Geometria Differenziale a.a. 2018/19 (Prof. P. Piazza).

Programma d'esame

Testi di riferimento:

- Marco Abate e Francesca Tovena "Curve e Superfici", Ed. Springer. Testo principale.
- Edoardo Sernesi "Geometria 2", ed Boringhieri.
- Mini corso di Topologia (note di Marco Manetti, disponibili in rete)
- Frank W. Warner, "Foundations of differentiable manifolds and Lie groups", Ed. Springer-Verlag (Graduate Text in Mathematics, Vol 94)

Su Internet alla pagina Web
`http://www.mat.uniroma1.it/people/piazza/geodiff-18-19.htm`
sono disponibili i complementi e gli esercizi assegnati durante il corso; *questo materiale è parte integrante del programma d'esame.*

Nella pagina web del corso trovate riferimenti bibliografici molto dettagliati per gli argomenti di questo programma d'esame.

Gli argomenti contrassegnati con un asterisco sono da intendersi senza dimostrazioni.

Ripasso di Topologia (*).
Spazi topologici, parte interna, chiusura ed intorni. Applicazioni continue. Spazi metrici. Sottospazi e immersioni. Definizione di topologia prodotto. Spazi di Hausdorff. Assiomi di numerabilita'. Connessione. Componenti connesse. Spazi compatti. Topologia quoziente.

Teoria locale delle curve.
Definizione di curva. Lunghezza d'arco. Curvatura. Versore normale. Curve biregolari. Versore binormale. Torsione. Curve piane. Formule di Frenet-Serret. Curvatura e torsione con parametrizzazioni arbitrarie. Teorema fondamentale della teoria locale delle curve.
1-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$. Teorema di classificazione delle 1-sottovarietà (*). Teorema di Jordan (*)

Teoria locale delle superfici.
Definizione di superficie immersa nello spazio euclideo. Una superficie immersa definisce localmente un omeomorfismo con l'immagine. Definizione di superficie regolare nello spazio euclideo. Esempi. Superfici di rotazione. Punti critici, valori critici e valori regolari di

un'applicazione infinitamente differenziabile. Le componenti connesse della contrimmagine di un valore regolare di una funzione reale sono superfici regolari. Ogni superficie regolare è localmente un grafico. Parametrizzazioni a valori in una superficie regolare. Funzioni regolari su una superficie. Applicazioni regolari fra superfici. Piano tangente ad una superficie regolare. Germi di funzioni in un punto. Derivazioni. Identificazione del piano tangente geometrico in un punto p con lo spazio delle derivazioni in p. Differenziale di un'applicazione e sue descrizioni.

Curvature.
Prima forma fondamentale. Esempi. Isometrie. Il piano ed il cilindro sono localmente isometrici. La catenaria e l'elicoide sono localmente isometrici. Proprietà intrinseche. Orientabilità. Il nastro di Moebius (*). Curvatura normale. Mappa di Gauss. Seconda forma fondamentale. Direzioni principali. Curvature principali. Curvatura gaussiana. Curvatura media. Formula di Eulero. Espressione dei coefficienti della seconda forma fondamentale. Formule esplicite per curvatura gaussiana, curvatura media e curvature principali. Punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari. Punti ombelicali. Linea di curvatura. Direzione asintotica. Linea asintotica. Simboli di Christoffel. Teorema egregium di Gauss. Area e curvatura gaussiana. Integrale di una funzione su una parametrizzazione di una superficie regolare.

Geodetiche
Campi vettoriali lungo una curva contenuta in una superficie; derivata covariante, campi paralleli. Geodetiche. Equazioni delle geodetiche. Isometrie locali e geodetiche. Prime proprietà delle geodetiche. Minimizzazione delle lunghezze (enunciati). Lemma di Gauss. Dimostrazione del teorema sulle proprietà di minimizzazione delle geodetiche. Teorema di Hopf-Rinow-de Rham (*). Geodetiche delle superfici di rotazione. Teorema di Clairaut. Curvatura geodetica. Formula per la curvatura geodetica in coordinate ortogonali.

Teorema di Gauss-Bonnet e Teorema di Poincaré-Hopf .
Enunciato del Teorema di Gauss-Bonnet per regioni con frontiera regolare. Triangolazioni (*). Caratteristica di Eulero-Poincaré. Classificazione delle superfici orientabili compatte (*). Orientazione della frontiera di una regione regolare. Enunciato del teorema di Gauss-Bonnet per regioni con frontiera regolare a tratti. Dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet (solo enunciato teorema delle tangenti di Hopf). Corollari immediati di Gauss-Bonnet.

Campi vettoriali. Curve integrali e loro esistenza. Zeri isolati di un campo di vettori. Indice di uno zero isolato (solo enunciato che la definizione è ben posta). Teorema di Poincaré-Hopf. Conseguenze.

Varietà differenziabili (riemanniane). Fibrati. Derivata covariante. Curvatura.

Definizione di varietà differenziabile. Esempi notevoli: sfera, spazi proiettivi, grassmanniane (*), n-sottovarietà di $\mathbb{R}^N$.

Spazi Tangenti. Fibrato tangente; sua struttura di varietà differenziabile. Orientabilità. Il piano proiettivo reale non è orientabile (*). Differenziali. Diffeomorfismi locali. Immersioni, inclusioni differenziabili e sottovarietà (*). Summersioni (*). Ulteriori esempi: ipersuperfici algebriche, $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$. Lemma di Sard (*). Teorema di Whitney (*). Partizione dell'unità (solo definizione ed enunciato della sua esistenza).

Fibrati vettoriali: definizione, esempi, funzioni di transizione, sezioni, banalità di un fibrato, sezioni indipendenti e banalità (*), metriche su un fibrato, esistenza di metriche (*), fibrato tangente, fibrato universale.

Campi di vettori e loro proprietà (*). Bracket di Lie (*). Definizione di derivata covariante di una sezione di un fibrato lungo un campo di vettori. Esempio 1: fibrato banale. Esempio 2: sottofibrato di un fibrato banale. Esistenza di una derivata covariante in generale (*). Compatibilità con la metrica. Derivata covariante simmetrica sul fibrato tangente di una varietà differenziabile (*). Derivata covariante di Levi-Civita sul fibrato tangente di una varietà riemanniana (*). Derivata covariante di Levi-Civita su una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ dotata della metrica indotta dal prodotto scalare canonico (*). Operatore di curvatura e sua relazione con la curvatura gaussiana (*). Nuova dimostrazione del Teorema Egregium (*). Operatore di curvatura su una varietà riemanniana di dimensione 2 e conseguente definizione intrinseca di curvatura gaussiana.