

Laurea Triennale in Matematica. a.a. 2021-22.
Corso di Variabile Complessa.
Prof. P. Piazza
Programma d'esame

Il programma consiste di tutto il materiale contenuto nelle note disponibili nel sito web del corso:

<https://www1.mat.uniroma1.it/people/piazza/vc-21-22.htm>

Si riporta qui sotto l'elenco degli argomenti trattati. Ulteriori risultati sono stati visti nei compiti settimanali e fanno anche parte del programma d'esame.

Il campo dei numeri complessi. Struttura di spazio metrico. Rappresentazione in coordinate polari. Radici n-me di un numero complesso.

Funzioni olomorfe. Le funzioni olomorfe sono continue e differenziabili. Equazioni di Cauchy-Riemann. Funzioni olomorfe a derivata identicamente nulla.

Serie a termini complessi. Serie di funzioni. Convergenza puntuale, uniforme e totale. Massimo limite di una successione reale. Proprietà del massimo limite. Criterio della radice per serie reali a termini positivi. Serie di potenze, formula di Hadamard per il raggio di convergenza e olomorfia di una serie di potenze. Criterio del rapporto (solo enunciato). Esponenziale. Formula di Eulero. Derivate successive di una serie di potenze. Serie di Taylor. Funzioni analitiche. Prodotto di Cauchy di due serie, somma e prodotto di funzioni analitiche; logaritmo principale, il logaritmo principale è olomorfo; funzioni trigonometriche ed iperboliche, potenze complesse.

Prolungamento analitico (ripasso da Analisi 2, solo enunciati). Le funzioni olomorfe sono analitiche (ripasso da Analisi 2, solo enunciati): integrazione lungo un cammino, 1-forme associate, primitiva di una funzione continua, teorema di Goursat, esistenza di una primitiva locale per una funzione olomorfa, formula di Cauchy locale.

Sviluppo in serie di potenze di una funzione olomorfa. Stime di Cauchy sulle derivate k-me. Dimostrazione diretta dell'olomorfia di un ramo del logaritmo.

Regioni del piano regolari (a tratti): teorema e formula di Cauchy per tali regioni. Teorema di Liouville. Principio di massimo modulo. Teorema di omotopia. Domini semplicemente connessi e teorema di Cauchy. Esistenza di un ramo del logaritmo per tali domini. Teorema di Morera. Indice di allacciamento di una curva attorno ad un punto. Teorema e Formula globale di Cauchy. Primo gruppo di omologia, collegamenti con l'indice di allacciamento. L'omomorfismo surgettivo dal primo gruppo di omotopia al primo gruppo di omologia. Indice di allacciamento di un ciclo. Teorema dell'applicazione aperta. Come contare gli zeri di una funzione olomorfa.

Singolarità isolate. Serie di Laurent. Classificazione delle singolarità. Teorema di Casorati-Weistrass. Residui. Teorema dei residui. Utilizzo del teorema di Cauchy e del teorema dei residui per il calcolo di integrali reali. Valore Principale. Funzioni meromorfe. Contare zeri e poli. Teorema di Rouché. Nuova dimostrazione del TFA.

Successioni di funzioni olomorfe: teorema di Weistrass. Teorema di Runge. Mappe conformi. Una funzione iniettiva olomorfa definisce una mappa conforme. Una mappa conforme con gradiente non-nullo definisce un'applicazione olomorfa. Bi-olomorfismi. Il disco unitario ed il semipiano superiore sono bi-olomorfi. Trasformazioni di Möbius. Lemma di Schwartz. Automorfismi del disco unitario e del semipiano superiore. Preliminari al teorema della mappa di Riemann: famiglie normali, uniformemente limitate sui compatti, equicontinue sui compatti. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Montel. Dimostrazione del teorema della mappa di Riemann. Funzioni armoniche. Armoniche coniugate. Caratterizzazione dei domini semplicemente connessi.

Superfici di Riemann. Esempi. Funzioni olomorfe, mappe olomorfe, funzioni meromorfe e loro proprietà fondamentali. Classificazione dei tori complessi.

Prodotti infiniti. Prodotti infiniti di funzioni olomorfe. Lo sviluppo di $\pi \cot(\pi z)$ in frazioni semplici (due dimostrazioni). Lo sviluppo di $\sin(\pi z)$ come prodotto infinito. Introduzione al teorema di fattorizzazione di Weierstrass: i fattori elementari $E_p(z)$. Teorema di fattorizzazione di Weierstrass. Esempi. La funzione sigma di Weierstrass associata ad un reticolo. Funzione P di Weierstrass. Teorema di Mittag-Leffler. Esempi. Nuovo approccio alla funzione P di Weierstrass. Sua doppia periodicità.

Funzione gamma e sue proprietà: olomorfa in $\text{Re } s > 0$, equazione funzionale, estensione meromorfa, fattorizzazione di $1/\Gamma$, formula di Eulero.

Funzione zeta, funzione theta, estensione meromorfa di zeta, formula di Eulero, zeri banali della funzione zeta. Zeta non ha zeri nella retta $\text{Re}(s)=1$. Teorema dei numeri primi, enunciato e scheletro della dimostrazione (facoltativa tutta la dimostrazione)