

Fisica Matematica

M. Pulvirenti

A.A. 09-10

I. Introduzione

Qualche informazione

Queste note sono un ausilio didattico per gli studenti del corso di Fisica Matematica, del corso di laurea in Matematica dell'A.A. 2009-2010.

Lo studente dovrà essere perfettamente conscio che queste note non possono sostituire un libro di testo per varie ragioni. Esse sono incomplete, imprecise, purtroppo carenti di esercizi ed esempi significativi e non hanno subito quel lavoro di limatura necessario anche a delle dispense che siano minimamente presentabili. E' quindi opportuno integrare la lettura di queste note con dei manuali meglio strutturati anche al fine di abituarci a consultare libri diversi ed operare quel lavoro di sintesi che ogni studente maturo deve essere in grado di fare.

Ciò nonostante spero che queste note possano essere utili a quei lettori dotati di senso critico, non disposti ad accettare affermazioni e dimostrazioni di un libro di Matematica senza avere prima ben compreso ed interiorizzato la strategia complessiva, capaci, a volte, di prevenire le linee di sviluppo e comunque disposti a meditare a lungo anche su una singola pagina se il caso lo richiede e che sappiano, infine, trarre profitto da esempi ed esercizi.

I prerequisiti necessari alla comprensione di queste note, oltre naturalmente al contenuto standard dei corsi di Analisi 1 e 2 e Meccanica Razionale sono qualche elemento di Teoria dell'integrazione, di spazi di Hilbert, serie e trasformate di Fourier.

Questi argomenti sono di regola svolti in corsi paralleli. E' interessante e formativo che lo studente acquisisca queste nozioni, largamente trattate anche nel presente corso, nel contesto di alcune loro rilevanti applicazioni.

Alcuni testi consigliati in cui tali argomenti vengono svolti sono:

- A. Kolmogorov, S. Fomine: Elements de la Theorie des Functions et de l'Analyse Functionelle, Ed. Mir (1974)
- W. Rudin: Real and complex analysis, McGraw-Hill (1970)
- M. Reed, B. Simon: Methods of modern Mathematical Physics Vol.1, Academic Press (1970)

Per quanto riguarda i libri che contengono gli argomenti svolti nelle

presenti note, segnalo

- S. Salsa: Equazioni alle derivate parziali
Metodi, Modelli e Applicazioni
(simile in spirito alle presenti note), ma anche
- A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics, Ed. MIR (1980)
- Vladimirov: Equazioni differenziali della fisica matematica, Ed. MIR
e, a un livello piú avanzato:
- Mikhailov: Equazioni differenziali alle derivate parziali, Ed MIR
- G. Evans: Partial differential equations

Per quanto riguarda le motivazioni e la formulazione dei principi della Meccanica Quantistica (senza preoccupazione di rigore) si vedano i volumi:

- Landau e Lifshitz: Quantum Mechanics
- Messiah: Quantum Mechanics.

Questo paragrafo introduttivo ha lo scopo di chiarire le finalità di un corso di Fisica Matematica orientato allo studio delle equazioni alle derivate parziali di interesse per le applicazioni.

Il primo contatto che lo studente ha avuto con la Fisica Matematica è stato nell'ambito del corso di Meccanica Razionale al secondo anno. Egli ha, in quest'occasione, verificato come la matematica costituisca un mezzo potente e insostituibile per la comprensione quantitativa del mondo reale, vedendo come, per mezzo di un *modello matematico*, si organizzino i dati fenomenici e le leggi empiriche descritte dalla fisica.

Il modello matematico della Meccanica è molto semplice e può riassumersi nel dire che il moto di sistemi di punti materiali è descritto da equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine: le leggi di Newton.

Dunque in Fisica abbiamo studiato delle leggi che hanno permesso di *modellizzare* e studiare il mondo reale con le tecniche tipiche della Meccanica, in maniera precisa e rigorosa.

La distinzione tra la Fisica, che descrive fenomeni e ne stabilisce le leggi e la Fisica Matematica che pone modelli matematici e li studia rigorosamente, non è così netta come sto affermando, ma certamente le metodologie e gli obiettivi sono diversi e, in una certa misura, complementari.

Un modello matematico del mondo reale è utile quando

- a) fornisce previsioni,
- b) tali previsioni sono in accordo con i dati sperimentali.

Vediamo come la Meccanica Classica dei punti materiali, che è il modello fondamentale della Fisica Matematica, può fallire nell'ottemperare ai punti sopra esposti.

In molte situazioni che coinvolgono sistemi a un grandissimo numero di gradi di libertà, è inapplicabile l'uso pratico delle equazioni di Newton. Ad esempio anche se l'atmosfera e la terra sono insiemi di punti materiali (molecole), nessuno penserebbe di utilizzare le leggi del moto di queste molecole per determinare il clima che si avrà tra una settimana. Per questi problemi è necessario introdurre altre equazioni che si sappiano studiare. In altre parole occorre cambiare modello e passare ad un altro più trattabile da un punto di vista pratico. In questo tipo di problemi le incognite fondamentali non sono la velocità e la posizione delle singole molecole che costituiscono il sistema in esame, ma piuttosto *campi*, che sono funzioni dello spazio e del tempo, come la distribuzione di densità, di velocità, di temperatura di un fluido. I problemi di evoluzione associati a queste funzioni di più variabili, non sono equazioni differenziali ordinarie, ma equazioni differenziali alle derivate parziali. Nel prossimo capitolo introdurremo, ad esempio, l'equazione di evoluzione per una corda o una membrana vibrante.

Questo non è in realtà un fallimento della Meccanica Classica bensì un successo. Le equazioni che otterremo sono derivate usando le leggi della meccanica per mezzo di argomenti diretti, o per mezzo di procedure di limite come vedremo nel prossimo capitolo.

Un limite più profondo della Meccanica Classica si è trovato nei primi anni del '900, quando entrano in gioco velocità prossime a quella della luce o nello studio dei fenomeni atomici. In questi due casi occorre modificare drasticamente il modello della Meccanica Classica ricorrendo alla Teoria della Relatività e alla Meccanica Quantistica rispettivamente.

In queste note non parleremo di Teoria della Relatività, ma discuteremo brevemente alcune idee di base della Meccanica Quantistica allo scopo di introdurre l'equazione di Schrödinger che è lo strumento fondamentale della teoria.

Le equazioni alle derivate parziali di cui ci occuperemo in queste note sono di vario tipo

- 1) Equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \Delta u(x, t)$$

ove c è una costante positiva, d la dimensione spaziale,

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x)$$

è l'operatore di Laplace e $t \in \mathbb{R}$ è il tempo.

2) Equazione del calore

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \nu \Delta u(x, t)$$

ove ν è una costante positiva.

3) Equazione di Laplace

$$\Delta u(x) = 0$$

4) Equazione di Poisson

$$\Delta u(x) = \rho(x).$$

ove $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata.

Un'altra equazione che studieremo in qualche dettaglio è l'equazione di Schrödinger che è l'equazione fondamentale della Meccanica Quantistica. Come vedremo il quadro concettuale di riferimento cambia drasticamente per cui la sua introduzione richiede una discussione un po' più approfondita.

Le equazioni differenziali alle derivate parziali che abbiamo ora introdotto sono tutte equazioni del secondo ordine (che vuol dire che l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione è 2) e lineari (che vuol dire che la combinazione lineare di due soluzioni è ancora soluzione). Sebbene non vogliamo studiare in queste note le equazioni del secondo ordine lineari in generale ma soltanto analizzarne qualcuna di particolare interesse per le applicazioni, vogliamo ugualmente introdurre una terminologia largamente usata, che permette di orientare il lettore nella vasta letteratura sull'argomento.

La forma generale di un'equazione lineare del secondo ordine in $D \subset \mathbb{R}^n$ è:

$$\sum_{i,j} A_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \quad (0.1)$$

dove $A_{i,j}, B_i$ e C sono funzioni reali del dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é una funzione nota. Si noti che in questa fase, non avendo l'equazione (0.1) una particolare interpretazione fisica, le variabili temporali e spaziali sono denotate nello stesso modo.

All'eqn. (0.1) vanno aggiunte condizioni al contorno, cioè occorre assegnare il valore di u o di opportune derivate prime sulla frontiera di D .

Equazioni del tipo (0.1) si classificano sulla base della struttura della matrice $A_{i,j}$ che, senza scapito di generalitá, puó assumersi simmetrica. Infatti, se non lo fosse, poiché $\partial_{x_i, x_j} = \partial_{x_j, x_i}$ potremmo sempre porre l'operatore differenziale di ordine massimo nel membro di sinistra della (I.1) nella forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} (A_{i,j} + A_{j,i}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (0.2)$$

Siano n^+, n^- e n^0 il numero di autovalori positivi negativi o nulli di $A_{i,j}$ in un punto $x \in D$. Se $n = n^+$ o $n = n^-$ allora l'equazione si dice ellittica in x . Se $n^0 > 0$ l'equazione si dice parabolica in x . Se $n^+ = 1$ e $n^- = n - 1$ oppure $n^- = 1$ e $n^+ = n - 1$ l'equazione si dice iperbolica. Se il carattere dell'equazione è mantenuto in tutti i punti del dominio D l'equazione si dir `a ellittica, parabolica o iperbolica senza alcuna altra specificazione. Esempi di equazioni ellittiche sono le equazioni di Laplace e di Poisson. L'equazione delle onde è iperbolica. L'equazione del calore, o pi `u in generale le equazioni di diffusione, sono paraboliche.

L'indice delle note è il seguente.

- I. Equazione delle onde
- II. Equazione del Calore
- III. Introduzione alla Teoria del Potenziale
- IV. Equazione di Schrödinger
- V. Appendici

Vi sono varie appendici che trattano approfondimenti o argomenti complementari al testo. Alcune di esse costituiscono argomenti facoltativi, non indispensabili alla preparazione dell'esame: esse hanno lo scopo di consentire al lettore interessato di avere un'idea di ulteriori sviluppi.

Considerazioni preliminari

In questo breve paragrafo cercheremo di illustrare, in poche parole, quello che lo studente deve principalmente apprendere nel seguire questo corso. La comprensione di quanto segue è essenziale per inquadrare correttamente i concetti che introdurremo e le metodologie che serviranno per risolvere i problemi concreti che si porranno.

Abbiamo già visto, in introduzione, che intendiamo studiare equazioni alle derivate parziali di interesse per le applicazioni. La nostra attenzione sarà rivolta essenzialmente alle equazioni lineari quali ad esempio, l'equazione del calore nell'intervallo $(0, 1)$.

Il problema che affronteremo si formula nel modo seguente. Vogliamo trovare una funzione $u = u(x, t)$ con $x \in (0, 1)$, $t > 0$, tale che

$$\partial_t u(x; t) = \Delta u(x; t) \quad (1.1)$$

ove

$$\Delta u = \partial_{xx}^2 u.$$

Per ragioni di carattere sia matematico che fisico, occorre specificare, per la soluzione, le condizioni al contorno, che per semplicità assumeremo nulle:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad \text{per } t > 0. \quad (1.2)$$

Il problema (1,1) ha molte soluzioni. Per selezionare quella che ci interessa, supporremo di conoscere lo stato del sistema a un tempo di riferimento (supporremo il tempo $t = 0$ convenzionalmente), per cui assegneremo le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.3)$$

ove u_0 è una funzione assegnata (la cui regolarità al momento non discutiamo).

Vedremo durante il corso che il problema (1,1-2-3) ammette infatti soluzione unica e che tale soluzione si può determinare in maniera abbastanza esplicita.

Abbiamo detto che l'equazione (1,1) è lineare. Ciò significa che se u e v sono due soluzioni (nulle al bordo dell'intervallo $(0, 1)$) allora anche la funzione $au + bv$ (con a e b due costanti), è ancora soluzione dell'equazione,

con le corrette condizioni la bordo e per un opportuno dato iniziale. Questo perché l'operatore di Laplace Δ soddisfa all'identità:

$$\Delta(au + bv) = a\Delta u + b\Delta v.$$

Il problema che vogliamo affrontare ha delle strette analogie con un'altro problema che lo studente ha già affrontato che andiamo ad illustrare.

Sia A una matrice $(n \times n)$, a coefficienti $A_{i,j}$ reali. Supporremo che A sia simmetrica:

$$A_{i,j} = A_{j,i}.$$

Supponiamo ora di voler studiare il problema di evoluzione in \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.4}$$

Qual'è la soluzione?

Se x_0 è il dato iniziale del problema (0,4), allora

$$x(t) = e^{At}x_0, \tag{1.5}$$

dove e^{At} è un' opportuna matrice che può essere costruita in vari modi. Se A fosse diagonale sulla base $\{e_i\}, i = 1 \dots n$, allora potremmo espandere la soluzione del problema (0,4) nella forma:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)e_i.$$

Lo studente osservi che $x_i(t)$ sono le componenti del vettore $x(t)$ e quindi numeri reali, mentre $x(t)$ e e_i sono vettori in \mathbb{R}^n . Allora

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(t)e_i.$$

e

$$Ax(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)Ae_i = \sum_{i=1}^n x_i(t)\lambda_i e_i.$$

Siamo dunque ricondotti al facile problema

$$\dot{x}_i(t) = \lambda x_i(t), \quad i = 1 \dots n$$

la cui soluzione è

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t}(x_0)_i.$$

In particolare la matrice e^{At} è diagonale sulla base $\{e_i\}$ ed ha la forma

$$e^{At}e_i = e^{\lambda_i t}e_i.$$

Per un teorema che lo studente già conosce, ogni matrice simmetrica è diagonale in un'opportuna base. Dunque il problema (1,4) è facilmente risolto attraverso la procedura algebrica di diagonalizzazione di una matrice.

Con la stessa tecnica lo studente può cercare di risolvere altri problemi quali

$$\ddot{x} = Ax,$$

oppure i problemi stazionari $Ax = 0$ e $Ax = y$ con $y \in \mathbb{R}^n$ assegnato, ben noti al lettore dal corso di algebra lineare.

Torniamo ora al problema originario (1,1-2-3). Lo spazio delle funzioni (con una certa regolarità che al momento non specifichiamo), che si annullano al bordo di $(0, 1)$, costituisce uno spazio lineare. Supponiamo ora che tale spazio possieda una base di funzioni (a priori infinito-dimensionale), per cui l'operatore di Laplace è diagonale, tale cioè che:

$$\Delta e_i = \lambda_i e_i. \tag{1.6}$$

Una famiglia (infinita) di funzioni che soddisfano a tale identità in effetti esiste. Infatti se si pone

$$e_k = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots$$

la (1,5) risulta verificata con

$$\lambda_j = -(j\pi)^2.$$

Allora se si potesse espandere ogni funzione (ragionevole) u e, in particolare, la soluzione del problema (1,1) nella forma

$$u(t) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(t)e_i. \tag{1.7}$$

staremmo a posto. Infatti procedendo come nel caso finito dimensionale avremmo:

$$\partial_t u(t) = \sum_{i=1}^n \dot{u}_i(t)e_i,$$

$$\Delta u(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(t) e_i,$$

e dunque (in caso di unicità dell'espansione (1,7)):

$$\dot{u}_i(t) = \lambda_i u_i(t).$$

Pertanto la soluzione del problema (1,1-2-3) avrebbe la forma

$$u(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} c_i e_i. \quad (1.8)$$

dove le costanti c_i devono essere calcolate in termini del dato iniziale. Dalla (0,7) risulta:

$$u_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i. \quad (1.9)$$

In questa breve spiegazione euristica non ci siamo occupati dei problemi di convergenza che saranno trattati in seguito. Al momento ci preme soltanto sottolineare l'idea generale (algebrica) di questa procedura che consiste nell'espandere una generica funzione come serie di funzioni (vedi eq.n (1,7)) su ognuna delle quali l'operatore di Laplace agisce in maniera banale e cioè come una moltiplicazione per un fattore opportuno. Nel nostro caso il fattore è $\lambda_j = -(j\pi)^2$.

La serie (1,7) è la serie di Fourier della funzione $u(t)$ e gioca un ruolo importante in molti campi della Matematica.

