4 Generalità sulle varietà riemanniane

Per una varietà differenziabile S, una *struttura riemanniana* è il dato aggiuntivo che permette di introdurre nozioni di lunghezza, distanze, angoli, volumi su S, e di misurare dunque la *forma* della varietà, come vedremo nei prossimo capitoli. Da un punto di vista più teorico, una struttura riemanniana consente di derivare i campi vettoriali e introdurre un calcolo differenziale su S oltre il primo ordine, come annunciato precedentemente.

4.1 Struttura riemanniana

Definizione 4.1.1 Una *varietà riemanniana* C^k è una varietà differenziabile S di classe C^k, con in più una *metrica riemanniana* g, cioè un prodotto scalare (=forma bilineare reale, simmetrica, definita positiva) $g_P : T_PS \times T_PS \to \mathbb{R}$ su ogni spazio tangente, che *dipende anch'esso in modo* C^k *dal punto* P: ciò significa che per ogni carta locale $\phi : U \to S$ con coordinate (x_i), le funzioni $g_{ij} = g(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j})$ sono delle funzioni C^k su U.
Ogni sottovarietà di $S \subset \mathbb{R}^n$ è dotata in modo naturale di una struttura di varietà riemanniana: infatti, ogni spazio tangente T_PS, in quanto sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$, possiede un prodotto scalare che ̀la restrizione a T_PS del prodotto scalare euclideo $\cdot$; nel caso di una sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$ tale forma bilineare si indica con $I_P^S(\cdot,\cdot)$ – per distinguerla dal prodotto scalare $\cdot$, definito su tutto $\mathbb{R}^n$. Qualora la sottovarietà o il punto in cui si calcola il prodotto siano evidenti dal contesto, si scrive più brevemente $I^S(u, v)$ o anche $I(u, v)$; tale forma è chiamata (pomposamente) la *prima forma fondamentale di* S. [1]

Nota: nessuno ci vieta di considerare su una sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$ delle metriche diverse da quella ottenuta per restrizione del prodotto scalare euclideo. Ma, come spiegato sopra, una metrica g su S influenza le misure e la forma di S: ebbene, forma e misure delle sottovarietà dello spazio ordinario, così come le percepiamo, corrispondono proprio alla metrica restrizione $I(\cdot,\cdot)$.

Ogni varietà differenziabile S ammette una struttura riemanniana (anzi, infinite!), come spiega il prossimo teorema anzi infinite: fissarne una vuol dire fissare una forma precisa per S.

Teorema 4.1.2 Ogni varietà differenziabile S ha una struttura riemanniana.

Dimostrazione. Un modo di costruire una metrica riemanniana (C^k) su una varietà differenziabile (C^k) astratta S è il seguente:
– si copre S con carte locali $\phi_\alpha : U_k \subset \mathbb{R}^n \to V_k = \phi_k(U_k) \subset S$, e se ne selezionano eventualmente solo una parte in modo che il ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_k\}$ sia localmente finito (S è paracompatta!);
– su ogni aperto $V_k \subset S$ si definisce una metrica g_k imponendo $g_k(\frac{\phi_k}{\partial x_i}, \frac{\phi_k}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$ (cioè trasportando la metrica standard di $\mathbb{R}^n$ su V_k tramite $d\phi_k$).

[1] La differenza principale tra $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ e (S, I^S) è che il dominio di definizione di $I_P^S(\cdot,\cdot)$ varia da punto a punto, mentre per $\cdot$ può essere considerato sempre lo stesso, per via dell'identificazione $T_P\mathbb{R}^n \cong T_Q\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ stesso.

Chiaramente, in un punto $P \in V_h \cap V_k$ con $h \neq k$, la metrica g_h su $T_P S$ non coinciderà in genere con g_k. Per amalgamarle in un'unica metrica ben definita si prende allora una partizione dell' unità (λ_k) subordinata al ricoprimento $\mathcal{V}$, come visto nel capitolo 2.3, e si definisce

$$g(u,v) = \sum_k \lambda_k(P) g_k(u,v) \qquad \text{per } u, v \in T_P S$$

Si noti che per ogni P la somma è finita. È immediato verificare che g è un prodotto scalare, e che è g è C^k.□

Proposizione 4.1.3 (Matrice della prima forma fondamentale)
Sia (S,g) una varietà riemanniana di dimensione n e $\phi : U \to S$ una carta locale con coordinate (x_i) intorno a $P \in S$. Se $\mathcal{B}$ è la base di $T_P S$ data da $\{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \phi}{\partial x_n}\}$, la matrice che rappresenta $g(\cdot,\cdot)$ nella base $\mathcal{B}$ è $[g]^{\mathcal{B}} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)$, ed è detta *matrice di g nelle coordinate* (x_i) (o *nella carta ϕ*) ; quando le coordinate sono chiare dal contesto, essa è denotata per comodità $[g]^{\phi}$ o $[g]^{(x_i)}$.
Per una superficie $S \subset \mathbb{R}^n$ con coordinate locali (x_1, x_2) rispetto ad una carta ϕ, la matrice suole scriversi:

$$[I]^{(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

dove $E = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$, $F = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$ e $G = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$.

Nota: è comune usare, per la prima forma fondamentale di S nelle coordinate x_1, x_2, la notazione $ds^2 = Edx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$. Questo significa [2]:

$$I(v,v) = Ev_1^2 + 2Fv_1v_2 + Gv_2^2 \qquad \text{se } v = v_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \in T_P S$$

♡ **Esercizio 4.1.4** Si prenda un atlante per ciascuna delle quadriche in forma canonica, per il toro e per l'elicoide; quindi si calcoli la matrice della prima forma fondamentale di tali superfici nelle varie carte locali dell'atlante scelto.

Un fatto caratteristico delle varietà riemanniane è (S,g) che la metrica riemanniana g permette di passare agevolmente da vettori $v \in T_P S$ a elementi dello spazio vettoriale duale $T_P^* S$, cioè a funzionali $v^\flat : T_P S \to \mathbb{R}$, come spiegato dal seguente Lemma di algebra lineare (appliato a $V = T_P S$):

Proposizione 4.1.5 (Isomorfismi musicali)
Sia (V,g) spazio euclideo. L'applicazione $\flat : V \to V^*$ definita da $v^\flat(u) = g(u,v)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, detto *isomorfismo musicale*; l'isomorfismo inverso è denotato $\sharp$.

