**Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.**
**Corso di** *Variabile Complessa.*
**Prof. P. Piazza**
**Sesto compito a casa (del 4/4/2023)**

**Esercizio 1.** Dimostrate la seguente estensione della formula globale di Cauchy: *Sia $\gamma$ una curva chiusa , $E$ un aperto qualsiasi tale che $\overline{\gamma} \subset E$ e $Ind_\gamma(z) = 0 \ \ \forall\, z \in E^c$. Sia $f \in \mathcal{O}(E)$. Allora per $z \in E \setminus \overline{\gamma}$ si ha:*

$$f^{(k)}(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}dw \quad k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Suggerimento: derivate ambo i membri della formula di Cauchy

$$f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)}dw.$$

Cominciate con il caso $k = 1$; siate rigorosi.

**Esercizio 2.** Sia $f$ intera e con la proprietà che $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$.

- Dimostrate che $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (suggerimento: l'immagine è aperta per noto teorema enunciato a lezione; dimostrate che l'immagine è chiusa...).
- Ottenete, come corollario, una nuova dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra.

*Per i prossimi due esercizi ricordate l'esercizio 5 del compito 5.*

**Esercizio 3.** Determinare il tipo di singolarità di

$$\frac{e^{z^2}-1}{z^4}\,; \quad \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^2} \quad \text{in} \quad z_0 = 0$$

**Esercizio 4.** Sia $E = \mathbb{C}\setminus\{x \leq 0\}$ e consideriamo $E\setminus\{1\}$. Classificare la singolarità di $\mathrm{Log}(z)/(z-1)$ in $z = 1$.
Suggerimento: $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(1 + (z-1))$

**Esercizio 5.** Verificare che $e^{1/z}$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale.

**Esercizio 6.** Determinare lo sviluppo di Laurent di

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

in $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.
Suggerimento: $\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z}\left(\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}\right)$

**Esercizio 7.** Calcolare $\mathrm{Res}[f, z_0]$ nei seguenti casi:

- $f(z) = z/(z^n - 1)$, $\quad z_0$ una radice n-ma dell'unità.
  (Già risolto in classe; rifatelo senza guardare gli appunti !)
- $f(z) = 1/(z^2 + a^2)^2$, $a \in \mathbb{R}^+$, $z_0 = ia$

**Esercizio 8.** Determinare lo sviluppo di Laurent di:

- $f(z) = 1/(2z - z^2)$ in un intorno di $z = 0$

- $f(z) = \sin(\frac{z}{z+1})$ in un intorno di $z_0 = -1$. Suggerimento: scrivete
$$\sin(\frac{z}{z+1}) = \sin(1 - \frac{1}{z+1})$$
ed esprimete il membro a destra tramite la formula del seno di una somma. Che tipo di singolarità presenta questa funzione in $z_0$ ?

**Esercizio 9.** Vero o Falso: se $f$ ha un polo di ordine $m$ in $z_0$ e $g$ ha un polo di ordine $\ell$ in $z_0$ allora $fg$ ha un polo di ordine $m + \ell$ in $z_0$.
Vero o Falso: se $f$ ha una singolarità essenziale in $z_0$ e $g$ ha una singolarità essenziale in $z_0$ allora $fg$ ha una singolarità essenziale in $z_0$.

**Esercizio 10.** Utilizzare il teorema dei residui per calcolare
$$\int_{\gamma(R)} \frac{1}{(z^2 + a^2)^2} dz\,, \quad a \in \mathbb{R}^+\,,$$
con $\gamma(R) = \gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 =$ il segmento reale da $-R$ a $R$ e $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $R > a$. Applicate questo risultato per calcolare
$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$$
Suggerimento: fate tendere $R \to +\infty$.