Incidentalmente osserviamo che la serie di Fourier è stata introdotta proprio per risolvere problemi di questo tipo.

Per esercizio il lettore può risolvere facilmente il problema del secondo ordine (corda vibrante)

$$\partial_{tt}^2 u(x; t) = \Delta u(x; t) \quad (1.10)$$

con condizioni al bordo nulle e dati iniziali:

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x).$$

Invitiamo lo studente a riflettere su queste prime pagine. La comprensione profonda di esse è un significativo passo avanti nella comprensione dell'intero corso.

I. Equazione delle onde

1. Propagazione ondosa

In questo paragrafo cercheremo di descrivere in maniera matematicamente precisa ed elementare alcuni aspetti della propagazione ondosa a partire da qualche semplice fatto sperimentale. Ci riferiamo, per semplicità, ad un canale pieno d'acqua che penseremo infinitamente esteso e di dimensione trasversale trascurabile. In accordo al linguaggio comune, un'onda è una perturbazione della posizione di equilibrio dell'acqua che, in assenza di agenti esterni, sarà a riposo con un profilo costante. Denotiamo con $u = u(x, t)$ la deviazione del pelo libero dell'acqua dalla sua posizione di equilibrio nel punto $x \in \mathbb{R}$ del canale al tempo t . Supponiamo che al tempo zero l'acqua si trovi in equilibrio e dunque $u(x, 0) = 0$. Se gettiamo un sasso nel canale ovviamente si genera una perturbazione per cui per $t > 0$, $u(x, t) \neq 0$ (vedi fig.1). Osserviamo che spesso una perturbazione esterna genera un comportamento spazio-temporale del profilo $u(x, t)$ approssimativamente periodico.

Si osserva ad esempio che un sughero galleggiante non abbandona la sua posizione iniziale x , ma oscilla verticalmente in maniera periodica. D'altra parte il profilo, a tempo fissato è anch'esso spazialmente periodico. Per queste ragioni siamo tentati di ipotizzare che la configurazione $u(x, t)$ sia del tipo

$$u(x, t) = A \sin(kx + \omega t) \quad (1.1)$$

Interpretiamo i parametri che compaiono nella formula (1.1) (vedi fig.2).

$A > 0$ è l'intensità dell'onda o la quota massima raggiunta dal pelo dell'acqua. Se λ è la lunghezza dell'onda, cioè il periodo spaziale e T il periodo di oscillazione temporale, si vede facilmente che

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.2)$$

Si osservi che con le grandezze k e ω , che hanno le dimensioni dell'inverso di una lunghezza e di un tempo, possiamo costruire una velocità c definita da:

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.3)$$

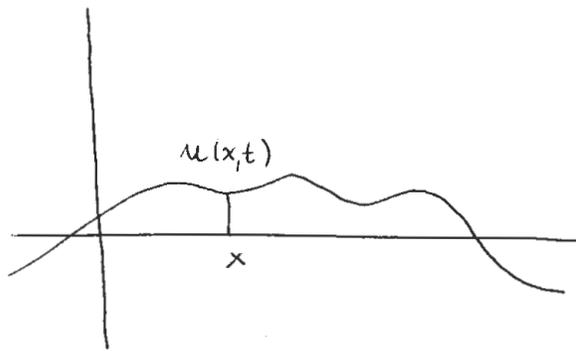


fig. 1

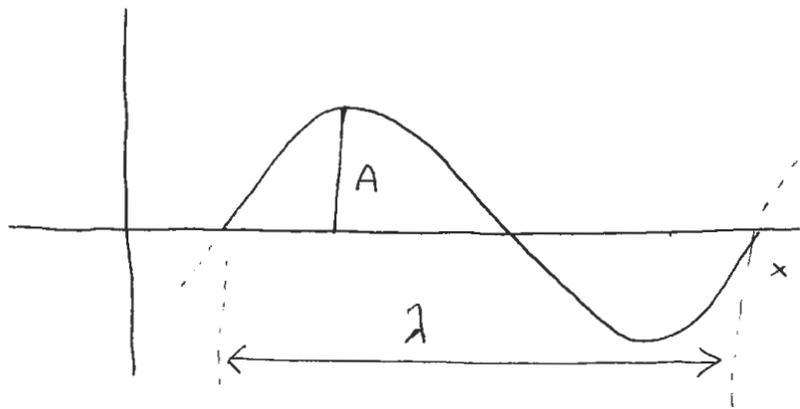


fig. 2

Tale velocità può interpretarsi come la velocità di propagazione dell'onda. Infatti sia f_0 una funzione assegnata. La funzione traslata di ct è ovviamente

$$f(x, t) = f_0(x - ct) \quad (1.4)$$

e dunque la $u(x, t)$ data dalla (1.1) non è altro che la traslazione di $u(x, 0) = A \sin kx$.

Si osservi che la funzione $u(x, t)$ soddisfa all'equazione

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u'' \quad (1.5)$$

dove denotiamo con il punto la derivata parziale rispetto a t e con il primo la derivata parziale rispetto a x . La (1.5) segue da un semplice calcolo.

Naturalmente non tutti gli esempi di propagazione ondosa sono descrivibili dal semplice andamento sinusoidale: altre soluzioni periodiche più complesse o anche soluzioni non periodiche sono possibili. Tutte queste soluzioni però debbono soddisfare all'equazione (1.5), detta equazione delle onde. Essa sarà l'oggetto di studio del presente capitolo. Altre nozioni di propagazione ondosa saranno poi sviluppate quando introdurremo la Meccanica Quantistica.

2. Derivazione euristica dell'equazione delle onde

Si consideri una corda o un elastico nel piano x, y la cui sezione sia trascurabile rispetto alla sua lunghezza che considereremo infinita. Supponiamo che la corda sia descritta da una funzione $u = u(x)$ (fig. 3) e che la sua posizione a riposo sia la configurazione $u(x) = 0$. Con questo intendiamo che, in assenza di sollecitazioni esterne, la corda si sistemerebbe in coincidenza con l'asse delle x . Si pensi, ad esempio, alla corda di una chitarra.

Il fatto di caratterizzare le configurazioni della corda con una funzione e non con una più generale curva, esclude a priori situazioni del tipo in figura 4.

Questa assunzione non è restrittiva nell'ambito dei moti che intendiamo trattare. Tali moti sono, in un senso che preciseremo tra poco, puramente trasversali e danno luogo a configurazioni ammissibili descritte da funzioni $u = u(x)$.

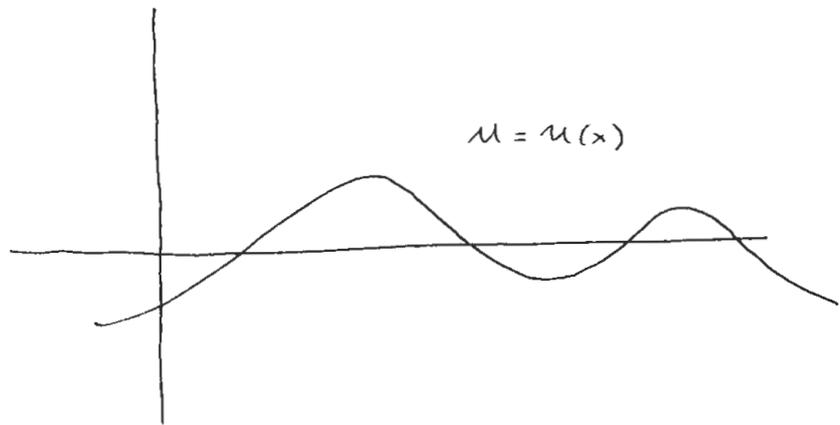


fig. 3

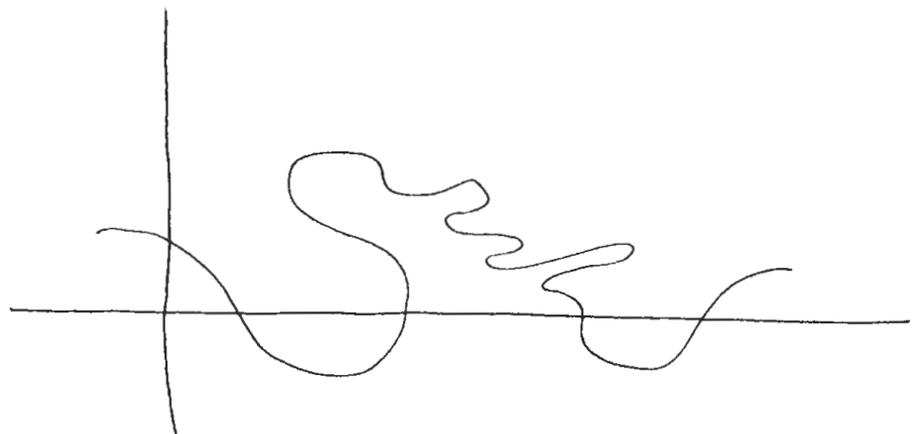


fig. 4

La corda dovrà essere pensata da un continuo di punti materiali la cui distribuzione di massa é caratterizzata da una funzione densità $\rho = \rho(x)$. Questo significa che il pezzetto di corda compreso tra il punto x e il punto $x + dx$ può essere considerato come un punto materiale di massa ρdx . Affinché ciò sia vero occorre che non ci sia trasporto di massa in senso longitudinale (nel senso delle ascisse), ma solo in senso verticale (o trasversalmente nel senso delle ordinate, vedi fig.5).

Il moto avverrà in maniera puramente trasversale se le forze che agiscono sul generico pezzetto di corda sono verticali. Tali forze sono di due tipi. Quelle esterne, tipo gravità, e quelle dovute al resto della corda. Mentre le prime sono per definizione note, le seconde sono incognite per cui dovremo fare delle ulteriori ipotesi per derivare un'equazione utilizzabile.

Cominciamo con lo scrivere l'equazione di Newton per il tratto di corda compreso tra x e $x + dx$. Essa é:

$$\rho(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x) = f(x, t)dx - \quad (2.1)$$

$$|T(x, t)| \sin \theta(x, t) - |T(x + dx, t)| \sin \theta(x + dx, t),$$

dove $f(x, t)$ é la densità di forza (verticale) esercitata da azioni esterne ed é supposta nota. $T(x, t)$ é la forza esercitata dal resto della corda nel punto x al tempo t . Essa, come vettore, é tangente alla corda (fig.6).

Poiché le forze orizzontali debbono bilanciarsi, risulta:

$$|T(x, t)| \cos \theta(x, t) = |T(x + dx, t)| \cos \theta(x + dx, t), \quad (2.2)$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial x} (|T(x, t)| \cos \theta(x, t)) = 0 \quad (2.3)$$

Dunque $|T(x, t)| \cos \theta(x, t)$ é costante in x , per ogni t . In ipotesi di piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio $u = 0$, $\cos \theta \approx 1$, dunque possiamo assumere $|T(x, t)|$ costante in x per ogni t . Tale costante denotata con T_0 é una caratteristica della corda, che può essere assunta, per ovvie ragioni fisiche, anche costante nel tempo.

Infine, sempre a causa dei piccoli spostamenti,

$$\sin \theta(x, t) \approx \tan \theta(x, t) = \partial_x u(x, t). \quad (2.4)$$

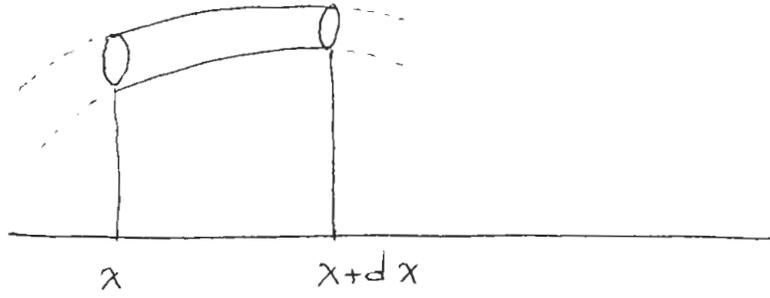


fig. 5

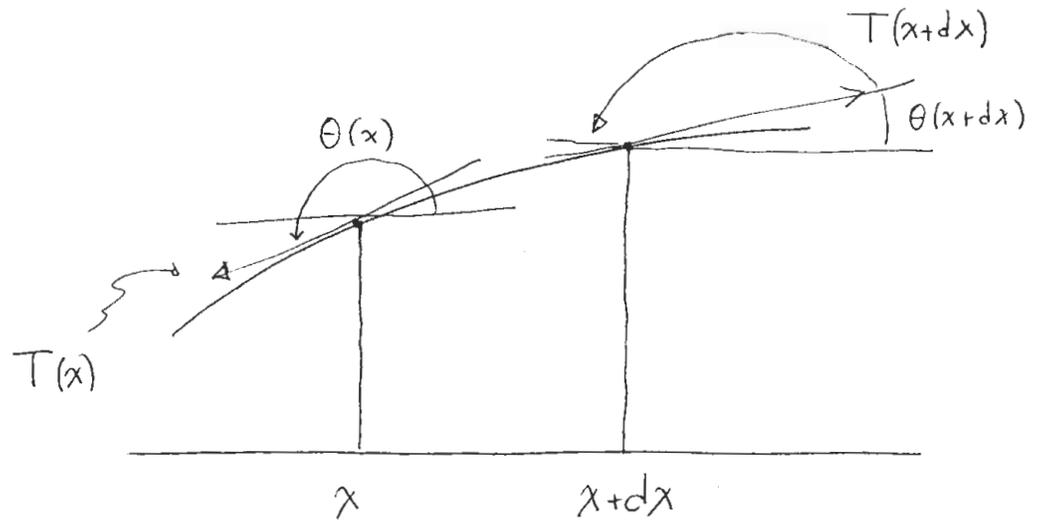


fig. 6

Dalla (2.1) otteniamo dunque:

$$\rho_0 \ddot{u}(x, t) dx = f(x, t) dx + T_0 (u'(x + dx, t) - u'(x, t)) \quad (2.5)$$

dove abbiamo supposto $\rho(x)$ costante (la corda é omogenea) e pari al valore ρ_0 ed abbiamo usato le comode notazioni $\partial_t u = \dot{u}$, $\partial_x u = u'$.

Dalla (2.5) si ottiene finalmente:

$$\rho_0 \ddot{u}(x, t) = f(x, t) + T_0 u''(x, t). \quad (2.6)$$

In assenza di forze esterne:

$$\ddot{u}(x, t) = \frac{T_0}{\rho_0} u''(x, t). \quad (2.7)$$

Si noti che la costante $\frac{T_0}{\rho_0}$ ha le dimensioni di una velocità.

Le considerazioni sin qui svolte si applicano anche al caso della membrana vibrante, ad esempio un tamburo, oppure ad un solido vibrante, ad esempio il materasso di un letto. In questo caso l'equazione risultante é:

$$\rho_0 \ddot{u}(x, t) = T_0 \Delta u(x, t). \quad (2.8)$$

L'operatore Δ , che giocherà un ruolo importante in queste note, si chiama Laplaciano (o operatore di Laplace) ed é definito come:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 u, \quad (2.9)$$

ove $n = 1, 2, 3$ é la dimensione dello spazio fisico.

L'equazione (2.8) si chiama equazione delle onde perché, come vedremo, ammette soluzioni di tipo ondoso.

La versione inhomogenea si scrive:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 \Delta u(x, t) + F(x, t). \quad (2.10)$$

dove c é una costante con le dimensioni di una velocità e F é una forza per unità di massa.

L'equazione delle onde interviene nella descrizione di altri fenomeni fisici.

Consideriamo le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho; \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (2.11)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{H}; \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}(\mathbf{J} + \partial_t\mathbf{E}) \quad (2.12)$$

dove ρ e \mathbf{J} sono le densità di carica e corrente rispettivamente, mentre c è la velocità della luce nel vuoto.

Supponiamo ora che $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$. Usando la relazione

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V} = -\Delta\mathbf{V} + \nabla\operatorname{div}\mathbf{V} \quad (2.13)$$

valida per un generico campo vettoriale \mathbf{V} (di facile verifica), si perviene, in assenza di densità e correnti, all'equazione

$$\ddot{u}(x, t) = c^2\Delta u(x, t) \quad (2.14)$$

per una qualunque componente u del campo elettrico e magnetico. Dunque il campo elettromagnetico si propaga in accordo all'equazione delle onde.