Nota: se $\mathcal{B} = (b_i)$ è una base ortonormale, allora gli elementi della base duale sono $b_i^* = b_i^\flat$; ma questo *non è vero* se la base $\mathcal{B}$ non è ortonormale.

[2]Prendiamo questo per ora come una notazione formale; nel foglio sul linguaggi delle forme differenziali, verrà spiegato il significato matematico preciso dei "$dx_i dx_j$".

Dimostrazione.
Poiché g è non degenere, si ha $v^\flat(u) = g(v,u) = 0 \; \forall u$ se e solo se $v = 0$; quindi $\flat$ è iniettiva e, dal momento che $dim(V) = dim(V^*)$, $\flat$ è un isomorfismo.$\square$

Questo fatto è fondamentale perché permette di trasformare *campi vettoriali* in 1-*forme differenziali su* S [3]. Studieremo più in là le forme differenziali in tutta la loro generalità: per il momento ci basti sapere che una 1-forma differenziale (di classe C^k) su una varietà differenziabile S è un'applicazione $\omega : TS \to \mathbb{R}$ (di classe C^k), la cui restrizione a ogni spazio tangente T_PS è lineare (dunque $\omega_P := \omega|_{T_PS} \in T^*_PS$). Quindi, su una varietà riemanniana, ad ogni campo vettoriale V su S si può associare univocamente una 1-forma $\omega = V^\flat$ e, viceversa, ad ogni 1-forma ω corrisponde un unico campo vettoriale $V = \omega^\sharp$.

Nel seguito, ci interesseremo quasi unicamente alle sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ e alla loro naturale struttura riemanniana. Indicheremo però, volta per volta, quali risultati restano validi nell'ambito delle varietà riemanniane astratte.

[3] E, più in generale, è alla base del procedimento di "abbassamento" e "innalzamento" di indici per tensori più complicati.

4.2 Derivazione su varietà riemanniane di $\mathbb{R}^n$

Lo scopo di questo foglio e del prossimo è di mostrare come la struttura riemanniana di una sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$ permette di introdurre su S una nozione di *derivazione intrinseca*, con proprietà del tutto simili a quelle delle derivate dei campi di $\mathbb{R}^n$; ciò mostra che il calcolo differenziale usuale è solo un caso particolare [4] di un calcolo differenziale che esiste su ogni spazio con una struttura riemanniana, curvo o meno.

Definizione 4.2.1 (Derivata riemanniana)
Sia $V : S \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale tangente ad una sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$.
La *derivata riemanniana* (detta più propriamente *connessione di Levi-Civita*) di V nella direzione $u \in T_P S$ è

$$D_u^S V = (D_u V)^\top$$

dove $^\top$ indica la proiezione ortogonale sullo spazio tangente $T_p S$.
Se U, V sono due campi tangenti ad S, si può considerare il campo $D_U^S V$: questo, per definizione, è ancora un campo *tangente* ad S (al contrario di $D_U V$).
Spesso, se $\frac{\partial}{\partial x_i}$ è un campo coordinato rispetto a una carta locale ϕ, con coordinate (x_i), scriveremo per semplicità $D_{x_i} V$ e $D_{x_i}^S V$ al posto di $D_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V$, $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V$.

La derivata riemanniana D^S così definita (che chiameremo spesso *derivata intrinseca* di S, in contrapposizione con la *derivata euclidea* D) risolve i due problemi discussi nel cap. 1.6, relativi alla derivazione di campi vettoriali su una varietà differenziabile astratta S:

(a) si ha $D_u^S V$ *tangente ad* S, per u e V tangenti ad S;

(b) se (x_i) sono coordinate locali per S con matrice della I forma uguale a (g_{ij}), *la derivata* $D_u^S V$ *è calcolabile senza "fuoriuscire" da* S, in funzione cioè esclusivamente delle componenti $(u_i), (V_i)$ di u, V nella carta locale, delle funzioni g_{ij} e delle loro derivate rispetto alle coordinate locali (x_i). Un "abitante" di S sarebbe quindi perfettamente in grado di calcolare $D_u^S V$ senza usare il trasporto parallelo euclideo, ma usando esclusivamente i dati in suo possesso.
Mentre la proprietà (a) è vera per definizione, la proprietà (b) è un risultato profondo, dovuto a Gauss e precisato da Riemann nel suo fondamentale lavoro di abilitazione "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria"; Riemann fu in effetti il primo a esplorare in modo sistematico la geometria *intrinseca* delle superfici ed ad accorgersi che esse possiedono un loro calcolo infinitesimale.
Per dimostrare (b), cominciamo a precisare alcune proprietà più o meno evidenti di D^S, che seguono dalle corrispondenti proprietà di D.

[4] E nemmeno il pù naturale, se si pensa che gli oggetti "curvi" sono ben più comuni, in matematica e nelle applicazioni alla fisica e all'ingegneria, di quelli "piatti".

Proposizione 4.2.2 (Proprietà della derivata Riemanniana)
(i) $(D^S_U V)(P)$ dipende solo da $U(P)$ e dal valore di V in un intorno di P (ciò si enuncia dicendo: $D^S_U V$ dipende *puntualmente* da U e *localmente* da V);
(ii) come per la derivata D di $\mathbb{R}^n$, *per campi tangenti* U, V, Z *as* S valgono:

$$D^S_{a_1U_1+a_2U_2}V = a_1 D^S_{U_1}V + a_2 D^S_{U_2}V \quad (1)$$

$$D^S_U(a_1V_1 + a_2V_2) = a_1 D^S_U V_1 + a_2 D^S_U V_2 \quad (2)$$

$$D^S_{fU}V = f D^S_U V \quad (3)$$

$$D^S_U(fV) = f D^S_U V + U[f]V \quad (4)$$

$$Z[U \cdot V] = D^S_Z U \ \cdot V + U \cdot D^S_Z V \quad (5)$$

(iii) vale inoltre (poiché $D_U V - D_V U = [U, V]$ ed $[U, V]$ è tangente):

$$D^S_U V - D^S_V U = [U, V] \quad (6)$$

Se indichiamo con $\mathcal{T}S$ lo spazio vettoriale (di dimensione infinita) dei campi (C^∞) tangenti ad S, la derivazione riemanniana può essere vista come un'applicazione

$$D^S_{\cdot}\cdot : \mathcal{T}S \times \mathcal{T}S \to \mathcal{T}S$$

lineare in entrambi gli argomenti, puntuale nel primo, e locale nel secondo; questo operatore di derivazione [5] è noto come *connessione di Levi Civita di S*.

