Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Quinto compito a casa (del 23/3/2023)

Esercizio 1. Sia E una regione regolare e sia $h \in C^1(\overline{E})$ (il che vuol dire che esiste un aperto A contenente $\overline{E}$ ed una funzione $\tilde{h} \in C^1(A)$ tale che $\tilde{h}|_{\overline{E}} = h$). Verificare che

$$\int_{\partial E^+} h(z)dz = 2i \iint_E \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} dxdy$$

Esercizio 2. Sia E una regione regolare e sia $g \in C^1(\overline{E})$. Fissiamo $w \in E$ e sia $B_r(w)$ un disco centrato in w, tutto contenuto in E.
(i) Verificare che l'integrale improprio

$$\int_{B_r(w)} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-w} dxdy$$

è assolutamente convergente.
(ii) Dimostrare la seguente generalizzazione della formula di Cauchy:

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial E^+} \frac{g(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \iint_E \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \frac{1}{z-w} dxdy\,, \quad w \in E.$$

Suggerimento: applicare il risultato dell'esercizio 1 a $E \setminus \overline{B_\epsilon(w)}$ e poi prendere $\epsilon \downarrow 0$.

Esercizio 3. Utilizzando il teorema di Cauchy e le formule di Cauchy per f e per $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}^+$, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2} dz \quad \text{con } \gamma(t) = e^{it}, t \in [0, 2\pi]\,. \tag{1}$$

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{Log}(z)}{z^n} dz, n \geq 0, \quad \text{con } \gamma(t) = 1 + \frac{1}{2} e^{it}, t \in [0, 2\pi]\,. \tag{2}$$

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z-1} dz, \quad \text{con } \gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]\,. \tag{3}$$

Esercizio 4. Sia $E = \mathbb{C} \setminus \{x \leq 0\}$ e sia $n \in \mathbb{N}^+$. Verificare che esistono precisamente n funzioni olomorfe tali che $f(z)^n = z$ per ogni $z \in E$.
Suggerimento: una di queste funzioni è sicuramente la potenza associata al logaritmo principale:

$$f(z) = \exp^{(\frac{1}{n}\mathrm{Log}(z))}\,.$$

Verificare che se g è tale che $g(z)^n = z$ per ogni $z \in E$, allora $g(z) = \zeta_k f(z)$ con ζ_k una radice n-ma dell'unità. Altro suggerimento: considerate $g(z)/f(z)$

Esercizio 5. Dimostrate che vale il seguente sviluppo in serie di potenze per il logaritmo principale

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}\,, \quad |z| < 1\,.$$

Suggerimento: prendere la differenza di questi due termini e di questa differenza prendete la derivata ...

Esercizio 6. Consideriamo la funzione reale $e^{-\pi\xi^2}$. Utilizzate il teorema di Cauchy per le funzioni olomorfe per dimostrare che

$$e^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx$$

(la funzione data è la trasformata di Fourier di se stessa).
Suggerimento: considerate $f(z) = e^{-\pi z^2}$ ed il rettangolo di vertici

$$-R, R, R + i\xi, -R + i\xi \,, \quad R \in \mathbb{R}^+ \,.$$

Applicate Cauchy e fate tendere $R \to +\infty$.