Abbiamo dunque visto come le configurazioni della corda (membrana, solido) vibrante, oppure le componenti del campo elettromagnetico, si evolvono in accordo all'equazione delle onde. Vi sono però molti altri fenomeni di interesse, con cui abbiamo frequentemente a che fare nella vita quotidiana, che sono descrivibili in termini di equazione delle onde. Ad esempio le onde sonore che sono onde di compressione e rarefazione di un gas. Esse sono responsabili della propagazione dei segnali sonori, in particolare della musica. Ad esempio la corda di una chitarra vibra ad una data frequenza (nota). L'aria circostante viene perturbata e produce onde di densità che ereditano la frequenza di vibrazione della corda. Le onde sonore, a loro volta, producono una vibrazione del timpano dell'orecchio, che è una membrana vibrante.

La derivazione dell'equazione delle onde per la densità di un gas, prevede un'analisi preliminare, di interesse intrinseco, sull'evoluzione dei fluidi ideali, che sarà svolta nelle Appendici F e G.

Concludiamo questo paragrafo con l'analisi delle condizioni al contorno. Ritorniamo al caso della corda vibrante, la cui equazione riscriviamo per comodità:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t). \quad (2.15)$$

Per risolvere l'equazione (2.15), cioè determinare u al tempo $t > 0$, dobbiamo certamente conoscere lo stato fisico del sistema a un tempo precedente. Al solito fissiamo l'istante zero come l'istante di riferimento. L'equazione é del secondo ordine e dunque dobbiamo fissare il profilo della corda e il campo di velocità (in analogia con la meccanica):

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x). \quad (2.16)$$

ove $u_0, v_0(x)$ sono due funzioni assegnate.

Se la corda é localizzata nel segmento $[0, L]$ dobbiamo poi specificare le condizioni al contorno, dobbiamo cioè dire cosa fa la corda agli estremi dell'intervallo. Possiamo ad esempio fissare un comportamento delle elongazioni:

$$u(0, t) = a(t); \quad u(L, t) = b(t), \quad (2.17)$$

dove a e b sono due funzioni del tempo assegnate. Si pensi ad esempio ad una corda fissata ad un estremo ($a = 0$), e arbitrariamente mossa (per mezzo della legge b) all'altro.

Possiamo altresí fissare agli estremi le tensioni (che sono proporzionali alla derivata spaziale) lasciando incognite le elongazioni. Ciò significa imporre

$$u'(0, t) = a(t); \quad u'(L, t) = b(t). \quad (2.18)$$

Le condizioni (2.17) e (2.18) vengono dette di Dirichlet e Neumann rispettivamente. Saranno le uniche condizioni al contorno che considereremo.

3. Derivazione microscopica dell'equazione della corda vibrante

In questo paragrafo considereremo una derivazione dell'equazione della corda vibrante concettualmente diversa da quella discussa nel precedente capitolo. Lo scopo é quello di ricondurre il modello matematico della corda vibrante, descritto dall'equazione (2.7) del precedente paragrafo, a quello piú familiare di un sistema meccanico a un numero finito di gradi di libertà.

Si consideri dunque una corda vibrante i cui estremi siano fissati agli estremi dell'intervallo $[0, L]$. Uno stato fisico del sistema é descritto dal

profilo della corda, cioè una funzione reale $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ e dalla velocità v di ogni sua molecola che è un punto del grafico del profilo. Si assumerà che la corda possa vibrare solo trasversalmente per cui v ha la sola componente verticale non nulla.

Supporremo la corda formata da molte particelle di taglia molto piccola per cui una buona approssimazione finito dimensionale del sistema si otterrà considerando un sistema meccanico formato da un numero molto grande, ma finito, di particelle del tipo in figura 7. Una descrizione precisa di questa approssimazione è la seguente. Dividiamo l'intervallo $[0, L]$ in N segmenti denotati con $(k\frac{L}{N}, (k+1)\frac{L}{N})$ con $k = 0 \dots N-1$. Su ogni sito $k\frac{L}{N}$ è posto un oscillatore che può vibrare nella direzione ortogonale al segmento $[0, L]$. La sua elongazione è denotata con u_k . Tutti gli oscillatori sono identici. Tra un oscillatore localizzato in $k\frac{L}{N}$ e i suoi primi vicini, quelli localizzati in $(k-1)\frac{L}{N}$ e $(k+1)\frac{L}{N}$, si ipotizza un'interazione elastica proporzionale alle differenze delle elongazioni. La forza agente sull'oscillatore k -mo è supposta agire verticalmente e la sua intensità è:

$$K[(u_{k-1} - u_k) + (u_{k+1} - u_k)]$$

con K una costante positiva.

Se si assume che tutti gli oscillatori hanno massa identica, $m > 0$, le equazioni del moto per il sistema (a $N-1$ gradi di libertà) sono:

$$m\ddot{u}_k = K[(u_{k-1} - u_k) + (u_{k+1} - u_k)], \quad k = 1 \dots N-1, \quad (3.1)$$

dove si sta assumendo che gli oscillatori estremi, posti in 0 e in L (che corrispondono agli indici 0 e N), sono nella posizione di riposo, di elongazione nulla. Ciò corrisponde, a livello di sistema continuo, ad assumere le condizioni di Dirichlet nulle: $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Come conseguenza l'energia del sistema è data dall'espressione

$$H_N = \frac{1}{2}m \sum_{k=1}^{N-1} \dot{u}_k^2 + \frac{1}{2}K \sum_{k=0}^{N-1} (u_{k+1} - u_k)^2. \quad (3.2)$$

È evidente che per descrivere la corda continua, siamo interessati al limite $N \rightarrow \infty$ che analizzeremo da un punto di vista euristico.

Cominciamo con l'osservare che la massa totale della corda è assunta finita. Questo significa che le masse degli oscillatori debbono essere riscal-

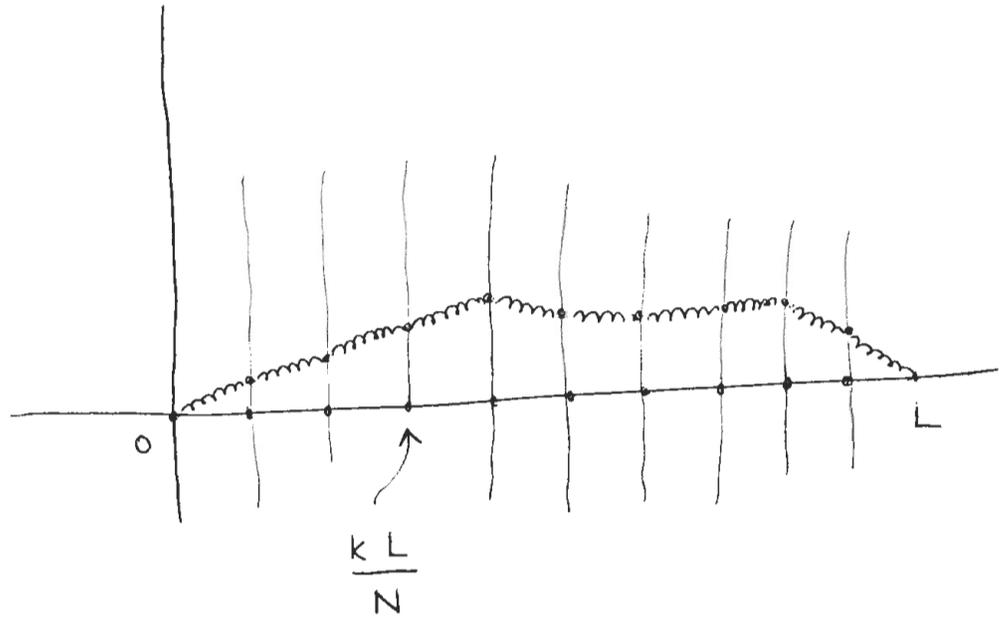


fig. 7

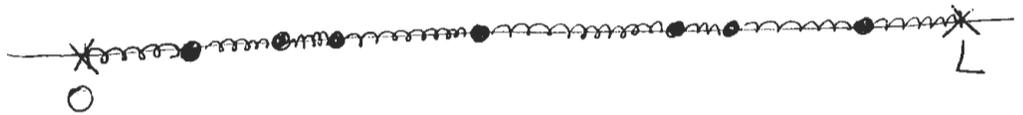


fig. 8

late. Introducendo un nuovo parametro $\varepsilon = \frac{L}{N}$ (la lunghezza di ogni intervallino), si pone $m = \mu\varepsilon$. Da questo segue che μ ha le dimensioni di una densità lineare. Tale parametro, in accordo con il fatto che abbiamo scelto uguale la massa degli oscillatori, è la densità di massa della corda assunta costante.

Poiché siamo interessati a configurazioni continue della corda, deve accadere che $u_k \rightarrow u_{k+1}$. Perché ciò avvenga, la forza tra un oscillatore e i suoi primi vicini deve essere molto forte. Dunque riscaldiamo K nel modo seguente: $K = \sigma\varepsilon^{-1}$. L'espressione (3.2) diventa:

$$H_N = \frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon \dot{u}_k^2 + \frac{1}{2}\sigma \sum_{k=1}^{N-1} \varepsilon \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{\varepsilon} \right)^2 \quad (3.3)$$

Assumendo infine che esista una funzione regolare $u = u(x, t)$ per cui $u_k(t) = u(k\frac{L}{N}, t)$, ricordando la definizione di integrale di Riemann, ci si convince che l'espressione (3.2) converge, nel limite $N \rightarrow \infty$, alla quantità:

$$H(u, \dot{u}) = \frac{1}{2}\mu \int_0^L dx \dot{u}(x, t)^2 + \frac{1}{2}\sigma \int_0^L dx u'(x, t)^2, \quad (3.4)$$

dove abbiamo posto $\dot{u} = \partial_t u$ e $u' = \partial_x u$.

Si passi ora ad analizzare le equazioni del moto (3.1). Inserendo le grandezze riscalate, otteniamo:

$$\mu \ddot{u}_k = \sigma \left(\frac{u_{k-1} + u_{k+1} - 2u_k}{\varepsilon^2} \right) = \sigma (D_\varepsilon^+ D_\varepsilon^- u)_k \quad (3.5)$$

dove abbiamo posto $(D_\varepsilon^+ u)_k = \varepsilon^{-1}(u_{k+1} - u_k)$ e $(D_\varepsilon^- u)_k = -\varepsilon^{-1}(u_{k-1} - u_k)$ i rapporti incrementali destro e sinistro rispettivamente. Riconoscendo il laplaciano discreto nel membro di destra dell'equazione (3.5), otteniamo come limite formale:

$$\mu \ddot{u} = \sigma u'' \quad (3.6)$$

All'equazione (3.6) occorre aggiungere le condizioni al contorno:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.7)$$

e le condizioni iniziali:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (3.8)$$

dove u_0 e v_0 sono funzioni note che descrivono lo stato iniziale del nostro sistema fisico. Risolvendo la (3.6) possiamo dunque sapere lo stato del sistema $u(x, t)$ e $\dot{u}(x, t)$ a tempi successivi, sempre che la nostra modellizzazione sia accurata per il problema concreto in esame.

Si verifichi come esercizio che $\frac{d}{dt}H(u, \dot{u}) = 0$ se $u = u(x, t)$ si evolve in accordo all'eq. (3.6) con le condizioni al contorno $u(0, t) = u(L, t) = \dot{u}(0, t) = \dot{u}(L, t) = 0$. Il funzionale H é dunque un integrale primo per la nostra equazione ed é esattamente l'energia. Essa si conserva poiché non abbiamo ipotizzato alcun meccanismo di dissipazione nel sistema.

Si osservi l' equazione (3.6) é stata ottenuta nell'ipotesi in cui non c'è trasferimento di materia per la corda (cosí come per i sistemi approssimanti), nella direzione parallela al segmento $[0, L]$: ogni particella che compone la corda, può vibrare solo nella direzione trasversa.

Da un punto di vista fisico la nostra derivazione euristica é opinabile. Abbiamo infatti ipotizzato che le interazioni tra le particelle microscopiche che compongono la corda sono di tipo lineare e comunque puramente trasverse. Nella pratica tali ipotesi sono verificate soltanto per piccoli spostamenti della corda dalla sua posizione di riposo $u = 0$.

Inoltre, da un punto di vista matematico, la nostra derivazione é carente di rigore. Non si é mostrato che le soluzioni delle equazioni del sistema di oscillatori convergono alle soluzioni dell'equazione alle derivate parziali (3.6) (come ci si aspetta) allorquando i dati iniziali del sistema di oscillatori convergono ai dati iniziali per il Problema di Cauchy per la corda vibrante. In effetti é possibile dimostrare questa affermazione che discuteremo in seguito. Per il momento ci accontentiamo di osservare che la presente derivazione dell'equazione della corda vibrante é rigorizzabile nel senso che il modello matematico della corda vibrante é ottenibile, per mezzo di una procedura di limite continuo, da un altro modello matematico già acquisito, che é quello della meccanica dei sistemi di punti materiali soggetti a forze conservative.

Determiniamo ora alcune soluzioni particolari della (3.6) con un metodo che viene detto di separazione delle variabili (di piú ampia applicabilitá) e che consiste nella strategia seguente. La funzione cercata $u(x, t)$ dipende

dalle due variabili x e t . Cerchiamo una soluzione di tipo prodotto:

$$u(x, t) = U(x)V(t). \quad (3.9)$$

Applicando la (3.6) si ottiene:

$$\frac{\mu}{\sigma} \frac{\ddot{V}}{V} = \frac{U''}{U} \quad (3.10)$$

Dall'identità (3.10) segue che le quantità $\frac{\ddot{V}}{V}$ e $\frac{U''}{U}$ sono costanti (infatti il membro di sinistra della (3.10) dipende solo da t mentre il membro di destra dipende solo da x). Ponendo $U''/U = -\lambda$ (il segno meno è stato posto per convenienza notazionale), otteniamo le equazioni differenziali ordinarie:

$$\ddot{V} = -\lambda \frac{\sigma}{\mu} V, \quad (3.11)$$

$$U'' = -\lambda U. \quad (3.12)$$

Per $\lambda > 0$ l'equazione (3.12) è quella di un oscillatore armonico ed ha dunque soluzioni oscillanti. Oppure, per $\lambda < 0$ ha soluzioni esponenziali. Le condizioni al contorno ci impongono la condizione $U(0) = U(L) = 0$ e ciò ci forza a porre $\lambda > 0$. La soluzione generale della (3.12) è dunque

$$U(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x,$$

da cui, usando le condizioni al contorno, determiniamo $\sqrt{\lambda} = k \frac{\pi}{L}$ e

$$U(x) = C_1 \sin k \frac{\pi}{L} x$$

con $k = 1, 2, \dots$

Dalla (3.11) otteniamo anche che:

$$V(t) = A \cos k \frac{\pi \nu}{L} t + B \sin k \frac{\pi \nu}{L} t$$

dove abbiamo posto $\nu = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$.

In conclusione:

$$u(x, t) = \sin k \frac{\pi}{L} x (A \cos k \frac{\pi \nu}{L} t + B \sin k \frac{\pi \nu}{L} t) \quad (3.13)$$

è una soluzione dell'equazione (3.6) con condizione al contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Questa semplice analisi suggerisce come si costruirá una generica soluzione del problema ai valori iniziali associato all'equazione (3.6), cosa che sará fatta nel prossimo paragrafo per mezzo della serie di Fourier.

Abbiamo accennato al fatto che non c'è trasporto di materia nell'equazione delle onde che abbiamo introdotto. Per questa ragione le onde soluzioni che si ottengono per questa equazione vengono dette onde trasversali. E' possibile tuttavia ipotizzare un diverso modello di oscillatori, che dá luogo alla stessa equazione, che però descrive onde longitudinali.

Si consideri la catena di oscillatori in figura 8.

