

Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.

Corso di Variabile Complessa.

Prof. P. Piazza

Terzo compito a casa (del 13/3/2023)

Esercizio 1. Sia E un dominio, $0 \notin E$. Vi ricordo che un *ramo del logaritmo* è una funzione continua $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ con la proprietà che $\exp(f(z)) = z, \forall z \in E$. Un esempio fondamentale è il logaritmo principale, Log , con $E = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.

(i) Verificare che se f e g sono due rami del logaritmo in E , allora esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $f(z) = g(z) + 2k\pi i$.

(ii) Verificare che non esiste un ramo del logaritmo in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Suggerimento: procedere per assurdo, utilizzando (i) e confrontando un tale ramo del logaritmo con Log in $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$.

(iii) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideriamo la semiretta $s_\alpha := \{z \in \mathbb{C}, z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0\}$. Sia $E_\alpha := \mathbb{C} \setminus s_\alpha$. Ad esempio $E_\pi = \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$. Definire un ramo del logaritmo in E_α dimostrando che E_α è immagine bigettiva di un dominio di \mathbb{C} tramite $\exp(\cdot)$. Denotiamo con \log_α tale logaritmo. Questo logaritmo, come quello principale, è quindi associato ad un *taglio* del piano complesso.

Esercizio 2. Calcolare

$$\text{Log}(i), \quad \text{Log}(1+i), \quad \text{Log}(-i), \quad \log_{\pi/2}(-i).$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{C}$. Il valore principale di z^a è per definizione $\exp(a \text{Log} z)$. Più in generale, un ramo del logaritmo $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ definisce un ramo della potenza z^a considerando $\exp(af(z))$. Ad esempio possiamo considerare $E = E_\alpha$ e $f = \log_\alpha$.

Calcolare $(-i)^{1+i}$ utilizzando Log ed utilizzando $\log_{\pi/2}$.

Esercizio 4. Sia

$$E = \{z \in \mathbb{C} : a \leq |z| \leq b, \alpha_1 \leq \text{Arg}(z) \leq \alpha_2\}$$

con $0 < a < b$ e $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \pi$. Sia $f(z) = \text{Log}(z)$. Determinare l'immagine tramite f dei segmenti ℓ_α definiti dai $z \in E$ tali che $\text{Arg}(z) = \alpha$. Descrivere l'immagine di E tramite f . Fate dei disegni.

¹Nei libri si parla spesso di potenza complessa associata ad un taglio del piano complesso.