Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa.*. Prof. P. Piazza
Prima prova in itinere (del 27 Aprile 2023)

Nome e Cognome: ____________________

email istituzionale: ____________________

- I COMPITI DISORDINATI O POCO LEGGIBILI NON SARANNO NEANCHE CORRETTI
- **GIUSTIFICATE LE VOSTRE ARGOMENTAZIONI**
- I FOGLI DI BRUTTA NON SARANNO ACCETTATI
- TUTTI I DISPOSITIVI ELETTRONICI DEVONO ESSERE **SPENTI**
- NON SONO AMMESSI LIBRI O APPUNTI

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	4	
2	3	
3	3	
4	5	
5	4	
6	4	
7	4	
8	6	
Totale	33	

Esercizio 1. Consideriamo la funzione

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

ed il punto $z_0 = i$. Determinare l'aperto massimale A nel quale f è olomorfa. Determinare R massimale ed una successione $\{a_n\}$ tali che

$$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n \quad \text{in} \quad B_R(z_0)\,.$$

Esercizio 2. Consideriamo la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+5)^k}{(k+1)2^k}\,.$$

Determinare il raggio di convergenza R della serie.

Esercizio 3. Stabilire se

$$f(z) = e^z + e^{\overline{z}}$$

è olomorfa in $\mathbb{C}$

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera e supponiamo che esistano $M > 0$ e $\gamma \in (0,1)$ tali che

$$|f(z)| < M(1 + |z|^\gamma) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Vero o Falso: f è costante.
Come sempre, date spiegazioni dettagliate.

Esercizio 5. Utilizzando risultati attribuiti a Cauchy calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{C_{2\pi}(0)} \frac{z^2 \sin z}{(z-\pi)^3} dz \quad \text{e} \quad \int_{C_1(0)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz, \ \text{ al variare di } \ n \in \mathbb{N}^+.$$

Esercizio 6. Calcolare

$$\int_{C_2(0)} \frac{3z+1}{z(z-1)^3} dz\,.$$

Esercizio 7. Determinare il numero di zeri che il polinomio $f(z) = z^6 + 9z^4 + z^3 + 4$ ha all'interno del disco unitario.

Esercizio 8. Dimostrare, *giustificando tutti i passaggi*, che

$$\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}\,.$$

Suggerimento: $\frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2}$ è la parte immaginaria di $\frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)^2}$; $\frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)^2}$ è la restrizione all'asse reale di $\frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}$; utilizzare la curva $\gamma_R = \gamma_1 + C_R^+(0)$, con γ_1 il segmento reale da $-R$ a R.