Si osservi che la posizione di equilibrio del k -mo oscillatore é sempre $k \frac{L}{N}$. Tale oscillatore si può spostare a destra e a sinistra e la differenza dalla sua posizione di equilibrio é denotata con u_k . La forza che su di esso agisce é data ancora dall'espressione $K[(u_{k-1} - u_k) + (u_{k+1} - u_k)]$, ma questa volta la sua direzione é orizzontale.

Lo stesso tipo di limite descritto sopra porta ancora all'equazione (3.6), ma in questo caso essa descrive l'evoluzione di un elastico rigorosamente orizzontale in cui $u(x)$ é lo spostamento della particella di elastico che, nella posizione di riposo, si trova in x . Le soluzioni ondose che otteniamo sono dette onde longitudinali per ovvie ragioni. A differenza delle onde trasversali, in questo caso si ha variazione di densità di massa. Si noti che tali soluzioni possono descrivere fenomeni di trasmissione del suono nei gas in cui il fenomeno principale é la propagazione di gradienti di densità.

4. Soluzione dell'equazione della corda vibrante

In questo paragrafo ci poniamo l'obiettivo di risolvere il problema ai valori iniziali e al contorno relativi all'equazione (3.6). In altre parole, assegnate due funzioni u_0 e v_0 , continue e nulle al bordo, vogliamo trovare una funzione $u = u(x, t)$, che soddisfa ai seguenti requisiti:

$$\mu \ddot{u} = \sigma u'' \tag{4.1}$$

$$u(0, t) = u(L, t) \tag{4.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x). \tag{4.3}$$

Dall'analisi svolta nel precedente paragrafo e dalla linearità dell'equazione risulta che l'equazione (4.1) ammette la soluzione formale:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k \frac{\pi}{L} x (A_k \cos k \frac{\pi \nu}{L} t + B_k \sin k \frac{\pi \nu}{L} t). \quad (4.4)$$

I coefficienti A_k e B_k sono al momento arbitrari e possono essere determinati al fine di soddisfare le condizioni iniziali (4.3). Le condizioni al contorno (4.2) sono automaticamente verificate dalla scelta del tipo di soluzioni cercate.

Deve essere:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k \frac{\pi}{L} x \quad (4.5)$$

e

$$v_0(x) = \dot{u}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \frac{\pi \nu}{L} \sin k \frac{\pi}{L} x \quad (4.6)$$

Dalle (4.5) e (4.6) si riconosce lo sviluppo di Fourier delle funzioni u_0 e v_0 nell'intervallo $[-L, L]$. Infatti in tale intervallo una funzione $f = f(x)$ dispari (tale cioè che $f(x) = -f(-x)$) ammette lo sviluppo in seni $f(x) = \sum_k \sin \frac{2\pi}{2L} kx$. Dalla teoria della serie di Fourier otteniamo pertanto i coefficienti dello sviluppo in termini dei dati iniziali per mezzo delle formule:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin k \frac{\pi}{L} x dx \quad (4.7)$$

$$B_k = \frac{2L}{k\pi\nu} \int_0^L v_0(x) \sin k \frac{\pi}{L} x dx. \quad (4.8)$$

Si rimanda il lettore all'Appendice A per richiami sulla serie di Fourier. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.1

Siano $(u_0, v_0) \in C_0^\infty([0, L]) \times C_0^\infty([0, L])$. Allora la serie (4.4) è assolutamente convergente in x per ogni $t \geq 0$. La funzione $u = u(x, t)$ è l'unica soluzione del problema ai valori iniziali e al contorno (4.,1,2,3).

L'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2}\mu \int_0^L dx \dot{u}(x, t)^2 + \frac{1}{2}\sigma \int_0^L dx u'(x, t)^2 \quad (4.9)$$

si conserva durante il moto.

Dim. Se u_0 e v_0 sono infinitamente differenziabili, i coefficienti di Fourier decadono, in k piú rapidamente di un qualunque polinomio:

$$|A_k| + |B_k| \leq \frac{C(p)}{|k|^p},$$

con p arbitrario. Quindi la serie che definisce u , cosí come la serie delle derivate prime e seconde in x e t , é convergente assolutamente e uniformemente per $x \in [0, L]$ e $t \in [0, T]$, ove $T > 0$ é prefissato. Ne segue che u é derivabile per serie almeno due volte rispetto a x e t e pertanto soddisfa all'equazione delle onde. La conservazione dell'energia segue da verifica diretta. Per quanto riguarda l'unicitá, si considerino due soluzioni dello stesso problema. La differenza (denotata con $h(x, t)$) é ancora soluzione con dato iniziale nullo. Per la conservazione dell'energia h ha energia nulla per tutti i tempi e dunque:

$$\int_0^L dx \dot{h}(x, t)^2 = \int_0^L dx h'(x, t)^2 = 0. \quad (4.10)$$

Ne segue che h é identicamente nulla. ■

Osservazione. Nella dimostrazione di Teorema 2.1 abbiamo fatto delle ipotesi molto restrittive. Per richiedere che i coefficienti di Fourier di u_0 e v_0 decadano piú rapidamente di ogni potenza, abbiamo ipotizzato che esse fossero funzioni C^∞ come funzioni periodiche in tutto l'asse reale. Questo non é naturalmente garantito dalla semplice richiesta che $u_0, v_0 \in C^\infty((0, L))$, perché le loro estensioni dispari potrebbero avere qualche discontinuitá di salto di qualche derivata sul bordo. Per evitare questo abbiamo ipotizzato che u_0 e v_0 fossero nulle assieme a tutte le derivate sul bordo. Questa é un'ipotesi troppo forte per trattare tutti i casi fisicamente interessanti. Per evitare questioni di regolaritá e di convergenza della serie di Fourier (4.4) possiamo limitarci a "definire" soluzione dell'equazione delle onde, qualunque soluzione espressa per mezzo della serie (4.4) ove tale serie risulti convergente. In ogni caso vedremo, con la costruzione della soluzione di D'Alambert, come sia possibile la costruzione di una soluzione (col metodo delle riflessioni) del problema (4.1), (4.2), (4.3) piú generale e del tutto soddisfacente.

La corda vibrante é un esempio, il piú semplice non banale, di sistema meccanico a infiniti gradi di libert . In qualche senso é l'equivalente infinito dimensionale dell'oscillatore armonico. Tale analogia é molto stretta come si vede dalla seguente osservazione. Se scriviamo la soluzione del problema della corda vibrante nella forma:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin k \frac{\pi}{L} x \quad (4.11)$$

cio  considerando lo sviluppo di Fourier di $u(x, t)$ con coefficienti dipendenti dal tempo, ne segue che tali coefficienti soddisfano all'equazione:

$$\ddot{V}_k = -\omega_k^2 V_k \quad (4.12)$$

con $\omega_k = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} \frac{k\pi}{L}$, cio  l'equazione di un oscillatore armonico con frequenza $\frac{k}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$. Pertanto la dinamica di una corda vibrante pu  essere pensata come la dinamica di infiniti oscillatori disaccoppiati con energia:

$$E_k = \frac{1}{2} (\dot{V}_k^2 + \omega_k^2 V_k^2) \quad (4.13)$$

Esercizio 1. Verificare che l'energia totale (4.9) assume la forma

$$E = \sum_k E_k$$

con E_k dato dalla (4.13).

Esercizio 2. Il limite formale della Lagrangiana associata all'energia (3.2) é ovviamente:

$$\mathcal{L}(u, \dot{u}) = \frac{1}{2} \mu \int_0^L dx \dot{u}(x, t)^2 - \frac{1}{2} \sigma \int_0^L dx u'(x, t)^2.$$

Si ottenga l'equazione (4.1) come equazione di Eulero Lagrange associata al principio di Azione Stazionaria relativo a tale Lagrangiana.

Suggerimento. Si introduca lo spazio dei moti definito come la famiglia di funzioni in $C^2([0, L] \times [0, T])$ con profili iniziali e finali fissati: $u(x, 0) =$

$u_0(x); u(x, T) = u_1(x)$ con u_0 e u_1 funzioni assegnate. Sullo spazio dei moti si definisce l'azione:

$$A(u) = \int_0^T dt \mathcal{L}(u(t), \dot{u}(t))$$

Si impone la stazionarietà di A .

Esercizio 3. Dimostrare che esistono dati iniziali per la corda vibrante che danno luogo a soluzioni periodiche.

Esercizio 4. Assumere che sul sistema di oscillatori di energia (3.2) agisce anche la forza peso e una forza di richiamo sulla posizione di riposo di ogni singolo oscillatore pari a $-\varepsilon\lambda u_k$. Mostrare che l'equazione della corda vibrante associata è:

$$\mu\ddot{u} = \sigma u'' - \lambda u - \beta\dot{u} - g$$

Esercizio 5. Risolvere per separazione delle variabili

$$\mu\ddot{u} = \sigma u'' - \beta\dot{u}$$

Esercizio 6. Risolvere l'equazione

$$\mu\ddot{u} = \sigma u''$$

in $[0, L]$ con condizioni nulle al bordo e dato iniziale

$$u_0(x) = 0, \quad v_0(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Esercizio 7. Risolvere l'equazione

$$\mu\ddot{u} = \sigma u''$$

in $[0, L]$ per separazione delle variabili con condizioni al bordo

$$u'(0, t) = u'(L, t) = 0.$$

L'analisi fin qui svolta sulla corda vibrante in un segmento preassegnato può parzialmente estendersi alla membrana o al solido vibrante che sono le

versioni bidimensionali e tridimensionali della corda vibrante. Le equazioni relative possono essere ottenute a partire da sistemi di oscillatori che vibrano attorno a siti di reticoli di dimensione arbitraria, seguendo l'analisi sviluppata per il caso unidimensionale. Il problema ai valori iniziali e al contorno (con condizioni nulle al bordo) si scrive:

$$\mu \partial_{tt} u(x, t) = \sigma \Delta u(x, t), \quad x \in D, \quad t \in [0, T] \quad (4.14)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial D \quad (4.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (4.16)$$

dove $D \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ è un dominio regolare dello spazio fisico e u_0 e v_0 sono dei dati iniziali assegnati.

Se sul sistema agisce una forza di richiamo di costante $\lambda > 0$, una forza esterna (per unità di massa) assegnata f e una viscosità β l'equazione risultante è:

$$\mu \partial_{tt} u(x, t) = \sigma \Delta u(x, t) - \lambda u(x, t) - \beta \dot{u} + f(x) \quad (4.17)$$

L'equazione (4.17) (o anche la più semplice (4.14)), non è più risolvibile per serie di Fourier nel caso di un generico dominio D .

Torneremo su questo punto in seguito.

Esercizio 8 Si risolva il problema (4.14) per $n = 2$ (membrana vibrante) nel caso in cui $D = [0, L_1] \times [0, L_2]$, usando la serie di Fourier in dimensione 2.

Quanto discusso in questo paragrafo permette al lettore di risolvere i problemi di evoluzione di una corda vibrante in un intervallo per mezzo della serie di Fourier ed apprezzare, nel contempo, la potenza di questo metodo. Le condizioni al contorno date dal problema ci dicono quale sviluppo ipotizzare sulla soluzione. La determinazione dei coefficienti segue dall'inserire tale sviluppo nell'equazione e risolvere il problema differenziale ordinario (naturalmente lineare) che viene fuori.

Esercizio 9 Risolvere il problema ai valori iniziali relativo all'equazione

$$\mu \ddot{u} = \sigma u''$$

in $[0, L]$ per un dato iniziale generico e condizioni al bordo

$$u'(0, t) = u'(L, t) = 0,$$

$$u(0, t) = u'(L, t) = 0.$$

Concludiamo questo paragrafo con un problema che abbiamo lasciato in sospeso e cioè dimostrare rigorosamente che la soluzione dell'equazione della corda vibrante é effettivamente approssimata dalla dinamica degli oscillatori armonici nel limite $N \rightarrow \infty$.

Quest'ultimo argomento si colloca a un livello di difficoltà lievemente superiore rispetto al resto del paragrafo e può essere omesso in prima lettura.

Il punto di partenza é l'equazione (3.5) in cui poniamo per semplicitá $\sigma = 1$.

Dato un profilo di oscillatori $\{u_k\}_{k=1}^N$, definiamo una funzione u_ε nel modo seguente

$$u_\varepsilon(x) = u_k, \quad x \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon).$$

In altre parole u_ε é una funzione a scala, costante sugli intervalli $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$ e che assume il valore dell'oscillatore posto nell'estremo di sinistra. Estendiamo poi la funzione in tutto l'asse reale facendogli assumere il valore nullo al di fuori di $[0, L]$.

Sulla base della (3.5) si ha:

$$\mu \ddot{u}_\varepsilon(x, t) = (D_\varepsilon^+ D_\varepsilon^- u_\varepsilon)(x, t) \tag{4.18}$$

ove

$$D_\varepsilon^\pm = \frac{f(x \pm \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

sono i rapporti incrementali destro e sinistro.

Si noti inoltre che vale la seguente identitá (integrazione per parti discreta):

$$\int f(x) D_\varepsilon^+ g(x) = - \int D_\varepsilon^- f(x) g(x).$$

Gli integrali, adesso e nel seguito, si intendono in tutto l'asse reale in assenza di ulteriori specificazioni.

Al tempo zero sia u_0 e $v_0 = \dot{u}(t = 0)$ lo stato iniziale della corda vibrante. Lo stato del sistema di oscillatori, descritto ora dalla funzione u_ε , sará simile al profilo continuo della corda. Si assumerá perció, $x \in [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$:

$$u_\varepsilon^0(x) := u_\varepsilon(x, 0) = u_0(\varepsilon k) \quad \dot{u}_\varepsilon^0(x) := \dot{u}_\varepsilon(x, 0) = v_0(\varepsilon k).$$

Dunque per ε piccolo, i profili iniziali degli oscillatori e della corda, così come le velocità associate, sono molto prossimi. Il problema é dunque dimostrare che tale prossimitá si conserva durante il moto.

Vogliamo essere piú precisi. Per u_0 e v_0 funzioni continue a supporto compatto, vale:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |u_0(x) - u_\varepsilon^0(x)|^2 = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |v_0(x) - v_\varepsilon^0(x)|^2 = 0. \quad (4.19)$$

Tale proprietá dovrebbe essere nota allo studente, comunque la convergenza L^2 espressa dalla formula (4.19) é di immediata verifica. Il problema che ci poniamo é dimostrare la stessa convergenza, assicurata per ipotesi al tempo zero, anche al tempo $t > 0$.

A tal fine introduciamo la seguente quantitá:

$$W_\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int |\dot{u}_\varepsilon(x, t) - \dot{u}(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int |D_\varepsilon^+(u_\varepsilon(x, t) - u(x, t))|^2 dx, \quad (4.20)$$

ove $u(x, t)$ é la soluzione dell'equazione delle onde con dato iniziale u_0 e v_0 chge supporremo sufficientemente regolari affinché tale soluzione esista.

Allora risulta:

$$\dot{W}_\varepsilon(t) = \int (\dot{u}_\varepsilon - \dot{u})(\ddot{u}_\varepsilon - \ddot{u}) dx + \int D_\varepsilon^+(u_\varepsilon - u) D_\varepsilon^+(\dot{u}_\varepsilon - \dot{u}) dx, \quad (4.21)$$

da cui, usando le equazioni del moto e l'integrazione per parti discreta,

$$\begin{aligned} \dot{W}_\varepsilon(t) &= \int (\dot{u}_\varepsilon - \dot{u})(D_\varepsilon^- D_\varepsilon^+ - \Delta) u dx \leq \\ &= \left(\int (\dot{u}_\varepsilon - \dot{u})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |(D_\varepsilon^- D_\varepsilon^+ - \Delta) u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si osservi ora che il secondo fattore del membro di destra é $O(\varepsilon)$ (perché u é una funzione C^2). Il primo fattore é controllabile in virtú della conservazione dell'energia che vale sia per la corda che per il sistema di oscillatori.

In conclusione

$$\dot{W}_\varepsilon(t) \leq CO(\varepsilon)$$

e dunque, integrando nel tempo:

$$W_\varepsilon(t) = W_\varepsilon(0) + CtO(\varepsilon). \quad (4.22)$$

Abbiamo visto che $W_\varepsilon(0) \rightarrow 0$ e dunque anche $W_\varepsilon(t) \rightarrow 0$.

