5.4 Il significato intrinseco della curvatura gaussiana e il Teorema Egregium di Gauss

Sappiamo che tutte le caratteristiche di una superficie S definite a partire dalla prima forma fondamentale (distanza intrinseca, aree, angoli, geodetiche, derivata riemanniana ecc.) sono invarianti *intrinseci*, cioè invarianti per isometrie, in quanto ogni isometria di superfici preserva la prima forma fondamentale. D'altra parte, si è detto che (cf. discussione dopo la Proposizione 5.1.6), invece, le caratteristiche di una superficie S definite a partire dall'operatore forma (curvature principali, curvatura media, gaussiana) sono invarianti *estrinseci* della superficie, cioè invarianti per congruenze, ma non, generalmente, per isometrie. In particolare la curvatura gaussiana, che è il determinante dell'operatore forma, dà informazioni importanti sulla forma di S localmente, ed è invariante per congruenze. Una notevole scoperta, dovuta a Gauss, è che la curvatura gaussiana è un invariante intrinseco delle superfici (nonostante essa sia definita tramite l'operatore forma):

Teorema Egregium 5.4.1
La curvatura gaussiana è invariante per isometrie.
Cioè, se $F : S \to S'$ è un'isometria di superfici, allora $K_{S'}(F(P)) = K_S(P)$.

Lo scopo del presente capitolo è dimostrare di questo teorema. La dimostrazione usuale consiste nel partire la formula (dimostrata nel §2) $K_S = \frac{ln-m^2}{EG-F^2}$ e mostrare, con un certo numero di calcoli, che la funzione $ln - m^2$ si esprime anch'essa in funzione di E, F, G, cf. per es. il libro di Pressley o di O'Neill.

Ciononostante, questo approccio "computazionale" nasconde il significato geometrico profondo della dipendenza di K_S dalla prima forma fondamentale. Per questo prenderemo una strada (solo apparentemente) più lunga, e mostreremo che K_S *è legato al difetto di commutazione delle derivate riemanniane su uno spazio curvo.*

♡ **Esercizio 5.4.2 (Su spazi curvi $D_U D_V \neq D_V D_U$)**
(i) Siano U, V, Z campi coordinati su $\mathbb{R}^n$; verificare che $D_U D_V Z = D_V D_U Z$.
(ii) Sia $S = S^2$: trovare campi coordinati U, V e un campo tangente Z tali che $D^S_U D^S_V Z \neq D^S_V D^S_U Z$.

Suggerimento: considerare i campi $U = \frac{\partial}{\partial s}$ e $V = Z = \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ (dove s =longitudine, ϑ =latitudine) e mostrare *geometricamente* (cioè senza calcoli in coordinate!) che in ogni punto $P \neq N, S$ si ha $D^S_{\frac{\partial}{\partial s}} D^S_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0$, mentre $D^S_{\frac{\partial}{\partial \vartheta}} D^S_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \cos\vartheta \widehat{\frac{\partial}{\partial s}}$, con $\widehat{\frac{\partial}{\partial s}}$ = versore tangente al parallelo. Verificare poi il risultato esprimendo $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ in coordinate e facendo i calcoli espliciti.

Nota 5.4.3 *Non confondere la nozione di "commutatività di campi U, V" con la nozione di "commutatività delle derivate D^S_U, D^S_V".* La prima significa che $D^S_U V = D^S_V U$ (il significato geometrico è stato spiegato nel Foglio 7), la seconda significa che le derivazioni $D^S_U D^S_V = D^S_V D^S_U$, applicate a qualsiasi altro campo Z. Se U, V sono campi coordinati (e.g. $U = \frac{\partial}{\partial s}$ e $V = Z = \frac{\partial}{\partial \vartheta}$ su S^2), essi commutano sempre; mentre le derivazioni rispetto a U, V in generale no (a meno che S non sia isometrica ad $\mathbb{R}^n$).

