Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Dodicesimo (ed ultimo) compito a casa (del 29/5/2023)

Esercizio 1. Dimostrare che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ e che

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} (k + \frac{1}{2}) , \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

Esercizio 2. Dimostrare che $\Gamma(s)$ è limitata in ogni striscia

$$\{s \in \mathbb{C} \,:\, \sigma_0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma_1\}.$$

La proprietà di limitatezza appena enunciata (di facile dimostrazione) insieme all'equazione funzionale $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ determinano la funzione Γ a meno di una costante. Vale infatti il seguente risultato:
Teorema (Wielandt, 1939) Sia E un dominio contenente la striscia $\{s \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2\}$; sia f una funzione olomorfa soddisfacente le seguenti proprietà:
(i) f è limitata nella striscia $\{s \in \mathbb{C} \,:\, 1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2\}$
(ii) $f(s+1) = sf(s)$ se $s \in E, s+1 \in E$.
Allora $f(s) = f(1)\Gamma(s)$ $\forall s \in E \setminus (-\mathbb{N})$.

Esercizio 3. Assumendo il teorema di Wielandt dimostrare la formula di duplicazione di Legendre:

$$\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{s-1}}\Gamma(s) .$$

Esercizio 4. Dimostrare che per $\mathrm{Re} s > 0$ si ha che

$$\Gamma(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{n!(n+s)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

Riottenere da questa scrittura l'estensione meromorfa di Γ con poli in $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$ e residui corrispondenti uguali a $(-1)^n/n$ (Suggerimento per la seconda parte: per $R > 0$ fissato spezzare la somma in $\sum_n^N + \sum_{N+1}^{\infty}$ con $N > 2R$.)

Esercizio 5. I numeri di Bernoulli $\{B_k\}$ sono definiti tramite i coefficienti della serie di potenze della funzione $f(z) := z/(e^z - 1)$ [1]: più precisamente,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k .$$

(i) Dimostrare che $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$ e che $B_{2k+1} = 0$ per $k \geq 1$.
Suggerimento: la funzione $f(z) + z/2$ è pari.
(ii) Dimostrare che

$$\pi z \cot(\pi z) = \sum_{k \in 2\mathbb{N}} \frac{(2\pi i)^k}{k!} B_k z^k$$

[1] è immediato che la singolarità in $z = 0$ è eliminabile

Suggerimento: utilizzare la definizione di $\cot z$ in termini dell'esponenziale.
(iii) Dimostrare che

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} B_k \,, \quad k \geq 2, k \text{ pari.}$$

Suggerimento: utilizzare lo sviluppo della cotangente in frazioni semplici visto a lezione.