Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Quarto compito a casa (del 17/3/2023)

Esercizio 1. Per ognuna delle seguenti funzioni determinare l'aperto massimale A nel quale sono olomorfe. Determinare poi il loro sviluppo in serie di potenze centrato nel punto z_0 assegnato, determinando R massimale ed una successione $\{a_n\}$ tali che

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \quad \text{in} \quad B_R(z_0)\,.$$

(1) $f(z) = \frac{1}{1-z}\,, \quad z_0 = 3$
(2) $f(z) = \frac{1}{z}\,, \quad z_0 = 1$
(3) $f(z) = \sin(z)\,, \quad z = \pi/4$

Esercizio 2. La funzione $f(z) = e^z \cos z$ è intera. Determinare il suo sviluppo in serie di potenze centrato in $z_0 = 0$: determinare quindi $\{a_k\}$ tale che

$$e^z \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\,.$$

Esercizio 3. Sia E un dominio e consideriamo l'insieme delle funzioni olomorfe in E, $\mathcal{O}(E)$. Dotare $\mathcal{O}(E)$ di una struttura di anello commutativo.
Vero o falso: $\mathcal{O}(E)$ è un dominio di integrità (i.e. è privo di divisori dello zero).

Esercizio 4. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}\,.$$

Dimostrare che il raggio di convergenza è 1 (attenzione: l'n-mo coefficiente della serie *non* è $(-1)^n/n$). Studiare la serie in $z = 1$ e $z = -1$