

**Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2022-22.**  
**Corso di Variabile Complessa.**  
**Prof. P. Piazza**  
**Programma d'esame**

Il programma consiste di tutto il materiale contenuto nelle note disponibili nel sito web del corso:

<https://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/vc-22-23.htm>

Si riporta qui sotto l'elenco degli argomenti trattati. Ulteriori risultati sono stati visti nei compiti settimanali e fanno anche parte del programma d'esame.

Il campo dei numeri complessi. Struttura di spazio metrico. Rappresentazione in coordinate polari. Radici  $n$ -me di un numero complesso.

Funzioni olomorfe. Le funzioni olomorfe sono continue e differenziabili. Equazioni di Cauchy-Riemann. Funzioni olomorfe a derivata identicamente nulla.

Serie a termini complessi. Serie di funzioni. Convergenza puntuale, uniforme e totale. Massimo limite di una successione reale. Proprietà del massimo limite. Criterio della radice per serie reali a termini positivi. Serie di potenze, formula di Hadamard per il raggio di convergenza e olomorfia di una serie di potenze. Criterio del rapporto (solo enunciato). Esponenziale. Formula di Eulero. Derivate successive di una serie di potenze. Serie di Taylor. Funzioni analitiche. Prodotto di Cauchy di due serie, somma e prodotto di funzioni analitiche; logaritmo principale, il logaritmo principale è olomorfo; rami del logaritmo; funzioni trigonometriche ed iperboliche, loro sviluppi in serie di potenze, potenze complesse.

Principio d'identità delle funzioni analitiche. Le funzioni olomorfe sono analitiche: integrazione lungo un cammino, 1-forme associate, primitiva di una funzione continua, teorema di Goursat, esistenza di una primitiva locale per una funzione olomorfa, formula di Cauchy locale.

Sviluppo in serie di potenze di una funzione olomorfa. Stime di Cauchy sulle derivate  $k$ -me. Dimostrazione diretta dell'olomorfia di un ramo del logaritmo.

Regioni del piano regolari (a tratti): teorema e formula di Cauchy per tali regioni. Teorema di Liouville. Teorema fondamentale dell'algebra. Principio di massimo modulo (solo enunciato). Teorema di omotopia. Domini semplicemente connessi. Esistenza di un ramo del logaritmo per tali domini. Teorema di Morera. Indice di allacciamento di una curva attorno ad un punto. Teorema e Formula globale di Cauchy. Primo gruppo di omologia, collegamenti con l'indice di allacciamento. L'omomorfismo surgettivo dal primo gruppo di omotopia al primo gruppo di omologia. Indice di allacciamento di un ciclo.

Zeri di una funzione olomorfa. Ordine di uno zero. Come contare gli zeri di una funzione olomorfa.

Teorema dell'applicazione aperta via il teorema di struttura (solo enunciati)

Singularità isolate. Serie di Laurent. Classificazione delle singularità. Teorema di Casorati-Weierstrass. Residui. Teorema dei residui. Funzioni meromorfe. Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann e loro caratterizzazione. Utilizzo del teorema di Cauchy e del teorema dei residui per il calcolo di integrali reali. Valore Principale.

Contare zeri e poli. Teorema di Rouché. Nuova dimostrazione del TFA. Dimostrazione del teorema dell'applicazione aperta tramite Rouché (2 dimostrazioni). Funzioni olomorfe iniettive.

Successioni di funzioni olomorfe: teorema di Weierstrass. Teorema di Runge. Mappe conformi. Una funzione iniettiva olomorfa definisce una mappa conforme. Una mappa conforme con gradiente non-nullo definisce un'applicazione olomorfa. Bi-olomorfismi. Il disco unitario ed il semipiano superiore sono bi-olomorfi. Trasformazioni di Möbius. Lemma di Schwartz. Automorfismi del disco unitario e del semipiano superiore. Preliminari al teorema della mappa di Riemann: famiglie normali, uniformemente limitate sui compatti, uniformemente equicontinue sui compatti. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Montel. Dimostrazione del teorema della mappa di Riemann. Funzioni armoniche. Armoniche coniugate. Teorema di caratterizzazione dei domini semplicemente connessi.

Prodotti infiniti. Prodotti infiniti di funzioni olomorfe. Lo sviluppo di  $\pi \cot(\pi z)$  in frazioni semplici (due dimostrazioni). Lo sviluppo di  $\sin(\pi z)$  come prodotto infinito. Introduzione al teorema di fattorizzazione di Weierstrass: i fattori elementari  $E_p(z)$ . Teorema di fattorizzazione di Weierstrass. Esempi. La funzione sigma di Weierstrass associata ad un reticolo. Funzione P di Weierstrass. Teorema di Mittag-Leffler. Esempi. Nuovo approccio alla funzione P di Weierstrass. Sua doppia periodicità.

Funzione gamma e sue proprietà: olomorfia in  $\text{Re} s > 0$ , equazione funzionale, estensione meromorfa, fattorizzazione di  $\Gamma$ , formula di riflessione di Eulero.

Funzione zeta. A partire da qui, solo enunciati: formula di Eulero; zeri banali della funzione zeta; ipotesi di Riemann; zeta non ha zeri nella retta  $\text{Re}(s)=1$ . Enunciato del teorema dei numeri primi.