5. Soluzione di D'Alambert

In questo paragrafo ci occuperemo della soluzione del problema di Cauchy relativo all'equazione delle onde in \mathbb{R}^1 . Come vedremo é possibile trovare delle formule esplicite per le soluzioni cosí come nel caso a due o tre dimensioni che sará discusso in seguito.

Nel caso unidimensionale l'equazione delle onde é:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t), \quad (5.1)$$

dove $c > 0$ é una costante che ha le dimensioni di una velocitá.

Riscrivendo l'equazione (5.1) nelle due forme equivalenti

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = 0, \quad (5.2)$$

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0, \quad (5.3)$$

siamo condotti a studiare l'equazione del primo ordine:

$$(\partial_t \pm c\partial_x)v = 0. \quad (5.4)$$

Essa ammette come soluzione:

$$v(x, t) = F(x \mp ct) \quad (5.5)$$

per una qualunque $F \in C^1(\mathbb{R})$. Ne segue dunque che

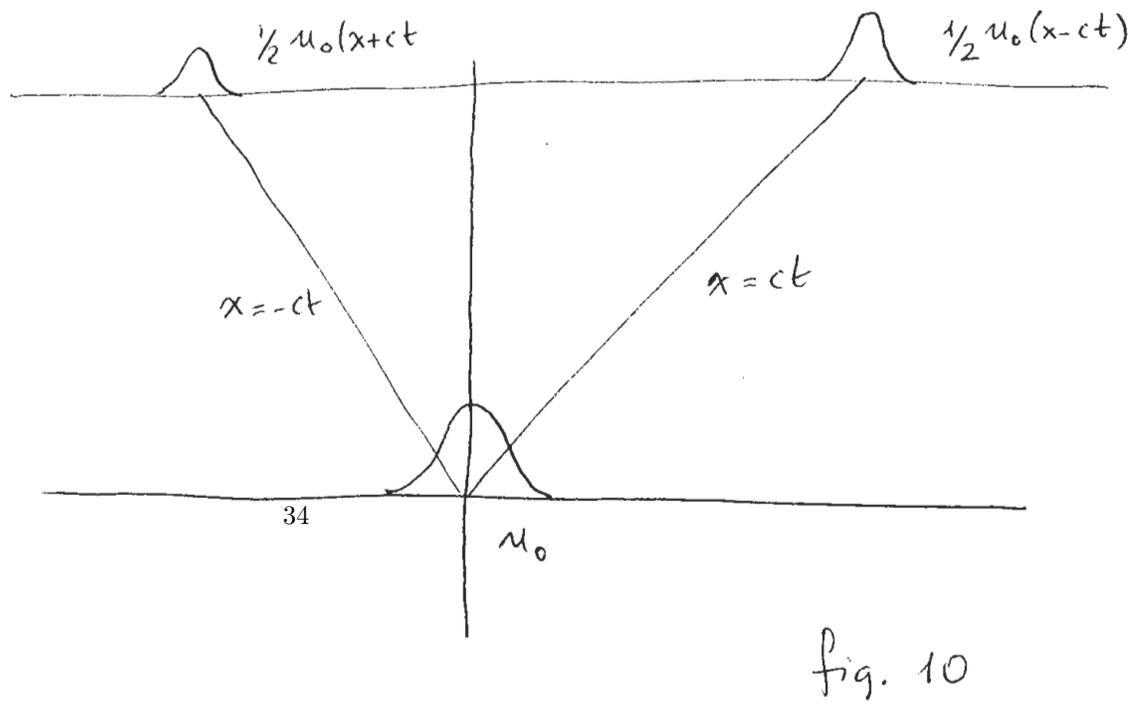
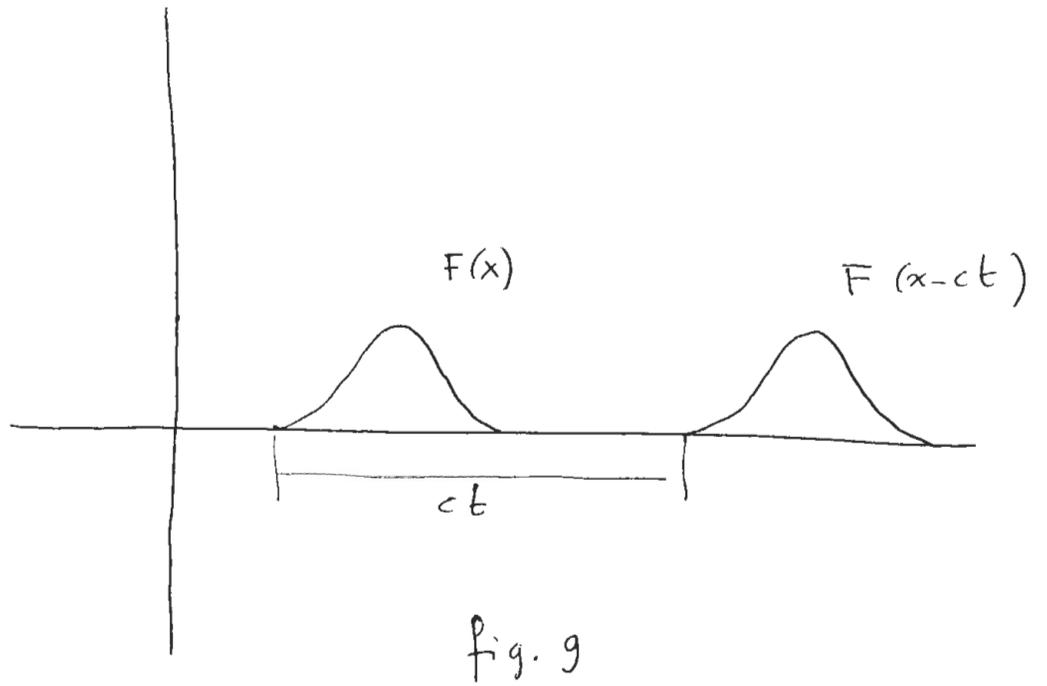
$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (5.6)$$

é certamente una soluzione dell'equazione (5.1) per due generiche funzioni F e G due volte differenziabili.

Se si considera la particolare soluzione $F(x-ct)$ (onda viaggiante dell'equazione (5.1)) si comprende che c é la velocitá di propagazione di un disturbo rispetto alla soluzione banale $u = 0$ (fig. 9).

Vogliamo ora risolvere il problema di Cauchy relativo all'equazione (5.1) che significa risolvere la (5.1) fissando i dati iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$, $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$. Allora una soluzione che ammette come dato iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ é

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] \quad (5.7)$$



La soluzione (5.7) (vedi fig.10) non risolve però il problema di Cauchy se no per il particolare valore iniziale $\dot{u}(x, 0) = v_0(x) = 0$.

Cerchiamo allora una soluzione della (5.1) con dato iniziale nullo, cioè $u_0 = 0$, ma con velocità iniziale non nulla $\partial_t u(x, 0) \equiv v_0(x)$. Se poniamo:

$$u(x, t) = G(x + ct) - G(x - ct). \quad (5.8)$$

Allora $\partial_t u(x, t) = c[G'(x + ct) + G'(x - ct)] \rightarrow 2cG'(x)$ per $t \rightarrow 0^+$. Quindi G deve essere scelta in modo che:

$$2cG'(x) = v_0(x) \quad (5.9)$$

e dunque:

$$G(x) = \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(\xi) d\xi \quad (5.10)$$

dove $a \in \mathbb{R}$ é arbitrario. In conclusione:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

risolve il problema (5.1) con dati iniziali $u(x, 0) = u_0(x)$ e $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$. Abbiamo dunque mostrato il seguente:

Teorema 5.1

Si consideri il problema di Cauchy:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t) \quad (5.12)$$

con condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0, \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \quad (5.13)$$

con $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ e $v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ e tali che l'energia:

$$E = \int dx (|u_0'(x)|^2 + |v_0(x)|^2) \quad (5.14)$$

sia finita. Allora esiste un'unica soluzione del problema (5.12) (5.13) data dalla formula:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi) d\xi. \quad (5.15)$$

L'esistenza della soluzione segue dalle considerazioni fin qui svolte. L'unicità di tale soluzione é conseguenza della conservazione dell'energia come nel caso della corda vibrante discusso in precedenza.

La (5.15) viene detta formula di D'Alambert.

E' interessante osservare che la soluzione $u(x, t)$ dipende solo dal valore dei dati iniziali nell'intervallo $[x - ct, x + ct]$. La regione dello spazio-tempo da cui la soluzione dipende, prende il nome di cono di influenza.

Si noti che la formula (5.15) ha senso anche se i dati iniziali non soddisfano a tutte le proprietà di regolarità richieste. Senza addentrarci in concetti di soluzione piú deboli di quelli presentati qui, converremo di considerare come soluzione dell'equazione delle onde ogni funzione $u(x, t)$ della forma (5.15) con v_0 localmente integrabile. Ad esempio si vuole determinare la soluzione per un dato a scalino:

$$u_0(x) = 1, \quad \text{per } x > 0; \quad u_0(x) = 0, \quad \text{per } x \leq 0; \quad v_0 = 0$$

si ottiene (vedi fig.11):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0, \quad \text{per } x < -ct; \\ u(x, t) &= \frac{1}{2}, \quad \text{per } -ct \leq x < ct; \\ u(x, t) &= 1, \quad \text{per } x \geq ct. \end{aligned}$$

Si calcoli, per esercizio, il profilo delle velocità.

Si calcoli anche il profilo di velocità associato al dato iniziale

$$v_0(x) = 1, \text{ per } x > 0; \quad v_0(x) = 0, \text{ per } x \leq 0; \quad u_0 = 0$$

Concludiamo questo paragrafo sulla propagazione ondosa unidimensionale considerando il problema della corda semiinfinita:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t); \quad x \geq 0 \tag{5.16}$$

con condizioni iniziali

$$u(x, 0) = u_0, \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \tag{5.17}$$

e condizioni al contorno

$$u(0, t) = 0. \tag{5.18}$$

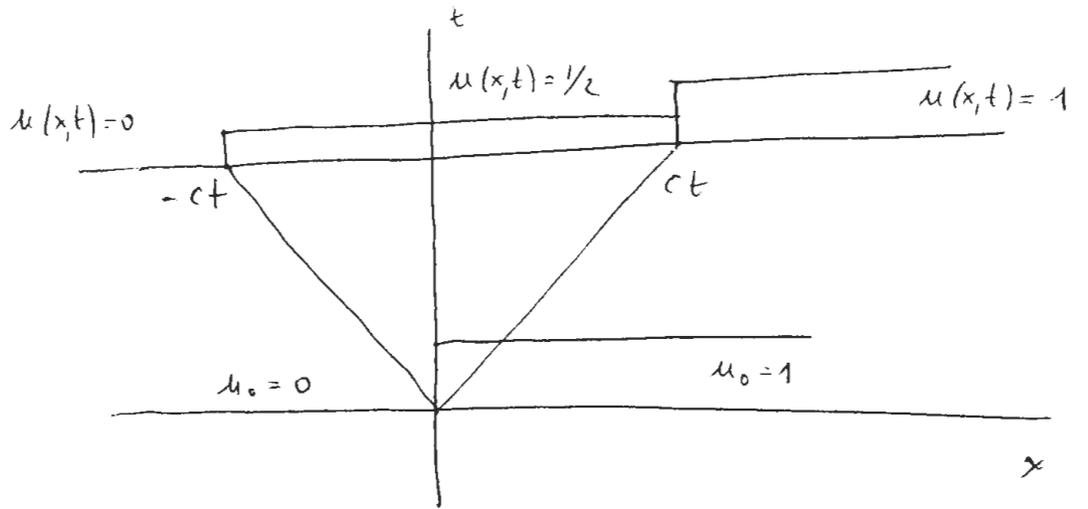


fig. 11

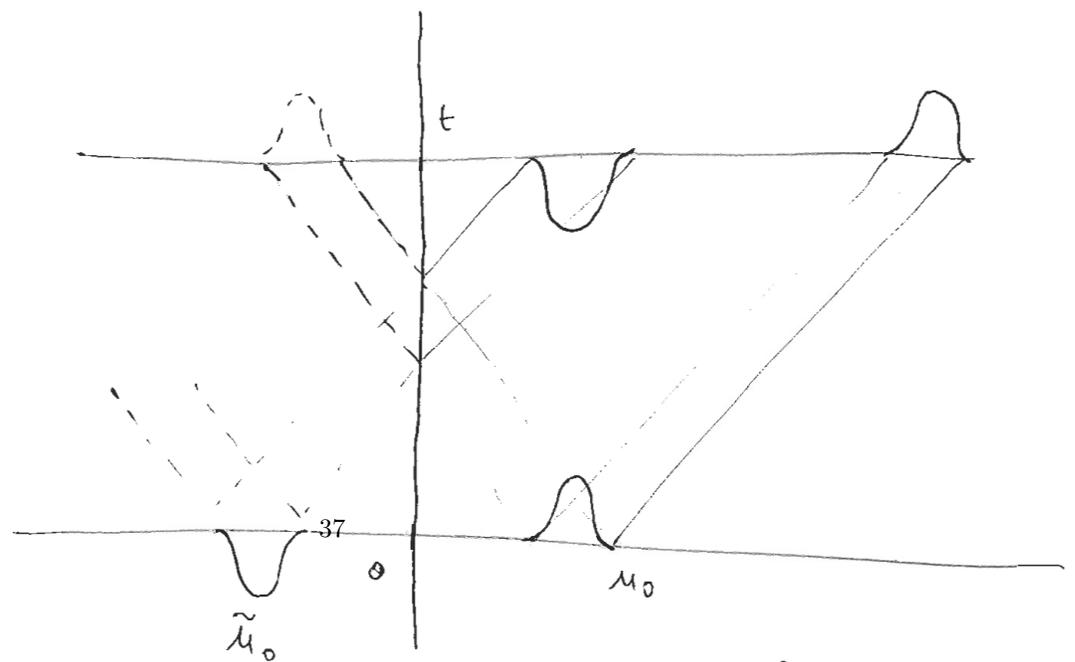


fig. 12

E' naturale per questo problema ricorrere alle solite considerazioni di simmetria. Consideriamo la soluzione di D'Alambert

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_0(x + ct) + \tilde{u}_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{v}_0(\xi) d\xi, \quad (5.19)$$

per un dato iniziale esteso per disparitá a tutto l'asse:

$$\tilde{u}_0(x) = -u(-x), \quad \tilde{v}_0(x) = -v(-x), \quad \text{per } x < 0. \quad (5.20)$$

E' ovvio che la (5.19), ristretta al semiasse positivo é ancora una soluzione. Inoltre $u(x, t)$ é dispari come segue da ispezione diretta. Dunque la (5.19) é una soluzione del problema (5.16,17,18), ma anche l'unica per la conservazione dell'energia. Analizziamo ora il comportamento qualitativo della soluzione trovata considerando un dato iniziale positivo, a supporto compatto con velocitá iniziale nulla. Dapprima calcoliamo la soluzione del problema su tutto l'asse dopo aver esteso il dato per antisimmetria(vedi fig. 12). Poi ne consideriamo restrizione della soluzione al semiasse positivo.

La comparsa di una componente negativa della soluzione dopo la riflessione, non sorprende chi ha provato a giocare con una corda fissata ad una estremitá.

Esercizio 1. Si risolva l'equazione delle onde in tutto l'asse con dati iniziali $u_0 = 0$ e $v_0 = xe^{-x^2}$.

Esercizio 2. Si risolva l'esercizio 1 nel semiasse $\{x \geq 0\}$ con condizioni nulle all'origine.

Consideriamo ora il problema inomogeneo:

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t) + f(x, t) \quad (5.21)$$

con condizioni iniziali

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (5.22)$$

ed f funzione assegnata.