È abbastanza comune dover derivare i campi almeno due volte in problemi di analisi e in geometria differenziale; purtroppo, il difetto di commutazione delle derivate seconde è un ostacolo fastidioso al loro calcolo!
Per questo, per calcolare efficacemente su una superficie S (e più in generale su uno spazio curvo), è utile uno strumento che esprima la differenza tra $D_U D_V$ e $D_V D_U$ in funzione dei campi stessi e di parametri geometrici di S ; un po' come le formule di Frenet per una curva α esprimono le derivate prime dei campi fondamentali su α in funzione dei campi stessi e di parametri geometrici di α (curvatura e torsione). Per questo si introduce l'*operatore di curvatura*:

Definizione 5.4.4 (Operatore di curvatura)
Sia S superficie di $\mathbb{R}^n$, sia ϕ una carta con coordinate (x_1, x_2) intorno a $P \in S$. L'*operatore di curvatura* di S in P è l'endomorfismo $R^S_\phi : T_P S \to T_P S$, (dipendente da ϕ) dalla coppia di campi coordinati $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, definito da:

$$R^S_\phi(z) = \left(D^S_{\frac{\partial}{\partial x_1}} D^S_{\frac{\partial}{\partial x_2}} Z - D^S_{\frac{\partial}{\partial x_2}} D^S_{\frac{\partial}{\partial x_1}} Z \right)(P)$$

per un qualsiasi campo Z su S con $Z(P) = z$. Si noti che:

(i) $R^S_\phi(Z)$ *dipende solo dal valore* $z = Z(P)$.

Dimostrazione di (i). Infatti, indicando con $D^S_i = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$, si noti innanzitutto che

$$\begin{aligned}\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(fZ) &= D^S_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} Z + f D^S_2 Z\right) - D^S_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} Z + f D^S_1 Z\right)\\ &= f\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(Z)\end{aligned}$$

quindi, se $\tilde{Z}$ è un altro campo tangente con $\tilde{Z}(P) = Z(P) = z$, scomponendolo come $\tilde{Z} = fZ + gZ^\perp$, dove $Z^\perp$ è tangente ad S e ortogonale a Z, ed $f(P) = 1, g(P) = 0$, otteniamo:

$$\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(\tilde{Z}) = f\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(Z) + g\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(Z^\perp)$$

relazione che in P dà $\left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(\tilde{Z}) = \left(D^S_1 D^S_2 - D^S_2 D^S_1\right)(Z)$.□

(ii) R^S_ϕ è un endomorfismo di $T_P S$, per le proprietà di linearità di D^S;

(iii) R^S_ϕ è un endomorfismo *antisimmetrico* di $(T_P S, I_P)$, i.e.:

$$R^S_\phi(z) \cdot z' = -\, R^S_\phi(z') \cdot z$$

Dimostrazione di (iii). Infatti, indicando sempre con $D^S_i = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$, si ha:

$$\begin{aligned}R^S_\phi(Z) \cdot Z' &= \left(D_1 D_2 Z \cdot Z'\right) - \left(D_2 D_1 Z \cdot Z'\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[D_2 Z \cdot Z'\right] - D_2 Z \cdot D_1 Z'\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left[D_1 Z \cdot Z'\right] - D_1 Z \cdot D_2 Z'\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}(Z \cdot Z') - Z \cdot D_2 Z'\right] - D_2 Z \cdot D_1 Z'\right)\\
&\qquad - \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(Z \cdot Z') - Z \cdot D_1 Z'\right] - D_1 Z \cdot D_2 Z'\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left[Z \cdot D_1 Z'\right] - D_2 Z \cdot D_1 Z'\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left[Z \cdot D_2 Z'\right] - D_1 Z \cdot D_2 Z'\right)\\
&= \left(Z \cdot D_2 D_1 Z'\right) - \left(Z \cdot D_1 D_2 Z'\right) = -R^S_\phi(Z') \cdot Z\end{aligned}$$

