Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Decimo compito a casa (del 19/5/2023)

Esercizio 1. Sappiamo che una trasformazione lineare fratta
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
si estende ad una bigezione $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$. Verificare che trattasi di una proiettività. Suggerimento: utilizzare coordinate omogenee.

Esercizio 2. Fissiamo 3 punti distinti $\{z_0, z_1, z_2\}$ in $\mathbb{C}P^1$. Supponiamo che nessuno di essi sia $\{\infty\}$. Verificare che
$$f(z) = \frac{z - z_o}{z_1 - z_0} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}$$
si estende ad una trasformazione lineare fratta $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ che mappa z_0, z_1, z_2 rispettivamente in $\{0, 1, \infty\}$. Estendere questa definizione al caso in cui uno fra questi punti $\{z_0, z_1, z_2\}$ sia $\{\infty\}$.
Dimostrate a questo punto il seguente risultato:
se $\{z_0, z_1, z_2\}$ *e* $\{w_0, w_1, w_2\}$ *sono due triple di punti distinti in* $\mathbb{C}P^1$ *allora esiste unica la trasformazione lineare fratta che manda ordinatamente* z_j *in* w_j.

Esercizio 3. Sia E un dominio in $\mathbb{C}$. Sia $u \in C^2(E)$ armonica:

(1) dimostrare che $u \in C^\infty(E)$.
Suggerimento: essere C^∞ è una proprietà locale....

(2) sia E, in aggiunta, semplicemente connesso. Dimostrate l'esistenza di un'armonica coniugata senza far uso del teorema della mappa di Riemann ma utilizzando invece l'esistenza di una primitiva per una funzione olomorfa $g \in \mathcal{O}(E)$.
Suggerimento: considerate $g := u_x - iu_y$ e dimostrate che è olomorfa. Sia G una sua primitiva....

Esercizio 4. Dimostrare che
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-k)^2}.$$
Suggerimento: ispiratevi alla seconda dimostrazione che abbiamo dato in classe per lo sviluppo di $\pi \cot(\pi z)$. Dimostrate innanzitutto che se $f(z)$ è il membro a destra allora f converge uniformemente in $\overline{B_R}(0)$ per ogni $R > 0$. Dimostrate poi che $f(z)$ è periodica di periodo 1 e che $f(z) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ è intera e limitata.

Esercizio 5. Utilizzate l'esercizio precedente per riottenere lo sviluppo di $\pi \cot(\pi z)$.
Suggerimento: integrate da 0 a z le funzioni
$$\frac{1}{(\zeta - k)^2}, \quad k \neq 0$$
$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\zeta)} - \frac{1}{\zeta^2}.$$

Esercizio 6. Stabilire se il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{n^3})$ converge

Esercizio 7. Verificare che il prodotto infinito $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge e calcolarne esplicitamente il valore.
Suggerimento: per la seconda parte scrivere per esteso il prodotto parziale.

Esercizio 8. Per quali $z \in \mathbb{C}$ il prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^n}{n!}\right)$ converge ?

Esercizio 9. Dimostrare che $\cos \pi z = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right)$.
Suggerimento: utilizzate l'identità $\sin(2\pi z) = 2\sin(\pi z)\cos(\pi z)$ e quanto visto a lezione per $\sin(\pi z)$.