Teorema 4.2.3 (Derivata riemanniana in coordinate locali)
Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ sottovarietà, e siano X, Y, Z campi tangenti intorno a P. Allora:
$D^S_X Y \cdot Z = \frac{1}{2}\Big\{\Big(X[Y \cdot Z] + Y[Z \cdot X] - Z[X \cdot Y]\Big) - \Big([X, Z] \cdot Y + [Y, Z] \cdot X - [X, Y] \cdot Z\Big)\Big\}$
Se ϕ è una carta con coordinate (x_i), per i campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x_i}$ si ha dunque:

$$D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\Big\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right] - \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\Big\}.$$

Attenzione a interpretare bene le formule:

– le parentesi quadre in $X[Y \cdot Z]$ significano tutt'altro dalle parentesi quadre in $[X, Z] \cdot Y$: le prime indicano che si sta derivando la funzione *$Y \cdot Z$ rispetto a X, mentre le seconde indicano il bracket di due campi vettoriali;*

– nell'espressione $D^S_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$ non c'è ambiguità tra quale operazione vada eseguita prima (dunque non c'è bisogno di parentesi): $D^S_{x_i}$ indica la derivata di un campo vettoriale*, dunque va applicata al campo $\frac{\partial}{\partial x_j}$, e non può essere applicato alla* funzione *$\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$.*

Il teorema precedente è già sufficiente a giustificare qualitativamente il risultato **(b)** di Riemann: difatti, conoscere $D^S_X Y$ equivale a conoscere $D^S_X Y \cdot Z$ per ogni campo tangente Z, e questo si calcola, grazie alla prima formula del teorema, in funzione dei bracket dei campi X, Y, Z, dei prodotti scalari tra essi e delle derivate direzionali di tali prodotti; in ultima analisi, dunque, prese coordinate (x_i) su S, la derivata $D^S_X Y$ si esprime in funzione delle componenti $(X_i), (Y_i), (Z_i)$ di X, Y, Z su tali coordinate, dei coefficienti (g_{ij}) della metrica e delle derivate prime di $(X_i), (Y_i), (Z_i)$ e (g_{ij}) rispetto alle (x_i).

[5] Algebricamente, $\mathcal{T}S$ è un modulo sull'algebra delle funzioni $C^\infty(S)$; se si fissa la prima variabile $U \in \mathcal{T}S$ e si considera $D^S_U : \mathcal{T}S \to \mathcal{T}S$, si ottiene un *operatore differenziale lineare*, cioè un *operatore* (applicazione lineare) definito tramite le derivate del suo argomento V; inoltre, poiché esso verifica la proprietà di Leibnitz (4), D^S_U si dice una *derivazione* su $\mathcal{T}S$.

Una formula esplicita per $D^S_X Y$ in termini dei coefficienti della I forma fondamentale e delle coordinate locali della direzione e del campo da derivare è fornita dal seguente corollario:

Corollario 4.2.4 (Formula esplicita per $D^S_u V$)
Chiamiamo $[I]^\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = (g_{ij}),\ ([I]^\phi)^{-1} = (g^{ij})$ e $d^i_{jk} = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$; se $V \equiv (V_j)_{j=1,\dots,d}$ su ϕ, un'espressione esplicita per le coordinate di $D^S_u V$ su ϕ è data allora da:

$$D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \omega^i\right) \begin{pmatrix} V_1 \\ \cdots \\ V_d \end{pmatrix} \tag{7}$$

dove ω^i è la matrice che ha coefficiente (j,k) uguale a $\omega^i_{jk} = \sum_l g^{jl} d^i_{kl}$, mentre $\frac{\partial}{\partial x_i}$ opera sul vettore $(V_j)_{j=1,\dots,d}$ componente per componente.

Dimostrazione del Teorema 4.2.3.
Per le proprietà (5) abbiamo:

$$\begin{aligned} X[Y \cdot Z] &= D^S_X Y \cdot Z \,+\, Y \cdot D^S_X Z \\ Y[Z \cdot X] &= D^S_Y Z \cdot X \,+\, Z \cdot D^S_Y X \\ Z[X \cdot Y] &= D^S_Z X \cdot Y \,+\, X \cdot D^S_Z Y \end{aligned}$$

dunque

$$X[Y\cdot Z]+Y[Z\cdot X]-Z[X\cdot Y] = X\cdot(D^S_Y Z - D^S_Z Y) + Y\cdot(D^S_X Z - D^S_Z X) + Z\cdot(D^S_X Y + D^S_Y X)$$

e per la relazione di commutatività (6) otteniamo

$$X[Y \cdot Z] + Y[Z \cdot X] - Z[X \cdot Y] = X \cdot [Y,Z] + Y \cdot [X,Z] - Z \cdot [X,Y] + 2Z \cdot D^S_X Y$$

da cui la prima formula. La seconda formula è uguale alla prima, applicata ai campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x_i}$, che commutano tra loro.□

Per dimostrare il Corollario (e per futuri calcoli) premettiamo un utile risultato algebrico. Sia (V,g) uno spazio euclideo e $\mathcal{B} = (b_i)$ una base: dato $v \in V$ qualsiasi, se conosciamo $g(v,b_i)\,\forall i$, allora chiaramente possiamo ricostruire il vettore v (in quanto conosciamo $g(v,u)$ per ogni u, e dunque le coordinate di v su una qualsiasi base ortonormale). Il seguente lemma dice come recuperare esplicitamente v in funzione dei $g(v,b_i)$:

Lemma 4.2.5 Sia (V,g) spazio euclideo, $\mathcal{B} = (b_i)$ una base di V, e $[g]_\mathcal{B} = (g_{ij})$ la matrice di g nella base $\mathcal{B}$. Allora: $[v]_\mathcal{B} = [g]_\mathcal{B}^{-1}\,(g(v,b_j))_{j=1,..,n}$.
Ovvero, se $[v]_\mathcal{B} = (v_i)$, sempre in notazione di Einstein: $v_i = g^{ij} g(v,b_j)$.

