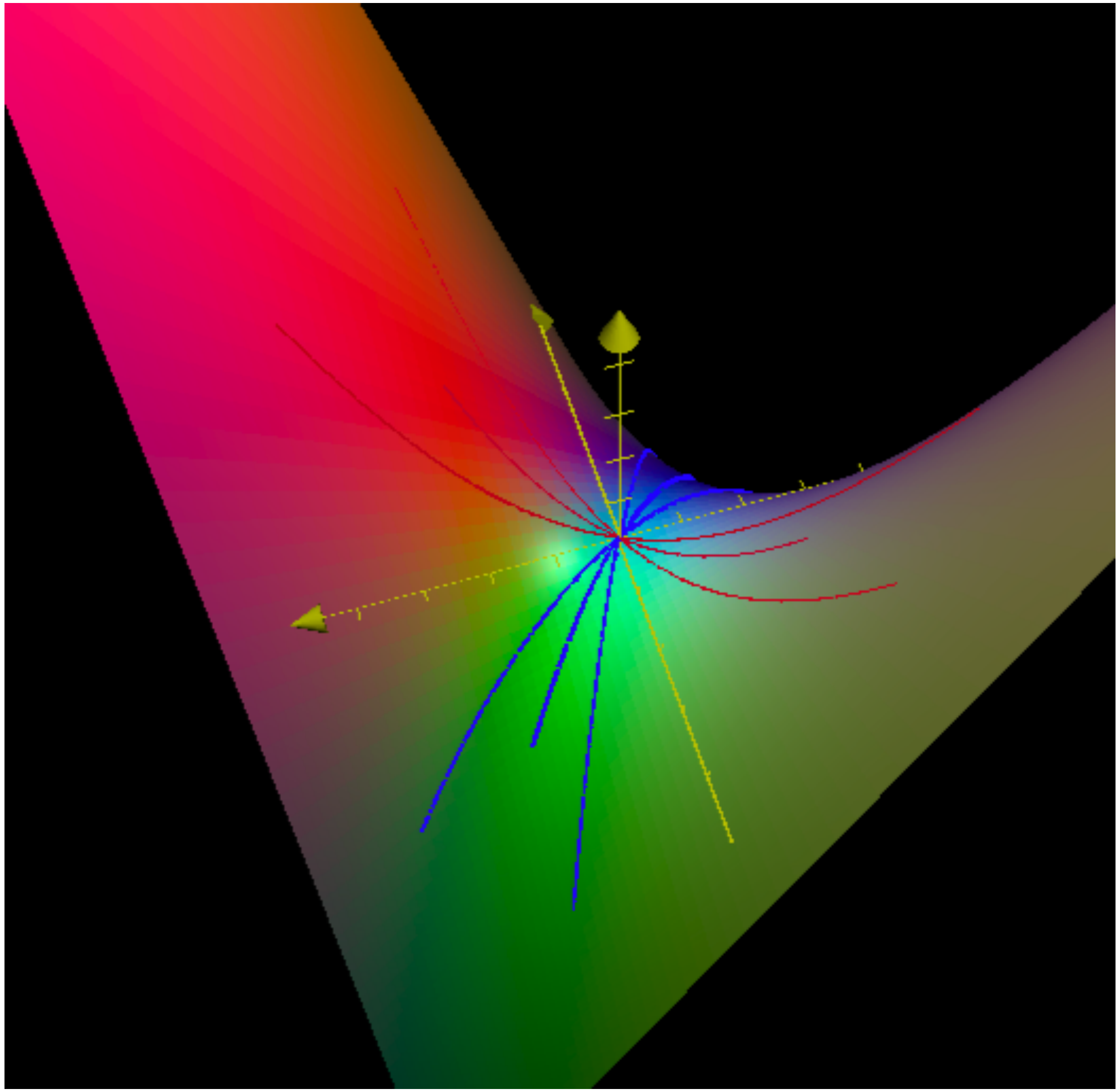


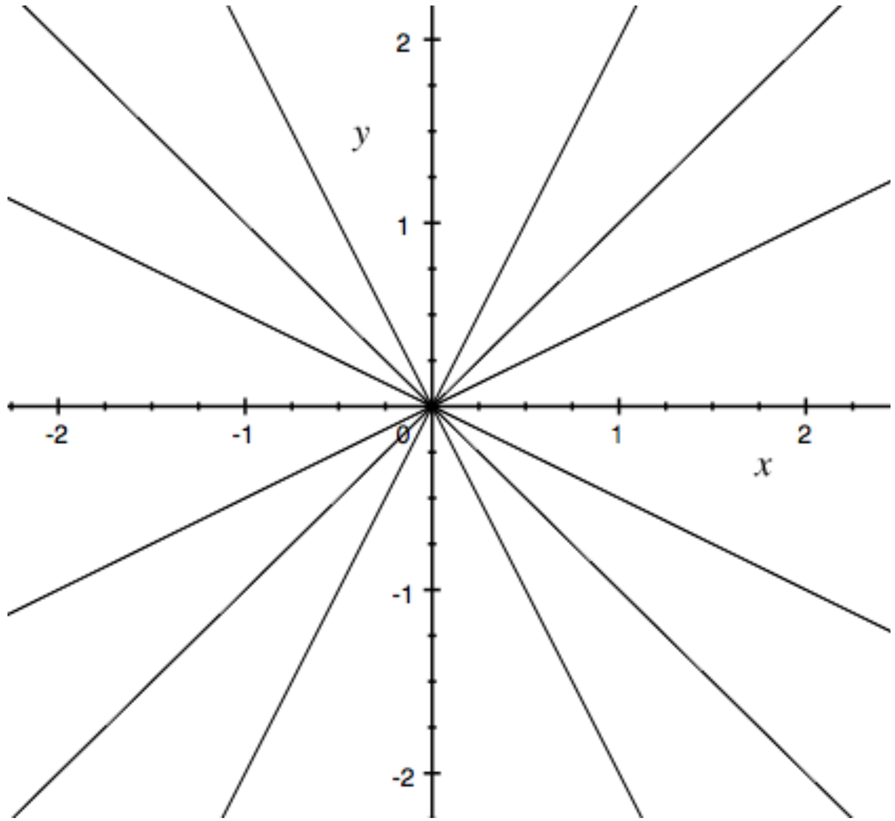
Il cerchio di raggio 1/2 approssima meglio del cerchio di raggio 1.

La curvatura è 2 nel vertice della parabola di equazione $y=x^2$.
Per convenzione se il cerchio è a sinistra percorrendo la curva la curvatura è positiva, se è a destra è negativa.
La curvatura di una retta è 0 (perchè il cerchio che *approssima "meglio"* ha raggio infinito!)

CURVATURA DI UNA SUPERFICIE REGOLARE

Sia un punto P della superficie. Il fascio di piani ortogonali al piano tangente in P interseca la superficie in una famiglia di curve. La curvatura in P è il prodotto del valore massimo e minimo raggiunto dalle curvature delle curve così ottenute.





La curvatura è negativa!