Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa..* Prof. P. Piazza
Prova scritta del 13 Giugno 2023. Compito A.

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	3	
2	3	
3	3	
4	6	
5	3	
6	3	
7	3	
8	4	
9	4	
Totale	32	

Esercizio 1. Sia $P(z)$ un polinomio di grado almeno 2 e supponiamo che gli zeri di P siano tutti contenuti in $B_r(0)$. Dimostrare che

$$\int_{C_r(0)} \frac{1}{P(z)} dz = 0\,.$$

Suggerimento: considerare $C_R(0)$ con $R > r$.

Esercizio 2. Dimostrate che lo sviluppo in serie di $\mathrm{Log}(z)$, il logaritmo principale, attorno a $z = i$ è dato da

$$\mathrm{Log}(z) = \frac{\pi}{2} i - \sum_{n\geq 0} \frac{i^{n+1}}{n+1}(z-i)^{n+1}\,.$$

Qual è il raggio di convergenza della serie di potenze che compare nel membro a destra ?
Suggerimenti: potete integrare un'opportuna funzione oppure ricondurvi ad uno sviluppo visto negli esercizi assegnati per casa.

Esercizio 3. Determinare lo sviluppo di Laurent di:

$$f(z) = 1/(2z - z^2)$$

in un intorno sferico di $z = 2$

Esercizio 4. Dimostrate in tutti i dettagli che

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e})$$

Suggerimento: passare alla funzione $e^{iz}/z(z^2+1)$ e considerare la curva $\gamma(R,\epsilon) = \gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$, con γ_1 il segmento reale da $-R$ a $-\epsilon$, $\gamma_2 = -C_\epsilon^+(0)$ (semicerchio superiore centrato in 0 e di raggio ϵ ma con orientazione *oraria*), γ_3 il segmento reale da ϵ a R e $\gamma_4(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$ (quindi $\gamma_4 = C_R^+(0)$ con l'usuale orientazione *antioraria*). Ricordate anche l'espressione della funzione $\sin x$ in termini di esponenziali complessi. Utilizzate il retro del foglio se necessario.

Esercizio 5. Fissiamo $k \in \mathbb{N}^*$ e consideriamo la funzione

$$f(z) = e^z + 3z^k\,.$$

Determinare il numero di zeri di $f(z)$ in $B_1(0)$.

Esercizio 6. Sia E un dominio in $\mathbb{C}$ e sia $u : E \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(E)$, armonica. Dimostrare utilizzando l'analisi complessa che vale il teorema della media: se $z_0 \in E$ e $\overline{B_r}(z_0) \subset B_R(z_0) \subset E$ allora

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta\,.$$

Esercizio 7. Costruire à la Weierstrass una funzione intera $f(z)$ che abbia zeri semplici nell'insieme $\{\pm\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$ e nessun altro zero.

Esercizio 8. Consideriamo gli interi di Gauss $\Gamma := \{m + in\,, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Costruire à la Mittag-Leffler una funzione che abbia poli semplici negli elementi di Γ, residuo in tali punti uguale a 1 e nessun altro polo.

Esercizio 9. La funzione ψ di Gauss è definita come

$$\psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\,.$$

Dare un'espressione per $\psi(s)$ in termini di frazioni semplici, calcolando esplicitamente questa derivata logaritmica. (Una certa espansione della funzione Γ può essere utile.....)
Dimostrare che $\psi(1-s) - \psi(s) = \pi\cot(\pi s)$.