In realtà è possibile mostrare che R^S_ϕ dipende solo da $u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(P)$ e $u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(P)$. Quindi l'operatore di curvatura può vedersi (e tale è la sua definizione generale in geometria riemanniana) come un'applicazione $\widehat{R}^S : (T_PS \times T_PS) \times T_PS \to T_PS$, definita come $\widehat{R}^S(u_1, u_2, z) = D^S_{U_1} D^S_{U_2} Z - D^S_{U_2} D^S_{U_1} Z$, *per qualsiasi estensione di* u_1, u_2, z *a campi* U_1, U_2, Z *tali che* $[U_1, U_2] = 0$. Non useremo questo fatto nel seguito, quindi ci risparmiamo la dimostrazione.

Si noti che, poiché R^S_ϕ è un endomorfismo antisimmetrico, la sua matrice 2×2 (rispetto a una base ortonormale di T_PS) è antisimmetrica, dunque ha un solo coefficiente interessante. Ebbene, questo coefficiente, su un'opportuna base ortonormale, è proprio la curvatura di Gauss. Precisamente:

Teorema 5.4.5 **(K_S è il difetto di commutazione in P di $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_1}}$ e $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_2}}$ se (x_1, x_2) sono coord. ortonormali in P)**
Sia S superficie di $\mathbb{R}^n$, e siano (x_i) coordinate locali attorno a intorno a $P \in S$. *Supponiamo che* $\mathcal{B} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ *sia una base ortonormale in* P[1] : allora

$$K_S(P) = -R^S_\phi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{1}$$

In particolare questo mostra che:
(i) la matrice di $R^S_\phi : T_PS \to T_PS$ sulla base (ortonormale) $\mathcal{B}$ è:

$$[\, R^S_\phi \,]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & K_S(P) \\ -K_S(P) & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) R^S_ϕ è una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ composta con una dilatazione di $K_S(P)$;
(iii) $K_S(P)$ è invariante per isometrie.

Dimostrazione.
Siano, come prima, $D^S_i = D^S_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ e $D_i = D_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$ le derivate su S e $\mathbb{R}^3$ rispetto a $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Si tratta di calcolare $\left(D^S_1 D^S_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} - \left(D^S_2 D^S_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$. Sappiamo che:

$$D^S_i V = D_i V - II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, V \right) N_S$$

per ogni campo V tangente ad S, e per qualsiasi orientazione di S associata ad un campo normale unitario N_S intorno a P. Allora:

$$D^S_1 \left[D^S_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] = D_1 \left[D_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) N_S \right] - II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, D^S_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) N_S$$

dunque, poiché $N_S \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} = 0$,

$$\begin{aligned} D^S_1 \left[D^S_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \;=\; D_1 \left[D_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \;-\; \frac{\partial}{\partial x_1} \left[II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \right] N_S \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \\ - II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) D_1 N_S \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

da cui, per la relazione tra II^{S^+} e W^{S^+}, otteniamo:

$$D^S_1 D^S_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} = D_1 D_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \;-\; II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) II^{S^+} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

[1] Solo nel punto P! In generale infatti non è possibile trovare una base di campi coordinati ortonormali su un intorno di P, a meno che S non sia localmente isometrica al piano!

Analogamente, scambiando l'ordine di derivazione si ottiene:

$$D_2^S D_1^S \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2} = D_2 D_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2} \; - \; II^{S^+}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right) II^{S^+}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$$

Dunque la differenza dà (poiché le derivate in $\mathbb{R}^3$ commutano!)

$$R^S_\phi\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2} = II^{S^+}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\, II^{S^+}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big) - II^{S^+}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\, II^{S^+}\Big(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big)$$

che è l'opposto del determinante di $[II^{S^+}]_{\mathcal{B}}$, cioè $-k_S(P)$.

