Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Secondo compito a casa (del 9/3/2023)

Esercizio 1. Siano $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ due serie di potenze, con raggi di convergenza $R_f \geq r$ e $R_g \geq r$. Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad \text{con} \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

Dimostrare che il raggio di convergenza di queste due serie è $\geq r$ e che per $|z| < r$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)z^n = f(z) + g(z)\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = f(z)g(z)\,.$$

Per gli esercizi che seguono definiamo:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\,, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}\,, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Esercizio 2. Verificare utilizzando la definizione che

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2\,, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$
$$\cos^2 z = \frac{1 + \cos(2z)}{2}\,, \quad \sin^2 z = \frac{1 - \cos(2z)}{2}\,.$$

Verificare anche che $1 = \cos^2 z + \sin^2 z$ e che $\cos(iy) = \cosh y$ e $\sin(iy) = i\sinh(y)$.

Esercizio 3. Verificare che per $z = x + iy$ si ha

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\,, \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y\,.$$

Dimostrare le analoghe formule per $\cos z$:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\,, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

Suggerimento: utilizzare l'esercizio precedente: $\sin(z) = \sin(x + iy) = \ldots$
Vero o falso: le funzioni $\sin z$ e $\cos z$ sono limitate.

Esercizio 4. Verificare che $\sin z = 0$ se e solo se $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Verificare che $\cos z = 0$ se e solo se $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 5. (i) Sia $E = \{z = x + iy, x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]\}$. Sia $f(z) = e^z$. Determinare l'immagine dei segmenti verticali $x = x_0$, $y \in [0, \pi]$. Determinare l'immagine di E tramite f. Fate dei disegni.
(ii) Sia $E = \{z = x + iy : x \in [-\pi/2, \pi/2], y \geq 0\}$. Sia $f(z) = \sin z$. Descrivere le immagini tramite f dei segmenti orizzontali $y = y_0 \geq 0$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Descrivere l'immagine di E tramite f. Fate dei disegni.