NOTE PER IL CORSO di ISTITUZIONI DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Scienze Naturali - A.A.2022-2023

§1. PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE

Sia $\mathbf{R}$ il campo dei numeri reali. Data una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ abbiamo definito $\det A \in \mathbf{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Teorema di Binet) dove a sinistra compare il determinante del prodotto righe per colonne di A per B e a destra il prodotto di due numeri reali;
- se c'è una riga (o una colonna) di zeri il determinante è nullo (questo è ovvio perché possiamo sviluppare secondo quella riga (o quella colonna) e sappiamo che il determinante è indipendente dalla riga (o dalla colonna) secondo la quale sviluppiamo);
- scambiando due righe o due colonne di una matrice, il determinante cambia di segno;
- il determinante di una matrice con due righe uguali o con due colonne uguali è uguale a zero (segue facilmente dall'ultima proprietà);
- denotiamo con R_ℓ la ℓ-ma riga di A; se esistono j, i e k in $\{1,\dots,n\}$ ed α,β in $\mathbf{R}$ tali che

$$R_j = \alpha R_i + \beta R_k$$

allora $\det A = 0$.

§2. MINORI E RANGO DI UNA MATRICE

DEFINIZIONE. Data una matrice $A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$ diremo *sottomatrice quadrata di A di ordine r* la matrice quadrata ottenuta prendendo l'intersezione di r righe ed r colonne di A. Una sottomatrice quadrata di ordine r è un elemento in $M_{r\times r}(\mathbf{R})$ e viene anche chiamata un **minore di ordine** r. (In alcuni testi un minore è invece definito come *il determinante* di una sottomatrice quadrata di ordine r.)

ESEMPIO: Se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

le sottomatrici quadrate di ordine massimo sono le sottomatrici quadrate di ordine 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

ottenute prendendo rispettivamente

$$(R_1,R_2,R_3)\cap(C_1,C_2,C_3),\ \ (R_1,R_2,R_3)\cap(C_1,C_2,C_4)\,,\ \ (R_1,R_2,R_3)\cap(C_1,C_3,C_4)\,,\ \ (R_1,R_2,R_3)\cap(C_2,C_3,C_4)\,.$$

Abbiamo poi le sottomatrici quadrate di ordine 2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

date rispettivamente da

$$(R_1,R_2)\cap(C_1,C_2)\,,\ \ (R_1,R_2)\cap(C_1,C_3)\,,\ \ (R_1,R_2)\cap(C_1,C_4)$$

$$(R_1,R_2)\cap(C_2,C_3)\,,\quad (R_1,R_2)\cap(C_2,C_4)\,,\quad (R_1,R_2)\cap(C_3,C_4)$$

e poi, similmente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},$$

ed infine le matrici quadrate di ordine 1 (quelle costituite dai singoli elementi)

$$(a_{11}),\quad (a_{12}),\quad (a_{13}),\quad (a_{14}),\quad (a_{21}),\quad (a_{22}),\quad (a_{23}),\quad (a_{24}),\quad (a_{31}),\quad (a_{32}),\quad (a_{33}),\quad (a_{34})$$

corrispondenti a $R_1 \cap C_1$, $R_1 \cap C_2$ etc...

DEFINIZIONE. Sia $A \in M_{n\times m}(\mathbf{R})$. Diremo *rango di* A il massimo intero r tale che esiste *un minore di ordine* r *con determinante non nullo*. Quindi A ha rango r se esiste un minore di ordine r con determinante non nullo e tutti i minori di ordine $(r+1)\times(r+1)$ hanno determinante uguale a zero.

ESEMPIO 1: Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
RISOLUZIONE: al massimo i minori di A possono avere ordine 2. Vediamo se tra i minori di ordine 2 ce n'è almeno uno con determinante non nullo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 6-6=0,\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3-4=-1\neq 0,$$

quindi il rango è 2 (non è necessario calcolare il determinante del terzo minore d'ordine 2).

ESEMPIO 2: Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.
RISOLUZIONE: al massimo i minori di A possono avere ordine 2. Vediamo se tra i minori di ordine 2 ce n'è almeno uno con determinante non nullo:

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 12-12=0,\quad \det\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 4-4=0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -6+6=0,$$

quindi il rango è minore di 2. Poichè i minori di ordine 1 hanno tutti determinante non nullo (basterebbe un elemento non nullo, qui sono tutti non nulli), il rango è 1.

OSSERVAZIONE: solo le matrici con tutti gli elementi nulli hanno rango 0.

Abbiamo anche enunciato in classe il seguente risultato:

TEOREMA (degli orlati). Rango di A è uguale a r se e solo se esiste una sottomatrice quadrata (o minore) di ordine r con determinante diverso da zero e tutte le sottomatrici quadrate $(r+1)\times(r+1)$ che si ottengono **orlando** tale matrice (e cioè aggiungendo a tale sottomatrice una riga ed una colonna) hanno determinante uguale a zero.