(i) Poiché la base in P è supposta ortonormale, la matrice ha coefficiente (i,j) uguale $R^S_\phi\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j} = 0$. D'altra parte, la matrice è antisimmetrica, dunque gli altri coefficienti seguono.

(ii) Segue dal fatto che $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice di una rotazione di $\pi/2$ (oraria su T_PS rispetto a $N = \frac{\partial}{\partial x_1}\times\frac{\partial}{\partial x_2}$).

(iii) Abbiamo visto che K_S è il difetto di commutazione di $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_1}}$ con $D^S_{\frac{\partial}{\partial x_2}}$. Allora, *poiché la derivata di S è invariante per isometrie* (cf. Corollario 11.6), segue che anche K_S lo è. Precisamente, supponiamo che $F : S \to S'$ sia un'isometria locale, e sia ϕ una carta locale intorno a $P \in S$ con coordinate (x_1, x_2) e $\mathcal{B} = \big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\big)$ ortonormale in P. Allora $\phi' = F\circ\phi$ è una carta per S' in $F(P)$ con coordinate (x_1', x_2') e $\mathcal{B}' = \big(\frac{\partial}{\partial x_1'}, \frac{\partial}{\partial x_2'}\big)$ è ancora ortonormale in $F(P)$, poiché $\frac{\partial}{\partial x_i'} = (dF)_P(\frac{\partial}{\partial x_i})$ e $(dF)_P$ è un'isometria. Per il Corollario 11.6, applicato ripetutamente a ciascuna delle derivate, deduciamo che

$$\begin{aligned} K_S(F(P)) &= \left(D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x_1'}} D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x_2'}} \frac{\partial}{\partial x_1'} - D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x_2'}} D^{S'}_{\frac{\partial}{\partial x_1'}} \frac{\partial}{\partial x_1'} \right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2'} \\ &= (dF)_P \left(D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_1}} D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} - D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)\cdot (dF)_P\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\ &= \left(D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_1}} D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} \frac{\partial}{\partial x_1} - D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_2}} D^{S}_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_2} = K_S(P) \ \square \end{aligned}$$

La curvatura di Gauss è uno strumento estremamente fine (essendo una funzione, e non semplicemente un numero, come l'area o il diametro) per stabilire se due superfici siano non isometriche, anche solo localmente:

Esercizio 5.4.6 (Superfici non isometriche)
(i) Mostrare che nessun aperto della sfera è isometrico ad un aperto di $\mathbb{R}^2$.
(ii) Mostrare che nessun aperto di $Ell_{1,1,2}$ è isometrico ad un aperto di S^2.
Suggerimento: calcolare la curvatura gaussiana.

Esercizio 5.4.7 (Tori non isometrici)
(i) Determinare "ad occhio" i punti in cui la curvatura gaussiana è positiva, quello in cui è negativa , e quelli in cui è nulla.
(ii) Calcolare la curvatura gaussiana del toro di rivoluzione $T_{a,b}$, e discuterne il segno (verificare che il risultato è coerente con il Teorema 5.3.1).
(iii) Calcolare il minimo e il massimo della curvatura gaussiana su $T_{a,b}$.
(iv) Mostrare che, se $(a, b) \neq (a', b')$, allora $T_{a,b}$ non è isometrico a $T_{a',b'}$.
(v) Per vedere dal vivo come la curvatura influenza la geometria intrinseca (per es., la forma dei triangoli geodetici), visitare il mausoleo di S. Costanza a Roma, raro esempio di costruzione con volta emitorica.

Suggerimento:
- si consideri $K_- = \min_{P \in T_{a,b}} K(P)$ e $K'_- = \min_{P \in T_{a',b'}} K(P)$;
- notare che: $T_{a,b}$ isometrico a $T_{a',b'} \Rightarrow \text{Area}(T_{a,b}) = \text{Area}(T_{a',b'})$ e $K_- = K'_-$;
- dedurre quindi che $(a, b) = (a', b')$.