Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*
Prof. P. Piazza
Nono compito a casa (del 12/5/2023)

Esercizio 1. Dimostrare la seguente versione del principio del massimo modulo: *Sia $E \subset \mathbb{C}$ un dominio, non necessariamente limitato, e sia $f \in \mathcal{O}(E)$. Se $|f(\ )|$ ha un massimo in E allora f è costante.*
Suggerimento: utilizzate il teorema dell'applicazione aperta.

Esercizio 2. Considerate la versione del principio del massimo modulo che compare nelle note, Teorema 5.32 . Fate vedere che l'ipotesi di limitatezza è necessaria considerando E uguale al primo quadrante, $E : \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, e $f(z) = e^{-iz^2}$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{H}$ il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Sappiamo (anche se non lo abbiamo dimostrato) che esiste un omomorfismo suriettivo di gruppi $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ni M \xrightarrow{\Phi} f_M \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.
Determinare $\mathrm{Ker}(\Phi)$ e $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{Ker}(\Phi)$ (che è isomorfo a $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$).

Esercizio 4. Sia
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$
una trasformazione lineare fratta. Convincetevi che possiamo estendere f ad una bigezione di $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in se stesso ponendo
$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f(-\frac{d}{c}) = \infty$$
se $c \neq 0$ e ponendo $f(\infty) = \infty$ se $f(z) = az + b$.

Esercizio 5. Verificare che una trasformazione lineare fratta
$$\frac{az + b}{cz + d}$$
diversa dall'identità ha al più 2 punti fissi. Dedurne che se f e g sono due trasformazioni lineari fratte ed esistono tre punti distinti $\{z_1, z_2, z_3\}$ tali che
$$f(z_1) = a_1 = g(z_1), \quad f(z_2) = a_2 = g(z_2), \quad f(z_3) = a_3 = g(z_3)$$
allora $f = g$.

Esercizio 6. Consideriamo le trasformazioni lineari fratte associate alle matrici
$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ \text{con}\ \kappa \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ \text{con}\ \kappa \in \mathbb{C}, |\kappa| = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
dette rispettivamente *traslazione*, *omotetia*, *rotazione* ed *inversione*. Verificare che ogni trasformazione lineare fratta è composizione di queste applicazioni.
Suggerimento: se $c \neq 0$ verificare che
$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c}$$
ed utilizzarlo. Se $c = 0$ anche più facile.

Esercizio 7. Un cerchio di Möbius in $\mathbb{C}$ è una circonferenza oppure una retta. Dimostrare che una trasformazione lineare fratta f trasforma cerchi di Möbius in cerchi di Möbius.
Suggerimento: per l'esercizio precedente dobbiamo considerare solo il caso f uguale all'inversione perché per le altre trasformazioni l'enunciato è chiaro.

Esercizio 8. Determinare una trasformazione lineare fratta che mappi $B_2(-1)$ nel semipiano $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) > 0\}$. Suggerimento: abbiamo visto a lezione un bi-olomorfismo fra il disco unitario $\mathbb{D} \equiv B_1(0)$ e $\mathbb{H}$, il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$

Esercizio 9. Dimostrare che $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ se e solo se $\exists\, a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ tali che $f(z) = az + b$.
Suggerimento: considerare $g(z) = f(1/z)$ ed utilizzare l'esercizio 1 del Compito 8.

Esercizio 10. Sia E un dominio in $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Una funzione $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ si dice armonica se è di classe C^2 e se $\Delta\varphi := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi = 0$.
Dimostrate che se f è olomorfa e $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ allora le due funzioni u e v sono armoniche.
Suggerimento: il teorema di Schwartz sulle derivate seconde miste può risultare utile.