Esempio. La matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
ha rango 2. Il minore $(R_1, R_2) \cap (C_1, C_2)$, e cioè la sottomatrice quadrata
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
ha determinante diverso da zero. Quindi il rango è almeno 2. Per dimostrare che il rango è proprio 2 dobbiamo far vedere che i minori di ordine 3 della matrice hanno tutti determinante uguale a zero. Come abbiamo visto nell'esempio dopo la definizione di rango questi minori sono in nunero di 4. Ora, per il teorema degli orlati possiamo prendere in considerazione i minori di ordine 3 che orlano $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Questi sono
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
È facile vedere che il determinante di queste sottomatrici è nullo. Ne segue che il rango è 2.
Penso sia ora chiaro il vantaggio computazionale che si ottiene applicando il teorema degli orlati !

§3. TEOREMA DI CRAMER.

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ una matrice quadrata $n \times n$ e sia $\underline{b} \in M_{n\times 1}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n$. Consideriamo il sistema di n equazioni in n incognite
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$
che riscriviamo in forma compatta come $A\underline{x} = \underline{b}$. La matrice A è detta la matrice dei coefficienti del sistema. Tale sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
Se $\det A \neq 0$ allora l'unica soluzione $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ si ottiene come segue: detta A_j la matrice che si ottiene sostituendo alla j-ma colonna di A la colonna dei termini noti $\underline{b}$, si ha
$$\alpha_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

§4.TEOREMA DI ROUCHÉ– CAPELLI. ESEMPI.

Consideriamo i seguenti sistemi:
$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x - 3y = -9 \end{cases}, \qquad (S_2) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}.$$

Poichè hanno la stessa matrice dei coefficienti ed essa ha determinante nullo (verificatelo), siamo nel caso in cui il Teorema di Cramer non ci dice nulla. Come possiamo decidere se il sistema ammette soluzioni e in caso affermativo calcolarle ? A questo risponde il teorema di Rouché–Capelli. Per meglio capire questo teorema, riscriviamo i sistemi precedenti nella forma:

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3(2x-y) = 3 \cdot (-3) \end{cases}, \qquad (S_2) \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3(2x-y) = 5 \end{cases}.$$

Allora, se x ed y sono soluzione della prima equazione di (S_1), sono anche soluzione della seconda (è la stessa moltiplicata per 3) e quindi comunque io scelga x, prendendo $y = 2x + 3$ (in modo cioè che sia soluzione della prima equazione), ottengo una soluzione di tutto il sistema. Quindi (S_1) ha infinite soluzioni (tutte le coppie di numeri $(t, 2t+3)$ al variare di $t \in \mathbf{R}$). Al contrario per il sistema (S_2), se x ed y verificano la prima equazione (cioè $y = 2x+3$), sicuramente non possono verificare la seconda (ho moltiplicato per 3 il primo membro ma non il secondo). Allora (S_2) non ha nessuna soluzione. Possiamo distinguere tra i due casi andando a considerare le matrici

$$C_1 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \qquad C_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

ottenute in ogni caso aggiungendo a destra della matrice dei coefficienti la colonna dei termini noti. Si calcoli il rango di ciascuna delle matrici così ottenute. Si ottiene

$$rango(C_1) = 1, \qquad rango(C_2) = 2,$$

in quanto nel primo caso, anche i minori della matrice C_1 contenenti i termini noti hanno determinante nullo essendo i termini noti nella stessa proporzione dei coefficienti. Nel secondo caso invece, questa proporzionalità manca e quindi troviamo (due) minori con determinanti non nulli:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 10 - 18 = -8, \qquad \det \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = -5 - 9 = -14.$$

In definitiva, per il sistema S_1, tanto la matrice dei coefficienti che la matrice C_1 hanno la "stessa proporzionalità" e quindi *rango* 1 e ci sono infinite soluzioni; per il sistema S_2, la matrice dei coefficienti ha *rango* 1, mentre la matrice C_2 ha *rango* 2 e non esistono soluzioni.

Vale in generale il seguente teorema:

TEOREMA DI ROUCHÉ – CAPELLI
Un sistema lineare (di n equazioni in m incognite $x_1, x_2, \ldots, x_m$, con $n, m \in \mathbf{N}$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases},$$

è risolubile se e solo se la matrice dei coefficienti A e la matrice C ottenuta da A aggiungendo la colonna di termini noti,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(C)\,.$$

La matrice C è detta la matrice **completa** del sistema.

OSSERVAZIONE: In definitiva, possiamo trovarci nei seguenti casi:

(a) A quadrata, $\det A \neq 0 \Rightarrow$ applichiamo il Teorema di Cramer per calcolare l'unica soluzione.
(b) A quadrata, $\det A = 0$.
(c) A non quadrata.