Dimostrazione del Lemma 4.2.5.
Scrivendo i vettori in colonna, si ha:

$$(g(b_1,v)\cdots g(b_n,v))^t = ([b_1]_\mathcal{B}\cdots[b_n]_\mathcal{B})^t\,[g]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B} = I_n[g]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B} = [g]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B}$$

da cui $[v]_\mathcal{B} = [g]_\mathcal{B}^{-1}\,(g(b_j,v))_{j=1,..,n}$.□

Dimostrazione del Corollario 4.2.4.
Osserviamo che il vettore $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V$ soddisfa:

$$\left(D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_l V_l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l \left(\frac{\partial V_l}{\partial x_i} g_{lk} + V_l d^i_{lk}\right)$$

ed usando il Lemma 4.2.5 troviamo la coordinata j-ma di $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V$ nella carta ϕ:

$$(D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} V)_j = \sum_{l,k} g^{jk} \left[\frac{\partial V_l}{\partial x_i} g_{lk} + V_l d^i_{lk}\right] = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \sum_l \omega^i_{jl} V_l \quad \square$$

Il seguente enunciato chiarisce ancora meglio l'osservazione di Riemann riguardo alla dipendenza della derivazione D^S dalla struttura riemanniana:

Corollario 4.2.6 (Varietà isometriche hanno la stessa derivazione)
Sia $F : S \to S'$ un'isometria tra sottovarietà, siano U e V campi tangenti ad S, e siano $U' = dF(U)$ e $V' = dF(V)$ i corrispondenti campi su S'. Allora:

$$D^{S'}_{U'} V' = dF(D^S_U V)$$

Dimostrazione.
Sia ϕ una carta per S con coordinate locali (x_i), e sia $\phi' = F \circ \phi$ la carta corrispondente su S' con coordinate (x'_i). Sarà sufficiente mostrare che

$$\left[D^{S'}_{U'} V' - df(D^S_U V)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} = 0 \quad \text{per ogni } k$$

Poiché $\frac{\partial}{\partial x'_k} = dF(\frac{\partial}{\partial x_k})$ ed F è un'isometria, ciò è equivalente a mostrare che

$$\left(D^{S'}_{U'} V' \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k}\right)(F(P)) = \left(D^S_U V \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right)(P) \quad \text{per ogni } k$$

Siano $U = \sum_i u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $V = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, siano $U' = \sum_i u'_i \frac{\partial}{\partial x'_i}$, $V' = \sum_i v'_i \frac{\partial}{\partial x'_i}$, ed eseguiamo il calcolo:

$$D^{S'}_{U'} V' = \sum_{i,j} u'_i D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x'_i}} \left(v'_j \frac{\partial}{\partial x'_j}\right) = \sum_{i,j} u'_i v'_j \left(D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x'_i}} \frac{\partial}{\partial x'_j}\right) + \sum_{i,j} u'_i \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x'_i}\right) \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

Ma $u_i = u'_i \circ F$, $v_j = v'_j \circ F$ e $\frac{\partial}{\partial x'_k} = dF(\frac{\partial}{\partial x_k})$ dunque $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(P) = \frac{\partial v'_j}{\partial x'_i}(F(P))$, mentre per il Corollario 4.2.4 abbiamo $D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x'_i}} \frac{\partial}{\partial x'_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$; dunque

$$D^{S'}_{U'} V' \cdot \frac{\partial}{\partial x'_k} \bigg|_{F(P)} = \sum_{i,j} u_i v_j \left(D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \Bigg|_P + \sum_{i,j} u_i \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \Bigg|_P = D^S_U V \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \bigg|_P \quad \square$$

Quanto visto in questo capitolo si generalizza interamente a varietà Riemanniane astratte: *ogni varietà riemanniana (S, g) ammette un'unica derivata D^S (connessione di Levi-Civita) soddisfacente le proprietà della Proposizione 4.2.2.* La dimostrazione di questo fatto è nella formula che appare nel Teorema 4.2.3: essa è infatti presa a definizione di D^S nel caso generale, e effettivamente verifica tutte le proprietà di una derivata e non dipende in alcun modo dal fatto che S sia contenuta in $\mathbb{R}^n$. L'unica differenza con le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ è che tale derivata non ha una formula sempice ed esplicita, in quanto *non è* la proiezione $D^\perp$ della derivata usuale in $\mathbb{R}^n$. I Corollari 4.2.4 e 4.2.6 e le loro dimostrazioni valgono, parola per parola, anche per varietà riemanniane astratte.

4.3 Operatori riemanniani

A partire dalla derivazione D^S si possono definire su S gli analoghi di alcuni operatori differenziali ben noti su $\mathbb{R}^n$, di interesse in analisi, fisica e ingegneria.

Definizione 4.3.1 (Operatori differenziali fondamentali)
Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ sottovarietà, ed f, V rispettivamente una funzione e un campo su S:

- il *gradiente* di f in P è il vettore $grad_P^S f := (df)^\flat \in T_P S$, dove $^\flat$ indica l'isomorfismo musicale $T_P S^* \to T_P S$; in altre parole, $grad_P^S f$ è l'unico vettore in $T_P S$ tale che $(d_P f)(v) = grad_P^S f \cdot v \ \ \forall v \in T_P S$.
- l'*hessiano* di f in P è la forma bilineare simmetrica su $T_P S$ definita da

$$(Hess_P^S f)(u, v) := D_u^S(grad^S f) \ \cdot v$$

  Notare che l'hessiano è una forma simmetrica, in quanto in ogni punto P

$$D_u^S grad^S f \ \cdot v = grad^S f \ \cdot D_u^S V + u[grad^S f \ \cdot V]$$
$$D_v^S grad^S f \ \cdot u = grad^S f \ \cdot D_v^S U + v[grad^S f \ \cdot U]$$

  e, dato che $grad^S f \cdot z = df(z)$, si ha per (6) e per quanto visto sul bracket:

$$D_u^S grad^S f \ \cdot v - D_v^S grad^S f \ \cdot u = grad_P^S f \ \cdot [U, V] - (d_P f)[U, V] = 0$$

- la *divergenza* di V in P è il numero $div_P^S V := Tr(D_\cdot^S V) = \sum_i D_{b_i}^S V \cdot b_i$, dove $\mathcal{B} = \{b_i\}$ è un base ortonormale di $T_P S$;
- il *laplaciano* di f in P è $(\Delta^S f)(P) := div^S(grad^S f)\ (P) = Tr(Hess_P^S f)$.