Sia, per $s > 0$ fissato, $K(x; t, s)$ soluzione del problema ($t > s$):

$$\ddot{K}(x; t, s) = c^2 K''(x; t, s) \quad (5.23)$$

con condizioni iniziali

$$K(x; s, s) = 0, \quad \dot{K}(x; s, s) = f(x, s). \quad (5.24)$$

Dunque:

$$K(x; t, s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi, s) d\xi. \quad (5.25)$$

Si ponga poi:

$$u(x, t) = \int_0^t ds K(x; t, s). \quad (5.26)$$

Risulta che u é la soluzione cercata perché:

$$\dot{u}(x, t) = K(x; t, t) + \int_0^t ds \dot{K}(x; t, s) = \int_0^t ds \dot{K}(x; t, s).$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(x, t) &= f(x, t) + \int_0^t ds \ddot{K}(x; t, s) = f(x, t) + \int_0^t ds c^2 K''(x; t, s) = \\ &= c^2 u''(x, t) + f(x, t). \end{aligned}$$

La soluzione per dati iniziali differenti da zero si ottiene poi per sovrapposizione.

6. Soluzione fondamentale e funzione δ .

Consideriamo l'equazione stazionaria della corda vibrante nell'intervallo $[a, b]$,

$$y'' = f, \quad (6.1)$$

con condizioni nulle al bordo:

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (6.2)$$

f denota la densità di forza esterna ed é supposta nota. La soluzione di (6.1) e (6.2) puó facilmente ottenersi mediante l'integrazione diretta della (6.1) che fornisce:

$$y(t) = c_1 + c_2(t - a) + \int_a^t (t - x) f(x) dx, \quad (6.3)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti da determinare. Le condizioni al contorno implicano che:

$$c_1 = 0; \quad c_2(b-a) = - \int_a^b (b-x)f(x)dx, \quad (6.4)$$

da cui si ottiene:

$$y(t) = -\frac{(t-a)}{(b-a)} \int_a^b (b-x)f(x)dx + \int_a^t (t-x)f(x)dx. \quad (6.5)$$

Si noti ora che la soluzione (6.5) può essere scritta nella forma seguente:

$$y(t) = \int_a^b G(t,x)f(x)dx \quad (6.6)$$

ove la funzione G , detta funzione di Green, è definita dalla seguente espressione:

$$G(t,x) = \frac{(t-b)(x-a)}{b-a} \quad t > x \quad (6.7)$$

$$G(t,x) = \frac{(t-a)(x-b)}{b-a} \quad t < x$$

La funzione è definita per continuità in $t = x$, e vale $G(x,x) = \frac{(x-b)(x-a)}{b-a}$.

Si noti che $G(a,x) = G(b,x) = 0$, $G(\cdot, x)$ è continua in $[a, b]$, è differenziabile con continuità due volte per $t \neq x$ e risulta $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,x) = 0$. Infine $\frac{\partial G}{\partial t}(t,x)$ è discontinua per $t = x$ e risulta:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x^+, x) - \frac{\partial G}{\partial t}(x^-, x) = 1. \quad (6.8)$$

Verifichiamo ora direttamente che l'espressione (6.6) effettivamente risolve l'equazione (6.1). Posto

$$y(t) = \int_a^t G(t,x)f(x)dx + \int_t^b G(t,x)f(x)dx$$

si differenzi due volte tale espressione.

Si ottiene:

$$y'(t) = \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,x)f(x)dx + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,x)f(x)dx$$

$$y''(t) = \frac{\partial G}{\partial t}(t,t^-)f(t) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,t^+)f(t) = f(t)$$

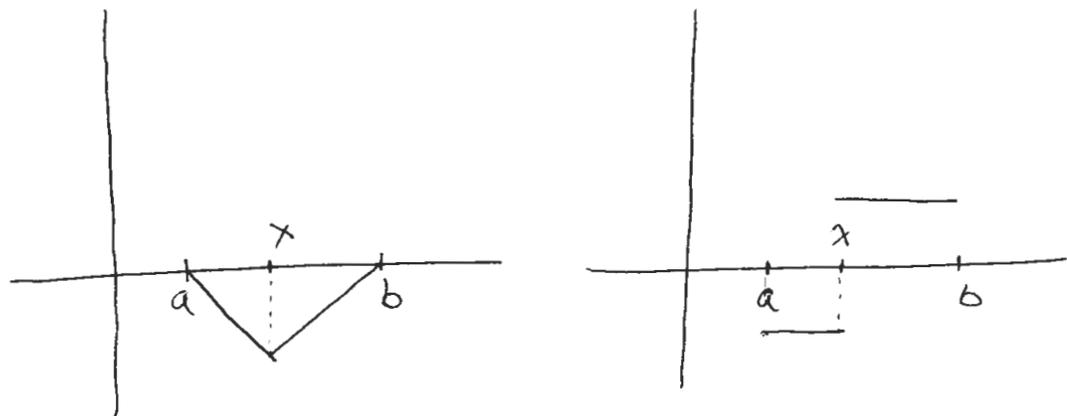
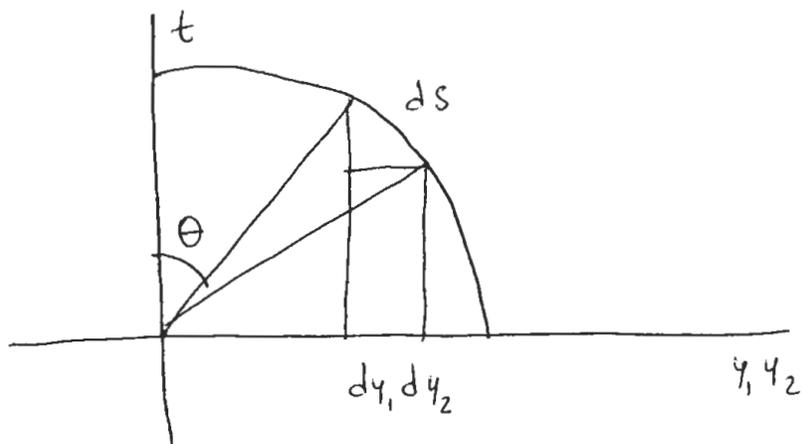


fig. 13



⁴¹ fig. 14

Pertanto y , come peraltro già sappiamo, é la soluzione cercata del problema (6.1). Diciamo soluzione e non una soluzione perché tale problema ammette soluzione unica come si verifica immediatamente.

Si noti che la funzione di Green cattura l'aspetto generale di tutte le possibili soluzioni al variare del dato f .

Il grafico di G e di G' sono riportati in figura 13.

G'' non é ovviamente definita, ma se forziamo un pó l'interpretazione, possiamo pensarla come una funzione che vale 0 per $t \neq 0$ e $+\infty$ per $t = x$. Il suo integrale é però ben definito:

$$\int_a^b G''(t, x) dt = G'(b, x) - G'(a, x) = G'(x^+, x) - G'(x^-, x) = 1.$$

Il significato fisico di G può essere spiegato nel modo seguente.

La soluzione del problema (6.1) (6.2) é la soluzione di equilibrio di una corda vibrante sotto l'azione di una forza per unità di lunghezza f . Supponiamo che tale forza sia fortemente concentrata nel punto $x \in [a, b]$, in modo tale che la forza totale $F = \int_a^b f(x) dx = 1$, ma la densità di forza (o forza per unità di lunghezza) sia (approssimativamente) zero in tutti i punti differenti da x . Un modo per descrivere questa situazione é quello di introdurre una misura $\delta_x(dt)$, detta di Dirac, definita sui Boreliani di $[a, b]$, definita dalle relazioni $\delta_x(A) = 0$ se $x \notin A$ e $\delta_x(A) = 1$ se $x \in A$, per ogni Boreliano A . La densità della misura di Dirac, che ovviamente non esiste come funzione L_1 (δ_x non é assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue) si descrive in maniera non rigorosa, ma significativa, come una funzione (meglio funzione generalizzata o distribuzione), denotata con $\delta(t - x)$ per cui

$$\delta_x(dt) = \delta(t - x) dt, \tag{6.9}$$

che gode della proprietà di valere $+\infty$ in x , 0 altrove e con integrale 1. In particolare, per ogni funzione continua e limitata $f = f(x)$ risulta:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x - t) dx = f(t) \tag{6.10}$$

Comunque, al di lá delle notazioni usate, il significato di $\delta(x - t)$ é quello dato dalla (6.10), ed é un innocuo abuso di notazione il denotare la misura di Dirac che ha perfettamente senso, per mezzo della sua densità che invece non esiste. Naturalmente esistono vere funzioni che approssimano

opportunamente $\delta(x - t)$. Ad esempio

$$\delta(x - t) \approx g_n(x - t) = \frac{e^{-n(x-t)^2}}{(\pi n)^{1/2}}$$

nel senso che

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x - t) f(x) dx \rightarrow f(t)$$

nel limite $n \rightarrow \infty$.

In Appendice B discutiamo il concetto di distribuzione che fornisce, in particolare, un senso matematicamente corretto e utile per le applicazioni della funzione δ .

Tornando all'equazione (6.1) sostituendo $f(t)$ con $\delta(t - x)$ si ha che $G(t, x)$ é la soluzione che descrive la posizione di equilibrio della corda vibrante sotto l'azione della densità di forza $\delta(t - x)$. In un senso che preciseremo nel prossimo paragrafo, anche se la funzione di Green $G(t, x)$ non é differenziabile due volte, potremo dire che

$$G''(t, x) = \delta(t - x). \quad (6.11)$$

Dalla soluzione G della (6.11), la cui espressione esplicita é data dalla (6.7), possiamo poi ricavare la soluzione del problema (6.1) per ogni dato f usando la (6.6).

Tale procedura é generale e si applica ad altre situazioni. Consideriamo ora il caso del problema di Cauchy associato all'equazione delle onde omogenea (unidimensionale):

$$\partial_{tt}^2 G(x, y; t) = \partial_{xx}^2 G(x, y; t); \quad G(x, y; 0) = 0; \quad \dot{G}(x, y; 0) = \delta(x - y) \quad (6.12)$$

L'equazione (6.12) esprime l'evoluzione di un dato inizialmente nullo con un dato impulsivo in velocità, concentrato in y .

La formula risolutiva, che scriviamo per il momento a livello formale, é:

$$\begin{aligned} G(x, y; t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \delta(\xi - y) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \chi(\{y \in [x - t, x + t]\}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

dove $\chi(\{y \in A\})$ é la funzione di caratteristica dell'insieme A .

La soluzione per qualunque dato h del problema

$$\partial_{tt}^2 u = \partial_{xx}^2 u; \quad u(x; 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = h(x) \quad (6.14)$$

si ottiene dunque per mezzo della funzione di Green:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} G(x, y; t) h(y) dy. \quad (6.15)$$

Come poi passare da questa alla soluzione generale del problema ai valori iniziale quando anche $u(x, 0)$ sia diverso da zero é stato discusso nel precedente paragrafo.

Dunque la funzione di Green di un problema é una soluzione particolare per un dato distribuzione, la δ , che si studia perché permette di ottenere automaticamente ogni altra soluzione (per dati regolari) per mezzo di una semplice integrazione.

7. Soluzioni di Kirchhoff e di Poisson

Come vedremo in questo paragrafo é possibile dare una formula esplicita per la soluzione dell'equazione delle onde in tre dimensioni. Tale formula, dovuta a Kirchhoff, ha un analogo bidimensionale (formula di Poisson) che sarà ottenuto alla fine del paragrafo.

Consideriamo l'equazione dell'onde in \mathbb{R}^3

$$\partial_t u = \Delta u \quad (7.1)$$

(poniamo per semplicitá $c=1$).

In analogia con il caso unidimensionale in cui una soluzione dell'equazione delle onde in x, t si esprime attraverso i valori di una generica funzione F agli estremi dell'intervallo $x \pm t$ poniamo

$$u(x, t) = \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \frac{F(y)}{|x-y|} = \int_{S(0,t)} \sigma(dy) \frac{F(x+y)}{|y|}, \quad (7.2)$$

dove

$$S(x, t) = \partial B(x, t) \quad B(x, t) = \{y \mid |x - y| \leq t\} \quad (7.3)$$

e $d\sigma$ é la misura superficiale sulla superficie di una sfera. Verifichiamo che effettivamente u risolve l'equazione dell'onde. Poiché $|x - y| = t$, con un

semplice cambiamento di variabili otteniamo:

$$u(x, t) = t \int_{S(0,1)} \sigma(dy) F(x + ty) \quad (7.4)$$

da cui

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \int_{S(0,1)} \sigma(dy) F(x + ty) + t \int_{S(0,1)} \sigma(dy) \nabla F(x + ty) \cdot y \\ &= \frac{u}{t} + \frac{1}{t} \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \nabla F(y) \cdot n(y) \end{aligned} \quad (7.5)$$

dove $n(y) = \frac{(y-x)}{|y-x|}$ é la normale esterna a $S(x, t)$.

Derivando ancora rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 u &= -\frac{u}{t^2} + \frac{\partial_t u}{t} - \frac{1}{t^2} \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \nabla F(y) \cdot n(y) + \frac{1}{t} \partial_t \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \nabla F(y) \cdot n(y) \\ &= \frac{1}{t} \partial_t \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \nabla F(y) \cdot n(y) = \frac{1}{t} \partial_t \int_{B(x,t)} dy \Delta F(y). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo trasformato un integrale di superficie in un integrale di volume applicando il teorema della divergenza.

Si noti ora che, per una funzione continua f vale:

$$\partial_t \int_{B(0,t)} f(y) dy = \int_{S(0,t)} \sigma(dy) f(y). \quad (7.7)$$

La formula (7.7) segue facilmente esprimendo il membro di sinistra in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \partial_t \int_0^t d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho^2 \sin \theta f(y(\rho, \varphi, \theta)) &= t^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta f(y(t, \varphi, \theta)) \\ &= t^2 \int_{S(0,1)} \sigma(dy) f(y) = \int_{S(0,t)} \sigma(dy) f(y) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Usando la (6.7) si perviene all'identitá

$$\partial_{tt}^2 u = \frac{1}{t} \partial_t \int_{B(x,t)} d\sigma(y) \Delta F(y) = t \int_{S(0,1)} d\sigma(y) \Delta F(x + ty). \quad (7.9)$$

D'altra parte:

$$\Delta u = t \Delta \int_{S(0,1)} d\sigma(y) F(x + ty) = t \int_{S(0,1)} d\sigma(y) \Delta F(x + ty) \quad (7.10)$$

e dunque u risolve l'equazione delle onde.

Definendo:

$$M(F)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} d\sigma(y) F(x + ty) \quad (7.11)$$

abbiamo mostrato che $tM(F)$ é una soluzione dell'equazione delle onde (ma anche $\partial_t[tM(F)]$ perché se u é soluzione anche $\partial_t u$ lo é). Inoltre si verifica facilmente che

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(F) = F \quad (7.12)$$

Dunque ponendo:

$$u(x, t) = tM(v_0)(x) + \partial_t[tM(u_0)](x) \quad (7.13)$$

per una coppia di funzioni u_0 e v_0 sufficientemente regolari, si ha che u é soluzione dell'equazione delle onde e inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x), \quad (7.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t u(x, t) = v_0(x). \quad (7.15)$$

Dimostriamo la (7.14). Da una parte si ha che, dalla (7.12):

$$\lim_{t \rightarrow 0} tM(v_0) = 0. \quad (7.16)$$

Inoltre dalla (7.5)

$$\partial_t[tM(u_0)](x) = [M(u_0)](x) + \frac{1}{t} \int_{S(x,t)} \sigma(dy) \nabla u_0 \cdot n(y). \quad (7.17)$$

L'integrale superficiale é $O(t^2)$ e dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t[tM(u_0)](x) = \lim_{t \rightarrow 0} M(u_0)(x) = u_0(x). \quad (7.18)$$

Infine :

$$\partial_t u(x) = \partial_t[tM(v_0)](x) + \partial_{tt}^2[tM(u_0)](x). \quad (7.19)$$

Lo stesso argomento visto sopra ci dice che $\partial_t[tM(v_0)](x) \rightarrow v_0(x)$. D'altra parte dalla (7.9) segue anche che:

$$\partial_{tt}^2[tM(u_0)](x) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad t \rightarrow 0 \quad (7.20)$$

se $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$. In conclusione:

Teorema

Siano $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $v_0 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ dati iniziali per il problema di Cauchy associato all'equazione delle onde (7.1). Supponiamo che u_0 e v_0 soddisfino alla condizione di energia finita

$$E = \frac{1}{2} \left[\int dx |\nabla u_0|^2 + \int dx |v_0|^2 \right] < +\infty. \quad (7.21)$$

Allora esiste un'unica soluzione del problema data dalla formula (7.13).

