Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-23.
Corso di *Variabile Complessa..* Prof. P. Piazza
Seconda prova in itinere (del 13 Giugno 2023)
Compito A

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	4	
2	4	
3	4	
4	4	
5	4	
6	4	
7	4	
8	4	
Totale	32	

Attenzione ! In tutto l'esonero dovete giustificare la convergenza delle somme o dei prodotti infiniti che definite.

Esercizio 1. Studiare la convergenza dei seguenti prodotti infiniti

$$(1) \quad \prod_{n=1}^{\infty} |1+\frac{i}{n}| \qquad\qquad (2) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right).$$

Esercizio 2. Consideriamo le 2 triple in $\widehat{\mathbb{C}}$:

$$\{z_0=-1, z_1=\infty, z_2=i\} \qquad\qquad \{w_0=1, w_1=i, w_2=\infty\}$$

Determinare una trasformazione lineare fratta che trasformi ordinatamente $\{z_0, z_1, z_2\}$ in $\{w_0, w_1, w_2\}$.
Vero o Falso: tale trasformazione lineare fratta è unica. Spiegare.

Esercizio 3. Sia E un dominio in $\mathbb{C}$ e sia $u: E \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(E)$, armonica. Dimostrare utilizzando l'analisi complessa che vale il teorema della media: se $z_0 \in E$ e $\overline{B_r}(z_0) \subset B_R(z_0) \subset E$ allora

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta\,.$$

Esercizio 4. Dimostrare che la funzione $u(x, y) = xy + y$ è armonica in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Determinare una funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}(f) = u$.

Esercizio 5. Costruire à la Weierstrass una funzione intera $f(z)$ che abbia zeri semplici nell'insieme $\{\pm\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}\}$ e nessun altro zero.

Esercizio 6. Costruire à la Mittag-Leffler una funzione meromorfa $f(z)$ che abbia poli semplici negli interi non-positivi $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$, residuo in $(-n)$ uguale $(-1)^n/n!$ e nessun altro polo.
Vero o Falso: la funzione $\Gamma(z) - f(z)$ è intera. Spiegare.

Esercizio 7. Consideriamo gli interi di Gauss $\Gamma := \{m + in\,, m, n \in \mathbb{Z}\}$. Costruire à la Mittag-Leffler una funzione che abbia poli semplici negli elementi di Γ, residuo in tali punti uguale a 1 e nessun altro polo.

Esercizio 8. La funzione ψ di Gauss è definita come

$$\psi(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\,.$$

Dare un'espressione per $\psi(s)$ in termini di frazioni semplici, calcolando esplicitamente questa derivata logaritmica. (Una certa espansione della funzione Gamma può risultare utile......)
Dimostrare che $\psi(1 - s) - \psi(s) = \pi \cot(\pi s)$.