Nota: esiste anche una generalizzazione del concetto di *rotore* di un campo vettoriale V su S, almeno se S *è una* 3*-sottovarietà orientata* [6], definito però tramite il linguaggio delle forme differenziali, che studieremo più in là:

$$rot^S(V) := \star d\,(V^\flat)$$

dove in questa formula, d è l'operazione di differenziazione di una forma, $\flat$ e $\sharp$ sono gli isomorfismi musicali, e $\star$ è l'isomorfismo di Hodge (v. Capitolo 5).

Gradiente, hessiano e laplaciano definiscono, a partire da una funzione f ed al variare di P, rispettivamente un campo vettoriale, una forma bilineare e una funzione. Divergenza e rotore definiscono invece, a partire da un campo V, rispettivamente una funzione e un campo. Sono evidentemente operatori differenziali sugli spazi $C^\infty(S), \mathcal{T}S$, e generalizzano i corrispondenti operatori su $\mathbb{R}^n$ a uno spazio curvo qualsiasi.

Esercizio 4.3.2
Verificare che se $S = \mathbb{R}^n$ si ottengono $grad\, f$, $div\, V$, Δf ed $Hess(f)$ usuali!
Per esempio, per $S = \mathbb{R}^3$, se $V = (V_1, V_2, V_3)$ la formula per il rotore dà proprio l'usuale operatore:

$$rot(V) = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

[6] Il rotore è solo la traduzione in termini di campi vettoriali dell'operatore di differenziazione d, grazie alla possibilità, in dimensione 3, di identificare 2-forme con 1-forme tramite l'isomorfismo di Hodge. Da un punto di vista più astratto, esso è equivalente all'operatore d, formalmente più semplice, e con l'ulteriore vantaggio di poter essere definito su forme di ogni grado, invece che semplicemente su 1-forme.

Osservazioni 4.3.3 (Si tratta di operatori *riemanniani*)
(i) Questi operatori dipendono, per loro stessa definizione, dalla *struttura riemanniana di S*, tramite la derivazione riemanniana o gli isomorfismi β e $\star$. Notare che queste definizioni sono *intrinseche*, cioè non fanno uso di particolari coordinate (x_i): per questo sono valide su sottovarietà S qualsiasi.

(ii) In realtà, divergenza e rotore dipendono solo debolmente dalla struttura riemanniana, in quanto possono essere definiti a partire solo dalla possibilità di calcolare i *volumi* su S. Questo fatto sarà chiaro quando studieremo la *forma volume dS^+* di una varietà riemanniana orientata, e la sua relazione con div^S.

Osservazioni 4.3.4 (Significato di $grad^S$, $Hess^S$, Δ^S, div^S e rot^S)
È doveroso conoscere il significato fisico-geometrico di gradiente, divergenza e laplaciano, e non solo le loro definizioni. In effetti, questi operatori sono nati per descrivere problemi fisici fondamentali (elettromagnetismo, fluidodinamica, diffusione termica, onde) anche su oggetti curvi, come superfici o membrane. La formulazione precisa delle equazioni che governano i corrispondenti problemi fisici su una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ (o anche di $\mathbb{R}^n$, come nel caso della relatività generale) porta, caso per caso, a definizioni "intuitive" di questi operatori, che coincidono con gli operatori appena definiti per ogni spazio curvo S:

1. *$grad^S_P f$ (se $\neq 0$) è la direzione di T_PS lungo cui f cresce più rapidamente*; cioè, se α è una curva di S parametrizzata da l.a., con $\alpha(0) = P$ e $\alpha'(0) \parallel grad_P$, allora $f(\alpha(t) > f(\beta(t))$ per ogni altra curva β parametrizzata da l.a. passante per P (almeno per t in un intervallo $(0, \epsilon)$ abbastanza piccolo).
Si può inoltre riformulare, in modo più geometrico, la nozione di punto critico di una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ su una sottovarietà tramite il gradiente invece che df: $P \in S$ è critico per f se e solo se $grad^S_P f = 0$. Il Teorema 8.4(iii)bis ci dice allora che se $P \in S_y = f^{-1}(y)$, allora $grad^S_P f \perp T_PS_y$ (cioè, "il gradiente è sempre ortogonale agli insiemi di livello").

Nelle carte sinottiche in metereologia, le *isobare* sono le curve di livello della funzione pressione atmosferica, e il vento è un effetto [7] del gradiente di tale funzione (il *gradiente barico*). Si noti che, per scrivere un modello climatico su larga scala, non si può nelle equazioni differenziali del modello prescindere (a priori) dal fatto che la terra sia curva!

2. *l'hessiano dà un senso all'idea di "derivate seconde" di f rispetto ad u, v* anche in un punto non critico, e coincide con l'hessiano definito nel foglio precedente nei punti critici. Difatti, per quanto visto nella Proposizione 8.10, se U, V sono due qualsiasi campi tangenti tali che $U(P) = u$ e $V(P) = v$ abbiamo, in ogni punto critico P:

$$(Hess f)(u,v) = u[V \cdot grad^S f] = D^S_u V \cdot grad^S f + V(P) \cdot D^S_u grad^S f = D^S_u grad^S f \cdot v$$

[7] In realtà il vento è prodotto di molteplici effetti, tra cui la forza di Coriolis dovuta alla rotazione terrestre, che fa sì che la direzione non sia precisamente quella del gradiente barico.