Osservazione. In accordo alla formula (7.13), (formula di Kirchhoff) la soluzione al tempo t calcolata nel punto x dello spazio, dipende dal valore del dato e da quello della sua derivata temporale solo sulla sfera di raggio t . Anche nel caso tridimensionale dunque abbiamo la nozione di cono di influenza.

Concludiamo il paragrafo trattando il caso bidimensionale. La formula di Kirchhoff applicata a dati $u_0(x)$ e $v_0(x)$ che non dipendono dalla terza variabile x_3 dá luogo ad una funzione di due sole variabili, che é, naturalmente, una soluzione del problema ondosio:

$$\partial_{tt}^2 u = (\partial_{x_1 x_1}^2 + \partial_{x_2 x_2}^2) u \quad (7.22)$$

Tale espressione é:

$$u(x_1, x_2; t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S(0,t)} v_0(x_1 + y_1, x_2 + y_2) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \partial_t \left[\frac{1}{t} \int_{S(0,t)} u_0(x_1 + y_1, x_2 + y_2) d\sigma \right] \quad (7.23)$$

Si osservi che l'elemento di misura sulla sfera proiettato sul piano $x_3 = 0$ soddisfa

$$dy_1 dy_2 = d\sigma \cos \theta = d\sigma \frac{y_3}{t} = d\sigma \frac{\sqrt{t^2 - (y_1^2 + y_2^2)}}{t} \quad (7.24)$$

e dunque (fig. 14):

$$u(x_1, x_2; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{C(0,t)} \frac{v_0(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2 + \frac{1}{2\pi} \partial_t \left[\int_{C(0,t)} \frac{u_0(x_1 + y_1, x_2 + y_2)}{\sqrt{t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2 \right]. \quad (7.25)$$

dove $C(0, t)$ é il cerchio di raggio t centrato nell'origine. Si noti che il fattore 2 viene dai due contributi della proiezione $d\sigma$. La formula (7.25) viene detta formula di Poisson. Si noti la differenza con la soluzione dell'equazione delle onde in \mathbb{R}^3 . Qui la soluzione non dipende solo dal valore dei dati sul bordo del cerchio ma occorre conoscere i dati su tutto il cerchio.

II. Equazione del calore

1. Derivazione euristica

In questo capitolo ci occuperemo di un'altra importante equazione della fisica matematica, l'equazione del calore. Tale equazione, sebbene sia apparentemente simile all'equazione delle onde, ammette soluzioni che si comportano in maniera molto differente da soluzioni di tipo ondoso. Cominciamo col derivare tale equazione.

Supponiamo di avere una sbarra i cui estremi siano in contatto con delle sorgenti di calore. Su ogni punto x della sbarra é pensata definita la sua temperatura che dunque sará una funzione $T = T(x)$, $x \in [0, L]$, ove $[0, L]$ é l'intervallo in cui la sbarra é posta. . Vogliamo ottenere un'equazione di evoluzione per il campo di temperatura. Le leggi fenomenologiche che assumeremo sono le seguenti.

1) L'aumento di energia termica nell'intervallo $V = [a, b] \subset [0, L]$ della sbarra, relativo all'intervallo di tempo $(t, t + \Delta t)$ é:

$$\Delta t c \rho \int_a^b \partial_t T(x, t) dx \quad (1.1)$$

dove c é il calore specifico e ρ la densitá che supporremo costante e unitaria.

2) Il calore che fluisce attraverso il punto x della sbarra é proporzionale alla variazione di temperatura nel punto:

$$k \Delta t [T(x + dx, t) - T(x, t)] = k \Delta t \partial_x T(x, t) dx \quad (1.2)$$

dove k é il coefficiente di conducibilitá termica della sbarra.

Le due leggi su esposte definiscono le costanti c e k

Possiamo ora scrivere il bilancio energetico in un intervallo V della sbarra. In accordo al primo principio della termodinamica l'aumento di energia termica in V é uguale al flusso di calore che passa per i suoi estremi

$$c \Delta t \int_a^b \partial_t T(x, t) dx + k \Delta t [\partial_x T(b, t) - \partial_x T(a, t)] dx = \quad (1.3)$$
$$c \Delta t \int_a^b \partial_t T(x, t) dx + k \Delta t \int_a^b \partial_x^2 T(x, t) dx = 0$$

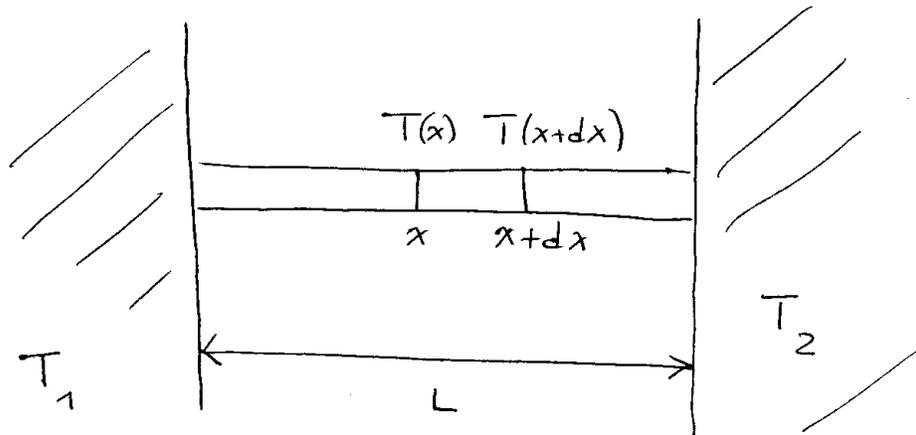


fig. 15

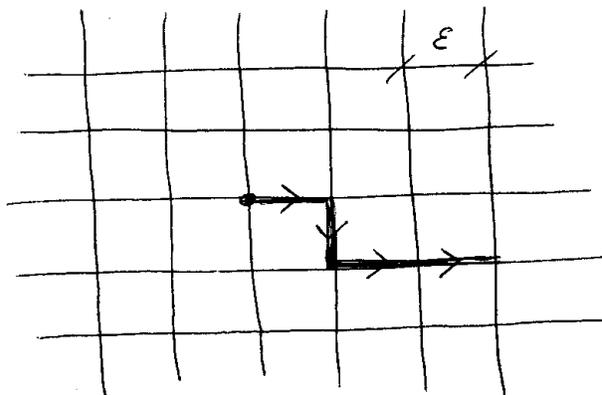


fig. 16

e dunque, vista l'arbitrarietà di a e b :

$$\partial_t T(x, t) = \frac{k}{c} \Delta T(x, t). \quad (1.4)$$

La stessa deduzione sarebbe stata possibile in più dimensioni per cui interpreteremo la (1.4) per $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2, 3$.

La (1.4) si chiama equazione del calore.

Si osservi che nella nostra deduzione abbiamo considerato c e k come delle costanti. Nel caso fosse stata presente nel volume occupato dal corpo anche una sorgente di calore schematizzata da una funzione $f = f(x, t)$ e nel caso che il coefficiente di conducibilità termica e il calore specifico fossero stati non costanti ma dipendenti dal punto x sotto osservazione, avremmo ottenuto l'equazione più complessa, detta equazione di diffusione:

$$\partial_t T = \frac{1}{c} [\operatorname{div}(k \nabla T) + f]. \quad (1.5)$$

L'equazione del calore (1.4) (così come la generica equazione di diffusione (1.5)) possono essere studiate in un dominio Ω di \mathbb{R}^n . In questo caso dobbiamo specificare le condizioni al contorno. Le condizioni di Dirichlet discusse per la membrana vibrante assegnano un profilo di temperatura al bordo. Le condizioni di Neumann invece prescrivono un flusso di calore assegnato.

A differenza dell'equazione delle onde, per l'equazione del calore, che è del primo ordine nelle derivate temporali, basta assegnare il profilo di temperatura al tempo zero. Infatti il problema:

$$\partial_t T(x, t) = \frac{k}{c} \Delta T(x, t). \quad (1.6)$$

$$T(x, t) = \varphi(x), \quad (\text{oppure} \quad \partial_n T(x, t) = \varphi(x)) \quad x \in \partial\Omega$$

$$T(x, 0) = T_0(x)$$

come si vedrà, ammette soluzione unica.

Naturalmente lo stesso problema ai valori iniziali e al contorno può essere formulato per l'equazione di diffusione più generale (1.5).

2. Derivazione microscopica

Come nel caso della corda vibrante anche per l'equazione del calore possiamo darne una giustificazione microscopica. Tuttavia la derivazione che

stiamo per presentare non fa riferimento, come nel caso della corda vibrante, ad un modello microscopico meccanico, ma ad uno probabilistico. Tale modello descrive la situazione del moto di una particella sottoposta a forze molto complesse e che, di conseguenza, compie un moto erratico. Si pensi ad esempio al moto di una particella leggera sottoposta agli urti dovuti all'azione di un gruppo di molte particelle pesanti che urtano tra loro e con la particella leggera. Quest'ultima si muoverá con movimento disordinato, cambiando molto spesso direzione della velocità in maniera essenzialmente aleatoria, la qual cosa ci induce a schematizzare il fenomeno da un punto di vista probabilistico. Quest'analisi ci fa anche capire come l'equazione del calore sia associata ai fenomeni di diffusione che possono avere natura molto diversa.

Per semplificare l'esposizione supporremo che il moto avvenga su un reticolo bidimensionale (vedi fig.15).

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo il reticolo bidimensionale \mathbb{Z}_ε^2 di passo ε .

Consideriamo una particella che si muova sul reticolo nel seguente modo. Inizialmente la particella é localizzata in un sito (punto) del reticolo $x \in \mathbb{Z}_\varepsilon^2$. Al tempo $t = 1$ la particella puó saltare in uno dei 4 primi vicini del punto. I primi vicini del punto di coordinate $(k\varepsilon, h\varepsilon)$ sono tutti i punti di coordinate $((k\pm 1)\varepsilon, (h\pm 1)\varepsilon)$. Il moto non é deterministico, ma stocastico: la particella ha uguale probabilità di andare su uno di questi 4 punti. Conseguentemente visiterá un dato primo vicino con probabilità $1/4$. Il passaggio dal tempo $t = 1$ al tempo $t = 2$ avviene con le stesse regole. Al tempo $t = n$ la particella avrá compiuto una traiettoria del tipo in figura. Data la natura probabilistica del problema, tante sono le traiettorie possibili, ognuna delle quali ha probabilità $(1/4)^n$ di realizzarsi.

Supponiamo di non conoscere esattamente la posizione della particella al tempo zero, ma di conoscere la sua distribuzione di probabilità P_0 . Matematicamente P_0 é una funzione

$$P_0 : \mathbb{Z}_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tale che $\sum_{x \in \mathbb{Z}_\varepsilon^2} P_0(x) = 1$. Un caso particolare é quando la funzione P_0 assume la forma:

$$P_0 = \delta(x - x_0) \tag{2.1}$$

ove $x_0 \in \mathbb{Z}_\varepsilon^2$ é un punto prefissato e $\delta(x - x_0) = 1$ se $x = x_0$ e $\delta(x - x_0) = 0$ altrimenti. Allora vuol dire che la particella é in x_0 con certezza.

Il nostro scopo é quello di dare un'espressione per la distribuzione di probabilitá $P(t)$ relativa alla particella al tempo t , assumendo P_0 nota.

Si osservi che possiamo esprimere facilmente $P(t+1)$ in termini di $P(t)$. Infatti si ha:

$$P(x, t+1) = \frac{1}{4}(P(x + e_1\varepsilon, t) + P(x - e_1\varepsilon, t) + P(x + e_2\varepsilon, t) + P(x - e_2\varepsilon, t)) \quad (2.2)$$

dove $e_1 = (\varepsilon, 0) \in Z_\varepsilon^2$, $e_2 = (0, \varepsilon) \in Z_\varepsilon^2$ sono i versori in Z_ε^2 .

La (2.2) ha un sigifiacto ovvio: la probabilitá di trovare la particella nel punto x al tempo $t+1$, é uguale alla somma delle probabilitá di trovare la particella al tempo t nei 4 primi vicini per $1/4$.

La (2.2) puó scriversi in forma piú espressiva introducendo gli operatori differenze:

$$D_1^\pm u(x) = u(x \pm \varepsilon e_1) - u(x); \quad D_2^\pm u(x) = u(x \pm \varepsilon e_2) - u(x) \quad (2.3)$$

per cui

$$P(x, t+1) - P(x, t) = (1/4)[(D_1^+ D_1^- + D_2^+ D_2^-)P(x, t)]. \quad (2.4)$$

che puó essere interpretata come un'equazione di evoluzione per $P(t)$. In effetti l' Eq. (2.4), che esprime $P(t)$ in termini di $P(t-1)$, puó essere iterata fino al tempo 0 e cosí possiamo ottenere l'espressione cercata per $P(x, t)$ in termini di una somma finita di quantitá note.

Fino adesso non abbiamo discusso del parametro ε assunto come scala spaziale fissata. Inoltre abbiamo anche fissato la scala dei tempi, assumendo che i salti avvengono ogni unitá di tempo (per esempio ogni secondo). Se avessimo fissato la scale dei tempi in maniera diversa, imponendo salti ogni η secondi (si pensi ad esempio $\eta \ll 1$ per cui i salti avvengono con molta maggiore frequenza) avremmo derivato l'equazione:

$$P(x, t+\eta) - P(x, t) = -(1/4)[(D_1^+ D_1^- + D_2^+ D_2^-)P(x, t)]. \quad (2.5)$$

Si osservi ora, che in vista di un limite continuo, il membro di destra dell'equazione (2.5) ha un limite finito, per $\varepsilon \rightarrow 0$, se diviso per ε^2 . Tale limite é $(1/4)\Delta P$ come segue da una semplice verifica. Il membro di sinistra

invece converge se diviso per η e tale limite dá $\partial_t P$. Sulla base di questa osservazione si ponga

$$4\nu\eta = \varepsilon^2$$

e si prenda, formalmente il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Si ottiene:

$$\partial_t P(x, t) = \nu \Delta P(x, t) \tag{2.6}$$

che si chiama equazione del calore. Di tale equazione (per il momento assumiamo $x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}^+$) ci interesseranno soluzioni positive per ovvie ragioni. L'incognita $P(x, t)$ si interpreta come la densità di probabilità di una particella che si muove sotto l'azione di opportune forze stocastiche. Si noti il fatto importante che la scala di tempo η e la scala di spazio ε non sono le stesse. Per avere un limite significativo deve essere $\varepsilon \approx \sqrt{\eta}$ e ciò significa che in un tempo macroscopico t la particella si allontana dal suo punto iniziale x_0 per grandezze dell'ordine di \sqrt{t} . Questa é infatti la caratteristica del processo stocastico sul reticolo che abbiamo considerato come modello microscopico e che si chiama passeggiata aleatoria.

Esercizio

Qual'é l'equazione per P se poniamo $\eta = \varepsilon$?

Il fatto di aver considerato reticoli bidimensionali non é importante: avremmo ottenuto gli stessi risultati lavorando in una o tre (o qualunque altra) dimensione. La dimensione gioca però un ruolo importante se vogliamo informazioni piú dettagliate sulle proprietà qualitative della passeggiata aleatoria, cosa che peraltro esula dagli scopi di queste note.

In Appendice D trattiamo brevemente il moto Browniano che é un processo stocastico continuo nel tempo e nello spazio connesso all'equazione del calore (2.6), cosí come l'equazione del calore discreta (2.4) é connessa alla passeggiata aleatoria.

