Istituzioni di Matematica, esonero del 29/05/2023, soluzioni.

1. Determinare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx$$

$\boxed{\text{A}}$ $\sqrt{2}$, $\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{3}/2$, $\boxed{\text{C}}$ 1, $\boxed{\text{D}}$ 2, $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle risposte

Risposta: C

Dimostriamo che

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = 1$$

Infatti integrando per parti

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = \sin x - x \cos x + c,$$

e quindi $\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = [\sin x - x \cos x]_0^{\pi/2} = 1.$

2. Calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{x^2}{e^{x^3}} \, \mathrm{d}x$$

L'integrale può essere scritto come:

$$-\frac{1}{3} \int (-3x^2) e^{-x^3} dx$$

che si scrive nella forma

$$-\frac{1}{3} \int e^{f(x)} f'(x) dx$$

e cioè

$$-\frac{1}{3} \int (e^{f(x)})' dx$$

con $f(x) = -x^3$; l'integrale è quindi della forma quasi-immediata ed è uguale a

$$-\frac{1}{3} e^{-x^3} + c$$

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{-2x}{x^2+1} y$$

Suggerimento: utilizzate $e^{\log \alpha} = \alpha$.

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{C}{(x^2+1)^2}$, $\boxed{\text{B}}$ $C \log(x^2+1)$, $\boxed{\text{C}}$ Ce^x, $\boxed{\text{D}}$ $-Ce^x$, $\boxed{\text{E}}$ $\frac{C}{x^2+1}$
Risposta: E

4. Sia $y(x)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = (1-x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $y(x)$ calcolata in $x = 1$ vale
$\boxed{\text{A}}$ $\pi + e$, $\boxed{\text{B}}$ $2\pi + \frac{1}{e}$, $\boxed{\text{C}}$ $1 - \frac{2}{e}$, $\boxed{\text{D}}$ $4 + \frac{1}{2e}$, $\boxed{\text{E}}$ nessuna delle risposte

Risposta: $\boxed{\text{C}}$

5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{A}}$ $e^{-x} + e^{x^2}$, $\boxed{\text{B}}$ $\frac{3}{2}e^{-x/2} + xe^{-x/2}$, $\boxed{\text{C}}$ $e^{-x/2} + \frac{3}{2}xe^{-x/2}$, $\boxed{\text{D}}$ $e^{-x/2} + \frac{3}{2}e^{-x^2/2}$,
$\boxed{\text{E}}$ nessuna delle risposte
Risposta: $\boxed{\text{C}}$

6. Il sistema dipendente da un parametro

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ x - y - z = -k \\ ky - z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ammette un'unica soluzione per
$\boxed{\text{A}}$ k diverso da 0 e 1, $\boxed{\text{B}}$ k diverso da 0 e -1, $\boxed{\text{C}}$ $k = 0$ e $k = -1$, $\boxed{\text{D}}$ $0 < k < 1$,
$\boxed{\text{E}}$ $k = 0$ e $k = 1$.

Risposta: $\boxed{\text{B}}$ (il determinante vale $-(k^2 + k)$)

7. Consideriamo il sistema dell'es. **6**.
Per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema ammette infinite soluzioni ?
Risposta: $k = -1$.
Spiegazione. Tenendo conto dell'esercizio 6 abbiamo solo due possibilità, $k = 0$ e $k = -1$.
Per $k = -1$ le due prime equazioni diventano identiche ed il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

che ha infinite soluzioni per Rouché-Capelli.
Per $k = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

che èquivalente a

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(sostituendo la terza equazione nella seconda). Le due prime equazioni di questo sistema sono incompatibili, quindi il sistema non ammette soluzioni.

8. Calcolare il terzo quartile, Q_3, della seguente collezione non-ordinata di numeri

$$\{1, 4, 2, 5, 6, 3, 2, 3, 3, 5, 1\}$$

$\boxed{\text{A}}$ $Q_3 = 4$ $\boxed{\text{B}}$ $Q_3 = 8,25$ $\boxed{\text{C}}$ $Q_3 = 3$ $\boxed{\text{D}}$ $Q_3 = 5$ $\boxed{\text{E}}$ $Q_3 = 2,5$.
Risposta: D

9. Calcolare la deviazione standard della successione $1, 5, 3, 3$.
$\boxed{\text{A}}$ 3 $\boxed{\text{B}}$ $\frac{8}{3}$ $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\sqrt{\frac{8}{3}}$ $\boxed{\text{E}}$ $\sqrt{3}$
Risposta: D
(Secondo la definizione di Guerraggio sarebbe invece C.).