3. Il laplaciano di una funzione su S ha un significato fisico fondamentale. Sia S è una superficie materiale curva elastica (resistente a tensione, ma non a flessione) in equilibrio, con campo normale N; nella *teoria delle piccole oscillazioni*, se la superficie S_t è ottenuta deformando S per mezzo di uno spostamento normale di ogni punto P di un'ampiezza $f(P,t)$ (nullo sul bordo di S) allora *la forza agente sul punto* $P_t = P + f(P,t)N \in S_t$ *è proporzionale a* $\Delta^S f$.

In effetti, l'energia potenziale U è una funzione sullo spazio (infinito dimensionale) dei profili S_t, ed è proporzionale (per la legge di elasticità di Hooke) all'incremento dell'area $A(S_t)-A(S)$; questa è approssimabile [8], nell'ipotesi di piccole oscillazioni, a $\int_S |grad\, f|^2 dS$; la forza agente sul profilo S_t (nel "punto" $f(\cdot,t)$) è allora $-grad_f U$. Questo è un "gradiente" su uno spazio infinito dimensionale, con prodotto scalare $< f,g >= \int_S fgdS$, e si calcola [9] così:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial u}(f) = \lim_{t\to\infty} \frac{U(f+tu)-U(f)}{t} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_S \left(|grad(f+tu)|^2 - |grad\, f|^2\right) dS \\ &= \int_S (gradu \cdot gradf)\, dS = \int_S \left(u\Delta^S f\right) dS =< \Delta^S f, u >\end{aligned}$$

dunque $grad_f U = \Delta f$ e pertanto la forza è $F(P,t) = -(\Delta f)(P,t)$ (cf. Arnold, *Lectures on Partial Differential Equations*, pp.57-59 per qualche dettaglio in più –ma non molti...) Poiché l'accelerazione di P_t è f_{tt}, dall'equazione della dinamica (o equivalentemente, dalla formulazione Lagrangiana delle equazioni del moto), l'equazione che regge il moto di S_t è allora l' *equazione delle onde* sulla superficie S: $f_{tt} = c\,\Delta^S f$.
Un altro problema fisico rilevante in cui entra in gioco è l'equazione delle onde $\frac{\partial f}{\partial t} = c\Delta^S f$, che regola la diffusione del calore in un corpo (piano o curvo) partendo da una configurazione di temperatura $f : S \to \mathbb{R}$.

4. $div^S_P V$ *misura la "densità di sorgente" in* P *di un flusso su* $S \subset \mathbb{R}^n$, modellizzato dalle traiettorie di un campo vettoriale V su S. Precisamente, quando studieremo l'integrazione sulle sottovarietà, introdurremo la nozione di *flusso* $\Phi(V,\partial D)$ *di un campo vettoriale attraverso il bordo* ∂D *di un dominio* D *di una sottovarietà* S; il Teorema della Divergenza mostrerà quindi che

$$div^S_P V = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\Phi(V,\partial U_\epsilon)}{vol(U_\epsilon)}$$

se U_ϵ è una famiglia di domini su S che si restringono a P per $\epsilon \to 0$.

Divergenza e Teorema della Divergenza (noto anche come Teorema del flusso di Gauss, o Teorema di Ostrogradski) sono due ingredienti fondamentali in elettromagnetismo, gravitazione, fluidodinamica, relatività generale ecc., in particolare per la formulazione (ove soddisfatta) dell'equazione di continuità: $divV = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, dove ρ è la densità del fluido che ha flusso V. Un esempio di spazio *curvo* in cui la divergenza entra in gioco è Il modello cosmologico di Robertson-Walker, in cui le galassie sono modellate come un fluido perfetto (relativistico).

5. $rot^S_P V$ *misura la "vorticità" di un flusso descritto da traiettorie di un campo* V in una 3-sottovarietà orientata S. Precisamente, nel capitolo sull'integrazione rivedremo la nozione di *circuitazione* $\mathcal{C}(V,\alpha^+)$ *di un campo vettoriale lungo una curva orientata* α^+, che è una "media" (col segno) della componente di V tangente ad α lungo la curva. Se N è un vettore unitario in S, il Teorema del Rotore mostrerà allora che la componente di $rot^S V$ lungo N è uguale a

$$rot^S_P V \cdot N = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathcal{C}(V,\partial U_\epsilon)}{area(U_\epsilon)}$$

per qualsiasi famiglia di superfici U_ϵ in S, ortogonali ad N, tali che $U_\epsilon(P) \xrightarrow{\epsilon\to 0} P$.

[8] Questo è un calcolo che potremo fare appena studiata la nozione di *area* delle sottovarietà.
[9] Questo invece richiede qualche conoscenza di calcolo differenziale sugli spazi infinito dimensionali, oltre alle formule riemanniane di "integrazione per parti" sulle sottovarietà.

Anche il rotore (e Teorema del Rotore) è una nozione fondamentale in elettromagnetismo. Per esempio, la terza legge di Maxwell si enuncia dicendo che $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, dove $\vec{E}, \vec{B}$ sono i campi elettrici e magnetici; questo significa che se il campo magnetico non è costante nel tempo, $\vec{E}$ ha dei "vortici"; precisamente, sempre per il Teorema del Rotore, la circuitazione di $\vec{E}$ lungo certe linee chiuse, ortogonali a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, è non nulla.
La formulazione dell'elettromagnetismo in relatività generale porta invece naturalmente a considerare il rotore su spazi curvi (più precisamente: l'operatore d, equivalente del rotore sulle forme differenziali): le equazioni di Maxwell in tale contesto prendono la forma

$$dF = 0 \quad d{*}F = J$$

dove F è la 2-*forma di Faraday*, che ingloba in un unico oggetto matematico campo elettrico e magnetico, J è una 3-forma che rappresenta la densità di corrente e $* : \Omega^2(S) \to \Omega^2(S)$ è un "operatore di Hodge" analogo a $\star$, agente però sulle 2-forme di S.

Questi operatori sono stati definiti in maniera intrinseca, senza riferimento a coordinate locali (di cui si fa largo uso in fisica), né alle coordinate di $\mathbb{R}^n$. In effetti, tali definizioni valgono su una varietà riemanniana astratta qualsiasi! Il calcolo, per sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$ si può fare essenzialmente in due modi:

– *intrinseco*, cioè tramite carte locali, come spiegato qui di seguito per $grad^S f$ (ogni operatore ha una sua formula, spesso complicata, in coordinate locali).

