Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Primo compito a casa (del 1/3/2022)

Esercizio 1. Calcolare $(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i))^{20}$

Esercizio 2. Determinare le soluzioni dell'equazione $(z+1)^3 = 2+2i$ e disegnarle.

Esercizio 3. Determinare in $\mathbb{C}$ i seguenti sottoinsiemi e disegnarli:
(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z+4-i| = 2\}$
(ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z+4-i \leq 2\}$
(iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z+2+2i| + |z+1+i| = 3\sqrt{2}\}$
(iv) $\{z \in \mathbb{C} : |z| - \mathrm{Re}(z) = 3\}$

Esercizio 4. Enunciate la formula risolutiva per l'equazione

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{C}.$$

Convincetevi che l'usuale dimostrazione funziona anche nel campo complesso.
Determinare le soluzioni dell'equazione $z^2 + (2i-3)z + (5-i) = 0$.
Risposta: $1+i$ e $2-3i$

Esercizio 5. Sia $\mathrm{Arg}(z)$ l'argomento principale di $z \in \mathbb{C}^*$. [1]
Vero o Falso:
(i) $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$
(ii) $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$
(iii) $\mathrm{Arg}(-z) = \mathrm{Arg}(z) + \pi$

Esercizio 6. Dimostrare che $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ se e solo se $\overline{f(\overline{z})} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Esercizio 7. Sia $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa nel dominio E. Verificare che se f assume solo valori reali allora f è costante.

Esercizio 8. Determinare la regione di convergenza della serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{4+2z})^n$. Disegnare tale regione nel piano complesso.

Esercizio 9. Sia $|z| < 1$. Verificare che $(1-z)^{-1} = \sum z^n$. Determinare uno sviluppo in serie di potenze per $(1-z)^{-2}$ e più in generale per $(1-z)^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 10. Determinare il raggio di convergenza R delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{2^n}, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{2n!} z^n, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$$

Dimostrare che non si ha convergenza per $|z| = R$. (Per la seconda può essere utile la formula di Wallis per $\sqrt{\pi}$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$$

e per la terza la formula di De Moivre-Stirling,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k! e^k}{k^k \sqrt{k}} = \sqrt{2\pi})$$

[1] Attenzione: in alcuni testi la notazione $\mathrm{Arg}(z)$ e $\arg(z)$ viene adottata rispettivamente per l'argomento e per l'argomento principale (quindi con ruoli scambiati rispetto alla nostra notazione).

Esercizio 11. (i) Dimostrare la formula di Eulero: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
(ii) Dimostrare che $e^z = 1$ se e solo se $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ (i.e. $z \in 2\pi ik$ per qualche intero k) e che quindi $e^z = e^w$ se e solo se $z - w \in 2\pi i\mathbb{Z}$.
(iii) Verificare che e^z definisce una biezione da $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\}$ a $\mathbb{C}\setminus\{0\} := \mathbb{C}^*$ e dall'aperto connesso $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi\}$ a $\mathbb{C}\setminus\{(x,0), x \leq 0\}$.
(iv) Determinare le soluzioni dell'equazione $e^z = 1 + i$.