Nei casi (b) e (c), per il teorema di Rouché–Capelli:
(i) se $\text{rango}\, A \neq \text{rango}\, C$ non esistono soluzioni;
(ii) se $\text{rango}\, A = \text{rango}\, C$ esistono soluzioni.

Ecco come procedere al calcolo delle soluzioni nel caso (ii):
Se $k := \text{rango}\, A = \text{rango}\, C$, ci sarà un minore di rango k in A. Questo minore individua k righe e k colonne e quindi individua k equazioni e k variabili. Chiamiamo le k variabili individuate dal minore "le variabili fisse" e chiamiamo le rimanenti $m-k$ variabili le "variabili libere".

A questo punto procediamo come segue:

Passo 1). Teniamo solo le k equazioni individuate dal minore non nullo e scartiamo le altre $n-k$ equazioni.

Passo 2). Nel sistema $k \times m$ che otteniamo dopo il Passo 1) teniamo a sinistra del segno di uguaglianza le k variabili fisse e mandiamo dall'altra parte le $m-k$ variabili libere che rinominiamo $t_1, t_2, \ldots, t_{m-k}$ e che tratteremo come parametri.

Passo 3). Abbiamo dopo i primi 2 passi un sistema $k \times k$ con termini noti che dipendono dai termini noti iniziali e dai parametri $t_1, t_2, \ldots, t_{m-k}$. A questo punto applichiamo Cramer a questo sistema quadrato. La soluzione data dalla regola di Cramer dipenderà dagli $m-k$ parametri $t_1, t_2, \ldots, t_{m-k}$ e la denotiamo quindi nel modo seguente

$$(\alpha_1(t_1, \ldots, t_{m-k}), \alpha_2(t_1, \ldots, t_{m-k}), \ldots, \alpha_k(t_1, \ldots, t_{m-k}))\,.$$

L'insieme delle soluzioni del sistema originale è dato dalle m-ple ottenute prendendo $\alpha_1(t_1, \ldots, t_{m-k})$, $\ldots$, $\alpha_k(t_1, \ldots, t_{m-k})$ al posto delle variabili fisse e $t_1, t_2, \ldots, t_{m-k}$ al posto delle variabile libere. Notiamo che se $m-k > 0$ ci sono infinite soluzioni dipendenti da $m-k$ parametri.

ESEMPIO. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ -2x + 4y - z = -1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè per i minori di ordine (massimo) 2 si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = -1 + 8 = 7,$$

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 16 = -14,$$

A ha rango 2. Inoltre, poichè anche la matrice C (2×4) ha rango 2 (avendo tra i suoi minori quelli di A), ci troviamo nel caso (c)(ii) dell'osservazione che segue il Teorema. Allora:

Passo 1) poiché $k = \operatorname{rango} A = \operatorname{rango} C = 2 =$"numero di equazioni del sistema", non devo eliminare nessuna equazione.

Passo 2) Nel nostro sistema 2×3 teniamo a sinistra del segno di uguaglianza le 2 variabili fisse corrispondenti a un minore di ordine 2 non nullo, ad esempio il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

corrispondente alle variabili x e z che sono quindi le variabili fisse; mandiamo poi dall'altra parte la variabile libera, in questo caso y, che rinominiamo ponendo $t := y$ e che tratteremo come parametro. Quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 4z = 2 + 2t \\ -2x - z = -1 - 4t \end{cases}.$$

Passo 3) Abbiamo dopo i primi 2 passi un sistema 2×2 con termini noti che dipendono dai termini noti iniziali e dal parametro t. A questo punto applichiamo Cramer a questo sistema quadrato. Le soluzioni date dalla regola di Cramer dipenderanno dal parametro $t \in \mathbf{R}$ perché la colonna dei termini noti dipende da t:

$$\alpha_1(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 2+2t & 4 \\ -1-4t & -1 \end{pmatrix}}{7} = \frac{-2-2t+4+16t}{7} = \frac{2+14t}{7},$$

$$\alpha_2(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2+2t \\ -2 & -1-4t \end{pmatrix}}{7} = \frac{-1-4t+4+4t}{7} = \frac{3}{7}.$$

Ora torniamo al sistema originale: le variabile fisse sono x e z; la variabile libera è y. L'insieme delle soluzioni è dato dalle terne ottenute prendendo $\alpha_1(t)$ al posto della variabile fissa x, $\alpha_2(t)$ al posto della variabile fissa z e t al posto della variabile libera y. Si hanno quindi le infinite soluzioni

$$\{(\alpha_1(t), t, \alpha_2(t))\,,\ \ t \in \mathbf{R}\}$$

e cioè

$$\{(\frac{2+14t}{7}, t, \frac{3}{7})\,,\ \ t \in \mathbf{R}\}$$