– *estrinseco*, cioè estendendo f, V ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, quindi calcolando D^S tramite la derivata D usuale e poi proiettando sul tangente ad S;
L'unica differenza tra questi operatori su una varietà riemanniana astratta e gli stessi operatori su una sottovarietà $S \subset \mathbb{R}^n$ è che, per varietà astratte, solo la prima delle due opzioni è disponibile.
Per esempio, usando le formule esplicite di derivazione del Corollario 4.2.4 ed il Lemma 4.2.5 si possono ottenere le seguenti formule che esprimono div^S e Δ^S in coordinate locali:

$$div^S V = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} V^k \;+\; \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{det(g_{ij})}\right) V^k \tag{8}$$

$$\Delta^S f = \sum_{h,k} g^{hk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \;+\; \frac{1}{\sqrt{det(g_{ij})}} \sum_{h,k} \frac{\partial}{\partial x_h}\left(g^{hk}\sqrt{det(g_{ij})}\right) \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{9}$$

Le formule esplicite non dicono un granché[10] ma mostrano il fatto fondamentale che questi operatori si esprimono, come la derivata di Levi Civita, in funzione della matrice (g_{ij}), di f o delle componenti (V_i), e delle loro derivate.

Per essere sicuri di aver capito queste definizioni e di saperle usare, è *essenziale* scoprire se siamo capaci di calcolarli esplicitamente in alcuni esempi concreti. Un esempio computazionalmente più semplice delle formule per div^S e Δ^S è dato dal prossimo esercizio, in cui mostreremo come calcolare il gradiente di una funzione in coordinate locali:

[10] Più che le formule stesse, è importante capire il metodo per ricavarle, simile a (7):

1. div, $Hess$ e Δ sono tutti definiti in termini delle derivate covarianti $D^S_{x_i} V$ di un certo campo vettoriale V;
2. V si può scrivere come $V = \sum_j V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, dunque $D^S_{x_i} V = \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + V_j D^S_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$;
3. i vettori $D^S_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ si ricavano in funzione dei prodotti scalari $d_{ijk} = D^S_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$ e della matrice (g^{ij}), come spiegato nel Lemma 4.2.5.

Esercizio 4.3.5 (Gradiente in coordinate locali)
Sia $f : S \to \mathbb{R}$ almeno C^2, e sia ϕ una carta con coordinate $(x_i)_{i=1,\dots,d}$.
(i) supponiamo che i campi coordinati $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ siano ovunque una base ortogonale: allora

$$grad^S\, f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \Big/ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right|^2$$

Notare la differenza col gradiente in $\mathbb{R}^n$, in cui non c'è bisogno di dividere per $\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^2$, essendo i campi coordinati già unitari (e ortogonali).

(ii) Supponiamo ora che i campi coordinati $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ non siano ortogonali; allora

$$grad^S\, f = \sum_i U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} U_1 \\ \cdots \\ U_d \end{pmatrix} = [I]^{-1}_{(x_i)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

Denotando $(g_{ij}) = [I]_\phi$ e chiamando (g^{ij}) la matrice inversa, possiamo usare la notazione di Einstein per le sommatorie e scrivere, in maniera equivalente: $grad\, f \equiv (U_i) = (g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j})$.

Soluzione dell' Esercizio 4.3.5.
(i) Chiamiamo $\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|}$ i campi coordinati normalizzati, che così formano una base ortonormale. Il calcolo delle coordinate di $grad^S\, f$ su questa nuova base è immediato per la formula di Fourier; esse sono date da

$$(grad^S\, f)\cdot \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} = df\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right) = \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

dunque

$$grad^S\, f = \sum_i \left(grad^S f \cdot \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\right\|^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{10}$$

(ii) Se ora la base $\mathcal{B} = \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ non è più ortogonale, abbiamo sempre $(grad^S\, f)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, ma non possiamo usare la formula di Fourier (10) per ricostruire $grad^S\, f$ a partire da questi coefficienti. Abbiamo però il Lemma 4.2.5 che implica $[grad^S\, f]_{\mathcal{B}} = [I]^{-1}_\phi \left(grad^S\, f \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{j=1,..,n}$.□

Esercizio 4.3.6 (Relazioni con gli operatori di $\mathbb{R}^3$)
Consideriamo una funzione e un campo su una sottovarietà S, ottenuti per restrizione di una funzione f e di un campo V definiti su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
(i) Mostrare con esempi che $grad^S\, f \neq grad\, f$, $\Delta^S\, f \neq \Delta\, f$, $div^S\, V \neq div\, V$;
(ii) Mostrare che se f e V sono costanti sulle rette normali ad S, allora effettivamente $grad^S\, f = grad\, f$, $\Delta^S\, f = \Delta\, f$ e $div^S\, V = div\, V$.

Esercizio 4.3.7 Consideriamo le seguenti funzioni sulla sfera canonica S^2:
$f(P) = z$ $\qquad g(P) = x^2 + y^2$ $\qquad h(P) = x + y + z$
$k(P) =$ lunghezza del meridiano che collega P al polo nord n
$l(P) =$ lunghezza del parallelo più corto che collega P al piano oxz

(i) calcolarne il gradiente in ogni punto $P = (x, y, z)$;
(ii) calcolarne l'hessiano nei punti critici, e calcolare massimi e minimi;
(iii) Calcolare gradiente ed hessiano per una funzione f su S^2, espressa come:
– $f(\vartheta, \phi)$, cioè nelle *coordinate sferiche* usuali (ove ben definite);
– $f(\vartheta, z)$, cioè nelle *coordinate cilindriche* della sfera (ove ben definite).

