Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Settimo compito a casa (del 14/4/2023)

Definizione. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f Riemann-integrabile su ogni intervallo limitato; definiamo il **valore principale** di f come

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)dx$$

se tale limite esiste.
Osserviamo che una funzione dispari ha sempre valore principale uguale a zero; quindi una funzione può avere valore principale finito ma non essere integrabile in senso improprio. [1] Ad esempio la funzione uguale ad 1 per $x \geq 0$ ed uguale a -1 per $x < 0$ ha valore principale finito ed uguale a zero, ma non è integrabile in senso improprio.
Analogamente se x_0 è un punto singolare per f, $f : [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, definiamo

$$\mathrm{VP}\int_{a}^{b} f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{a}^{x_0-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

Possiamo ovviamente anche definire il valore principale di f definita in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
È anche chiaro che se f è integrabile in senso improprio allora il valore principale è finito ed uguale all'integrale improprio.

Esercizio 1. Dimostrate il
Lemma di Jordan. Vale la stima

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\,\theta < \frac{\pi}{R}\,.$$

Suggerimento:

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\theta}d\,\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}d\,\theta$$

e la funzione $\sin\theta$ è concava in $[0, \pi/2]$: $\sin(\theta) \geq \frac{2}{\pi}\theta$

Esercizio 2. Calcolare

$$\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\cos(ax)dx\,, \quad a > 0$$

Suggerimento: osserviamo preliminarmente che il nostro integrando è la parte reale di

$$\frac{1}{x^2+1}e^{iax}.$$

---

[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è integrabile in senso improprio se esistono i limiti $\lim_{R\to+\infty}\int_0^{+R} f(x)dx$ e $\lim_{S\to-\infty}\int_S^0 f(x)dx$ ed in tal caso si pone $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ uguale alla somma di questi due limiti

Consideriamo allora $f(z) = \frac{1}{z^2+1}e^{iaz}$ e $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$ con

$$\gamma_1(t) = t,\ t \in [-R, R] \quad \text{e} \quad \gamma_2 = C_R^+(0).$$

Integrate $f(z)$ su γ_R e applicate il teorema dei residui; mandate poi R a $+\infty$

Esercizio 3. Dimostrate il seguente risultato: *Sia $a > 0$ e sia $R_0 > 0$. Sia f una funzione che è continua in $|z| > R_0$. Sia $M(R)$ il massimo di $|f|$ su $C_R(0)^+$, la semicirconferenza del semipiano superiore,*

$$C_R(0)^+ := \{Re^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}, \quad R > R_0.$$

Se $\lim_{R\to+\infty} M(R) = 0$ allora

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} f(z)e^{iaz}dz = 0$$

Suggerimento: segue facilmente dall'esercizio 1.

Esercizio 4. Utilizzate i risultati precedenti per dimostrare il seguente risultato: *sia $a > 0$ ed f una funzione reale che ammette un prolungamento analitico al semipiano superiore, tranne un numero finito di poli $\{z_1, \ldots, z_k\}$ tutti contenuti nel semicerchio di raggio R_0 e con parte immaginaria positiva. Se f soddisfa le ipotesi dell'esercizio precedente allora*

$$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}[f(z)e^{iaz}, z_j]$$

Esercizio 5. Dimostrate il teorema dei residui frazionario:
Sia z_0 un polo semplice [2] di $f(z)$ e sia γ_ϵ^α l'arco di circonferenza

$$\gamma_\epsilon^\alpha(t) = z_0 + \epsilon e^{it}, t \in [\theta, \theta + \alpha]$$

con θ fissato. Allora risulta

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\gamma_\epsilon^\alpha} f(z)dz = \alpha i \, \mathrm{Res}[f(z), z_0]\,.$$

Suggerimento: scrivete lo sviluppo di Laurent di f intorno a z_0.....

Esercizio 6. Utilizzando $f(z) = e^{iz}/z$ ed il teorema di Cauchy dimostrate che

$$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Suggerimento: considerate la curva $\gamma(R, \epsilon) = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, con γ_1 il segmento reale da $-R$ a $-\epsilon$, $\gamma_2 = -C_\epsilon^+$ (quindi orientazione oraria), γ_3 il segmento reale da ϵ a R e $\gamma_4(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Fate una figura.
Dovrete prendere il limite per $\epsilon \downarrow 0$ e per $R \to +\infty$....

Esercizio 7. Sfruttando il teorema dei residui verificare che

$$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

[2] e cioè del primo ordine