Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Ottavo compito a casa (del 21/4/2023)

Esercizio 1. Sia f una funzione olomorfa in $B'_r(0)$ (quindi 0 è una singolarità isolata di f) e supponiamo che f sia iniettiva. Dimostrare che 0 non può essere una singolarità essenziale.
Suggerimento: procedere per assurdo ed utilizzare Casorati-Weierstrass.

Esercizio 2. Stabilire l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Suggerimento: utilizzare l'usuale $\gamma_R = \gamma_1 + C_R^+(0)$, con γ_1 il segmento reale da $-R$ a R, ed il teorema dei residui.

Esercizio 3. Sia $a \in (0,1)$. Stabilire l'uguaglianza

$$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Suggerimento 1: sia $R \in \mathbb{R}$; utilizzate il rettangolo di vertici $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$.
Suggerimento 2: la derivata di e^z, e cioè *il limite del rapporto incrementale*, vale -1 in πi.

Esercizio 4. Verificare che per $a \in B'_1(0)$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = \frac{2\pi}{1-a^2}\,.$$

Suggerimento: procedete come nell'Esempio 12.4 delle Note; il polinomio di secondo grado che otterrete in maniera naturale da quei passaggi ha radici a e $1/a$.....

Esercizio 5. Utilizzando il teorema di Rouché verificare che il polinomio $P(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 1$

- ha un solo zero in $B_1(0)$
- ha tutti gli zeri in $B_4(0)$.

Esercizio 6. Considerate il Teorema di Rouché nella forma che trovate nelle Note, Teorema 13.8.
Dimostrate direttamente questo risultato ragionando come segue: considerate $t \in [0,1]$ e $\Phi(t) := \psi + t\phi$; quindi $\Phi(0) = \psi$ e $\Phi(1) = \psi + \phi$. Sia $\mathcal{Z}(t)$ il numero di zeri, con molteplicità, di $\Phi(t)$ in $B_R(0)$.
Dovete dimostrare che questo numero è costante in t. Dimostrate che basta stabilire la continuità in t e poi dimostrate tale continuità...