Esercizio 4.3.8 (Laplaciano di $\mathbb{R}^3$ in coordinate locali diverse)
Sia $S = \mathbb{R}^3$, e sia P un punto vicino al quale la parametrizzazione $\phi(r, \varphi, \vartheta)$ di $\mathbb{R}^3$ in *coordinate sferiche* è una carta locale (scriverla, per $\vartheta =$ latitudine):

(i) trovare la matrice M_P del cambio di coordinate dalla base $\mathcal{S} = \{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}\}$ alla base canonica $\mathcal{S} = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ su $T_P S$;

(M_P esprime i campi -o operatori di derivazione– $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ in funzione dei campi $\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$)

(ii) usare il punto precedente per esprimere $div\, f$, Δf in funzione di $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ per ogni campo $V = (V_1, V_2, V_3)$ ed ogni funzione f su S, partendo dall'espressione ben nota di $div\, V$ e Δf nelle coordinate canoniche x, y, z;

(iii) scrivere la matrice (g_{ij}) di I^S nella carta ϕ, e verificare che le espressioni date da (8) e (9) coincidono con quanto appena trovato.

Ripetere l'esercizio per la parametrizzazione di $S = \mathbb{R}^3$ in coordinate cilindriche (ove ben definita).

Il laplaciano viene : $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(cos\vartheta\, \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.

Esercizio 4.3.9 (Laplaciano sulla sfera)
Consideriamo la sfera canonica S^2 di centro O e raggio unitario in $\mathbb{R}^3$.

(i) Per ogni $f : S^2 \to \mathbb{R}$, sia $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ definita come $F(P) = f(P/|P|)$. Dimostrare che $grad^{S^2} f = gradF$ e $\Delta^{S^2} f = \Delta F$;

(ii) Applicare le formule trovate in (ii) dell'esercizio 4.3.6 a $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ costante su ogni raggio uscente da O, per dedurre l'espressione di $\Delta^{S^2} f$;

(iii) verificare che l'espressione coincide con quella data dalla formula (9).

(iv) Mostrare che se $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}$ è una funzione positivamente omogenea di grado d (cioè $F(\lambda P) = \lambda^d F(P)$ per ogni $\lambda > 0$), allora:

$$\Delta F\left(\frac{P}{|P|}\right) = -d(1+d)F\left(\frac{P}{|P|}\right) + \frac{1}{|P|^{d-2}}\Delta F(P)$$

Un autovettore dell'operatore $\Delta^{S^2} : C^\infty(S) \to C^\infty(S)$ (una funzione f su S, cioè, di classe C^∞ con tutte le sue derivate seconde, tale che $\Delta^{S^2} f = \lambda f$) è detta un'*armonica sferica*; se $\Delta^{S^2} f = 0$ f la funzione f si dice in particolare una *funzione armonica* su S^2.

(v) Dedurre da (iv) che se F è un polinomio omogeno in x_1, x_2, x_3 di grado d *armonico* (cioè $\Delta F = 0$), allora $f = F|_{S^2}$ è un'armonica sferica.

Nota: viceversa, è possibile mostrare che *ogni* armonica sferica è la restrizione ad S^2 di un polinomio omogeneo armonico. Quindi gli autovalori di Δ^{S^2} sono la sequenza di numeri interi $\{-d(1+d)\}$ (detti *frequenze fondamentali*), ed è possibile elencare tutte le armoniche sferiche calcolando i polinomi omogenei armonici in x_1, x_2, x_3 di ogni grado (provare a trovarne una base, ricorsivamente, fino al grado 3). Quali sono allora le funzioni armoniche sulla sfera[11]?

[11]Solo le costanti! Notare la differenza con le funzioni armoniche nel piano $\mathbb{R}^2$: in quel caso, le funzioni armoniche sono moltissime, tanto che il problema di Dirichlet su un dominio D con frontiera regolare (trovare cioè f su D con $\Delta f = 0$ e $f|_D$ fissata) ha sempre soluzione.

Una base dello spazio delle armoniche sferiche di ogni grado d fissato (i.e. dell'autospazio di Δ^{S^2} relativo a $\lambda = -d(d+1)$) è dato dalle funzioni $f_{k,d}$, restrizione di polinomi di grado d, così espresse in coordinate sferiche s, ϑ (=longitudine, latitudine):

$$f_{k,d}(s,\vartheta) = e^{iks} P_{k,d}(\sin\vartheta)$$

al variare di $k \in \mathbb{Z}$, dove $P_{k,d}(X) = (1-X^2)^{k/2} \frac{\partial^{k+d}}{\partial X^{k+d}} (X^2-1)^d$ sono i "*polinomi* generalizzati" *di Legendre* (dei veri polinomi solo per k pari). Scriverle almeno fino a $d = 2$.

Le armoniche sferiche, analogamente alle funzioni $\sin(\frac{kx}{2\pi})$ e $\cos(\frac{kx}{2\pi})$ per le funzioni periodiche su $[0,1]$ (ovvero su S^1) sono il fondamento dell'*analisi armonica* sulla sfera. È possibile mostrare che le $f_{n,d}$ costituiscono un *sistema ortogonale completo* per $C^\infty(S^2)$ (ed $L^2(S)$): le $f_{n,d}$ sono cioè ortogonali (rispetto al prodotto $f \cdot g = \int_{S^2} f\bar{g}\, dS^2$), e generano un sottospazio denso in $C^\infty(S^2)$. Ogni funzione $f \in C^\infty(S^2)$ può allora essere sviluppata in *serie di Fourier* $f = \sum_n c_{n,k}(f) f_{n,k}$, convergente uniformemente ad f (in norma L^2 se $f \in L^2(S)$). Lo sviluppo di funzioni su S^2 in armoniche sferiche ha un numero enorme di applicazioni in fisica (descrizione dei campi gravitazionali dei corpi celesti, descrizione delle orbite degli eletrroni in meccanica quantistica ecc.) e nel campo dell'analisi delle immagini (rendering di oggetti 3d, riconoscimento forme ecc.)

Per le *funzioni armoniche su una sottovarietà* S (i.e. $\Delta^S f = 0$) valgono le stesse proprietà che valgono per le funzioni armoniche nel piano, come il Teorema del Massimo (il massimo di f su un sottoinsieme compatto K di S è sempre assunto sulla frontiera di K), il Teorema della Media (il valore $f(P)$ è uguale alla media di f su qualsiasi sfera –geodetica– di S centrata in P) ecc.
Questi risultati permettono di provare facilmente, per esempio, che ogni funzione armonica su S^2 è costante (come?). La dimostrazione completa di tali risultati ci porterebbe però troppo lontano...