Concludiamo con un'osservazione euristica. Se $x(t)$ é il processo aleatorio limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ della passeggiata aleatoria appena definita, valutiamo la sua variazione totale. Posto $\Delta x = x(t + \eta) - x(t)$, si ha, per un numero di salti η^{-1} (il che significa di osservare il processo per un tempo 1, per $4\nu = 1$)

$$\sum |\Delta x| = \sum \varepsilon = \varepsilon^{-1}$$

Dunque la variazione totale della traiettoria diverge. D'altra parte,

$$\sum |\Delta x|^2 = 1.$$

Questo significa che le traiettorie del moto browniano, limite di passeggiate aleatorie, pur continue, sono molto irregolari. In particolari non differenziabili, ma, al meglio, Holderiane di esponente $\frac{1}{2}$.

3. Soluzioni dell'equazione del calore

Consideriamo l'equazione del calore in tutto lo spazio \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$:

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t). \quad (3.1)$$

ed il problema di Cauchy ad essa associato. In altre parole cerchiamo una funzione $u(x, t)$ (con derivata prima temporale e derivate seconde spaziali continue, tale che l'equazione (3.1) sia soddisfatta e che sia una funzione assegnata $u_0(x)$ per $t \rightarrow 0^+$.

Una soluzione per tale problema si trova facilmente passando in trasformata di Fourier (vedi Appendice C). Infatti se $\hat{u} = \hat{u}(k)$, $k \in \mathbb{R}^n$ é la trasformata di Fourier di u , l'equazione (3.1) diviene:

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t)$$

che ha soluzione:

$$\hat{u}(k, t) = e^{-k^2 t} \hat{u}_0(k),$$

dove \hat{u}_0 é la trasformata di Fourier di u_0 .

Passando poi all'antitrasformata, si ottiene mediante un semplice calcolo:

$$u(x, t) = g_t * u_0(x) \quad (3.2)$$

dove:

$$g_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}. \quad (3.3)$$

e dove $*$ denota il prodotto di convoluzione. L'espressione (3.2) esplicitamente si scrive:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} dy g_t(x - y) u_0(y) = \int_{\mathbb{R}^n} dy u_0(y) \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}} \quad (3.4)$$

Per ricavare la (3.3) si parte dalla definizione di $g_t(x)$:

$$g_t(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} dk e^{ik \cdot x} e^{-k^2 t} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^1} dk_i e^{ik_i x_i} e^{-k_i^2 t}. \quad (3.5)$$

Si osservi ora che, con un'integrazione in campo complesso:

$$\int_{\mathbb{R}^1} dk e^{ikx} e^{-k^2 t} = e^{-\frac{x^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^1} dk e^{-(k\sqrt{t} - i\frac{x}{2\sqrt{t}})^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (3.6)$$

e dunque la (3.3) é provata.

La funzione g_t gioca dunque un ruolo importante nella teoria dell'equazione del calore in \mathbb{R}^n in quanto permette di risolvere esplicitamente il problema ai valori iniziali.

Esercizio 1. Verificare esplicitamente che la (2.4) é una soluzione dell'equazione. Si dimostri poi che $u(x, t) \rightarrow u_0(x)$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Si noti inoltre che la g_t é essa stessa soluzione dell'equazione del calore. Si ha infatti:

$$\partial_t g_t(x - y) = \Delta_x g_t(x - y). \quad (3.7)$$

Inoltre :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g_t(x - y) = \delta(x - y) \quad (3.8)$$

e il limite (3.8) va naturalmente inteso nel senso delle distribuzioni.

Abbiamo dunque un'idea del grande potere regolarizzante dell'equazione del calore: un dato iniziale misura ammette, per $t > 0$, una soluzione classica. Ciò non accade per l'equazione delle onde che si limita a propagare la regolarità del dato iniziale.

La g_t (che viene chiamata funzione di Green del problema ai valori iniziali associato all'equazione del calore) ha un'interpretazione probabilistica trasparente. Si noti che valgono le proprietà:

$$g_t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} g_t(x - y) dy = 1.$$

Dunque g_t é una distribuzione di probabilità. Sulla base di quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, é possibile costruire una dinamica

stocastica (processo stocastico che prende il nome di moto Browniano) per cui:

$$\int_A g_t(x-y)dy$$

si interpreta come la probabilità di andare dal punto iniziale x all'insieme finale A nel tempo t (vedi Appendice D). Nel precedente paragrafo abbiamo costruito una versione discreta di tale processo.

La differente natura fisica delle equazioni delle onde e del calore fa supporre che le soluzioni delle due equazioni si comportino in maniera molto diversa. Abbiamo visto che le soluzioni dell'equazione delle onde propaga le perturbazioni con velocità finita. Al contrario la soluzione dell'equazione del calore, per un dato iniziale a supporto compatto, si delocalizza istantaneamente: la soluzione è diversa da zero in tutto lo spazio. Si potrebbe perciò dire che la velocità di propagazione dei segnali è infinita. In realtà, come segue dall'analisi della soluzione fondamentale (3.6), la soluzione è positiva in maniera significativa, solo se $|x| > 2\sqrt{t}$, altrimenti è esponenzialmente piccola.

Pasiamo ora a considerare il problema di Cauchy relativo all'equazione del calore in un dominio limitato e regolare $D \subset \mathbb{R}^n$. Il problema si formula nel modo seguente. Si cerca una funzione $u \in C(\bar{D} \times [0, T])$ (ove T è un tempo fissato ma arbitrario), dotata di derivate temporali prime e derivate spaziali seconde in $D \times (0, T)$ e tale che l'equazione (3.1) sia soddisfatta in $D \times (0, T)$. Si prescrive inoltre il valore di u sul bordo:

$$u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \partial D,$$

e la condizione iniziale:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in D.$$

Tale problema risolve, ad esempio, si pone se vogliamo determinare l'evoluzione del campo di temperatura nel dominio D , assegnando un profilo di temperatura (eventualmente dipendente dal tempo) sul suo bordo.

Se invece vogliamo prescrivere il flusso di calore al bordo dobbiamo porre come condizione al contorno

$$\nabla u \cdot n(x, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \partial D,$$

ove n é la normale a ∂D calcolata in x .

La soluzione (del problema con dati al bordo assegnati) cercata può essere espressa come somma di due funzioni: $u = u_1 + u_2$ ove u_1 risolve:

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1(x) = f(x) \quad x \in \partial D \quad (3.9)$$

e u_2 risolve

$$\partial_t u_2 - \Delta u_2 = 0, \quad u_2(x) = 0 \quad x \in \partial D. \quad (3.10)$$

Il problema (3.9) é l'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet al bordo. Tale problema sar  discusso nel prossimo capitolo e vedremo che ammette soluzione. Dunque il problema originario si riduce all'evoluzione relativa all'equazione del calore con dati nulli al bordo. Quest'ultimo problema non ha soluzione elementare in generale. Ci limitiamo ad osservare che, utilizzando la serie di Fourier, possiamo risolverlo con la stessa strategia impiegata per studiare l'equazione delle onde nel caso di semplici domini come intervalli, rettangoli, etc.

Accenniamo brevemente a una possibile strategia per ridolvere il problema ai valori iniziali in D , dominio regolare

$$\Delta u = 0, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial D. \quad (3.11)$$

Il punto centrale é il seguente. E' possibile dimostrare l'esistenza di una successione di autofunzioni $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, dell'operatore di Laplace con condizioni 0 al bordo, esattamente come nel caso di domini particolarmente semplici come, ad esempio, un parallelepipedo:

$$\Delta e_j = \lambda_j e_j.$$

In analogia con la tecnica vista della trasformata di Fourier, possiamo poi esprimere ogni ragionevole funzione f , con dati nulli al bordo, in termini di una serie:

$$f(x) = \sum_j c_j e_j(x).$$

Le autofunzioni di Δ sono poi ortogonali nel senso $L_2(D)$:

$$(e_j, e_k) = \delta_{j,k}$$

per cui i coefficienti c_j soddisfano a

$$c_j = (e_j, f).$$

Allora una soluzione del problema (3.11) con dato iniziale f , si ottiene ponendo:

$$u(x, t) = \sum_j c_j e^{\lambda_j t} e_j(x),$$

come si verifica facilmente.

Lasciamo al lettore, come esercizio, verificare che gli autovalori λ_j sono negativi.

Esercizio 2. Si ottenga la soluzione dell'equazione (3.1) in $[0, L]$ con condizioni nulle al bordo. Si dimostri che tale soluzione tende a zero nel limite $t \rightarrow \infty$ e si confronti questo risultato con la soluzione dell'equazione delle onde nello stesso dominio e con le stesse condizioni al bordo.

Esercizio 3. Risolvere il problema (3.11) in $D = [0, a] \times [0, b]$.

Per affrontare il problema di unicità della soluzione dell'equazione del calore in un dominio limitato, occorre premettere un importante risultato, detto principio di massimo per l'equazione del calore. Consideriamo una soluzione dell'equazione (3.1) in $\Omega = D \times (0, T)$. La frontiera di Ω si decompone in tre contributi:

$$S_1 = \{(x, t) | x \in \partial D, t \in (0, T)\}$$

$$S_2 = \{(x, t) | x \in D, t = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, t) | x \in D, t = T\}$$

Assumeremo che $u(x, t) = f(x, t)$ in S_1 (con f non necessariamente indipendente dal tempo).

Il principio di massimo afferma:

Teorema

Sia $u \in C(\bar{\Omega})$ soluzione dell'equazione (3.1). Allora il massimo di u è assunto in $S_1 \cup S_2$.

Dim. Supponiamo che il massimo di u sia in $(x_0, t_0) \in \Omega \cup S_3$ e sia tale massimo M . Definiamo la funzione:

$$v(x, t) = u(x, t) + a(T - t)$$

con $a > 0$ da determinare tra un attimo, che verifica l'identità:

$$\partial_t v - \Delta v(x, t) + a = 0. \quad (3.12)$$

Ovviamente:

$$u(x, t) \leq v(x, t) \leq u(x, t) + aT$$

da cui, se denotiamo con m_u e m_v i massimi assunti da u e v su $S_1 \cup S_2$, risulta:

$$m_v \leq m_u + aT \leq M = u(x_0, t_0) \leq v(x_0, t_0)$$

dopo aver scelto $a < \frac{M - m_u}{T}$, che é positivo per ipotesi. Da ciò discende che $\max v(x, t) \equiv v(x_1, t_1)$ con $(x_1, t_1) \in \Omega \cup S_3$.

Se $(x_1, t_1) \in \Omega$ allora in tale punto $\partial_t v = 0$ e $\Delta v \leq 0$, mentre se $(x_1, t_1) \in S_3$ $\partial_t v \geq 0$ e $\Delta v \leq 0$. In entrambi i casi:

$$\partial_t v - \Delta v(x_1, t_1) \geq 0.$$

Ma ciò é in contrasto con la (2.10) perché $a > 0$ e ciò conclude la prova.

■

Il Teorema appena dimostrato ha un ovvio significato fisico, di natura termodinamica, su cui il lettore é invitato a riflettere.

Come ovvio corollario abbiamo che anche il minimo di u é assunto in $S_1 \cup S_2$ (basta applicare il Teorema alla funzione $-u$). Inoltre se u_0 e f sono funzioni positive, altrettanto é u .

Il teorema ci permette allora di concludere che una soluzione dell'equazione del calore é necessariamente unica. Infatti si consideri $u(x, t)$, una soluzione del problema

$$\partial_t u - \Delta u = 0; \quad x \in D, t \in [0, T], \quad (3.13)$$

$$u(x, t) = f(x); \quad x \in \partial D, \quad u(x, 0) = u_0.$$

Allora tale soluzione é unica. Supponendo il contrario, siano u_1 e u_2 due soluzioni. La differenza $v = u_1 - u_2$ soddisfa al problema con dasti nulla su $S_1 \cup S_2$. Per il principio di massimo essa é nulla in Ω .

Appendice

A. Serie di Fourier

Si consideri una funzione periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo L . Ciò significa che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x + L) = f(x)$. Ad esempio

$$\sin \frac{2\pi}{L}x, \quad \cos \frac{2\pi}{L}x$$

sono funzioni periodiche di periodo L .

Vogliamo esprimere una tale funzione come combinazione lineare di seni e coseni di frequenze multiple di $\frac{1}{L}$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \frac{2\pi}{L}x + B_k \sin k \frac{2\pi}{L}x. \quad (\text{A.1})$$

Esprimendo i seni e coseni in termini di esponenziali complessi, possiamo riscrivere la formula (A.1) come:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{L}x} \quad (\text{A.2})$$

Si noti che i coefficienti c_k sono complessi. La serie (A.2), se convergente, definisce una funzione reale f se e solo se:

$$c_k = \bar{c}_{-k}.$$

Il passaggio dalla (A.1) alla (A.2) è fatto solo per convenienza: si lavora meglio con gli esponenziali che con i seni e coseni.

Le serie (A.1) a (A.2) vengono dette serie di Fourier.

Ammettendo che la formula di rappresentazione (A.2) valga, usando il fatto che:

$$\frac{1}{L} \int_0^L e^{-i \frac{2\pi k}{L}x} e^{i \frac{2\pi j}{L}x} dx = \delta_{j,k}$$

si determinano facilmente i coefficienti:

$$c_k = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-i \frac{2\pi k}{L}x} f(x) dx \quad (\text{A.3})$$

La (A.3) si ottiene moltiplicando per $e^{-i \frac{2\pi k}{L}x}$ la (A.2) e integrando.

I coefficienti c_k si chiamano coefficienti di Fourier.

Ci possiamo domandare se la serie (A.2), con i coefficienti c_k dati dalla (A.3), é convergente e, in caso affermativo, se la serie converge a f . Vale il seguente teorema:

Teorema Sia f periodica, $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora la serie (A.2) converge uniformemente a f . Se $f \in C^2([0, L])$ la convergenza é anche assoluta.

In realtà basta meno regolarità. Vedi la monografia Kolmogorov-Fomine: Elements de la theorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.

Esiste un legame tra la regolarità di f e il decadimento dei coefficienti c_k per grandi k . Dalla (A.3), integrando per parti:

$$c_k = \frac{1}{2\pi k} \int_0^L dx \frac{d}{dx} e^{-i\frac{2\pi k}{L}x} f(x) = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^L dx e^{-i\frac{2\pi k}{L}x} f'(x) \quad (\text{A.4})$$

Dalla (A.4) segue che i coefficienti di Fourier di f' sono $2ikc_k$, se c_k sono i coefficienti di Fourier della f . L'argomento può essere iterato per cui, denotando con $c_k^{(n)}$ i coefficienti di Fourier della derivata n -ma, si ottiene:

$$c_k^{(n)} = (2ikc_k)^n. \quad (\text{A.5})$$

Da ciò segue anche che, se $f \in C^2([0, L])$, la serie (A.2) converge assolutamente.

Quanto detto può riformularsi in termini di seni e coseni. Le stesse condizioni del Teorema appena enunciato, garantiscono la convergenza della serie (A.1). I coefficienti a_k e b_k si calcolano per mezzo della serie esponenziale oppure per calcolo diretto. Risulta:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi k}{L} x dx; \quad k = 0, 1 \dots \quad (\text{A.6})$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi k}{L} x dx; \quad k = 1 \dots \quad (\text{A.7})$$

Non é difficile dimostrare le affermazioni seguenti. Consideriamo le funzioni

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\frac{2\pi k}{L}x}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esse costituiscono una base ortonormale in $L_2([0, L])$. E' un fatto generale che una generica funzione $f \in L_2([0, L])$ può essere espressa nel modo seguente:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (f, e_k) e_k \quad (\text{A.8})$$

dove (f, g) denota il prodotto scalare in $f \in L_2([0, L])$. La (1.8) é esattamente la serie di Fourier (A.2) e quindi tale serie ha anche senso, come serie convergente in $f \in L_2([0, L])$. L'applicazione

$$f \in L_2([0, L]) \rightarrow \{c_k\} \in \ell_2(\mathbb{Z}) \quad (\text{A.9})$$

é un isomorfismo Hilbertiano.

B. Cenni di teoria delle distribuzioni

Cominciamo col considerare un semplice esempio. Sia $g(x) = |x|$. Risulta $g'(x) = \text{sgn}(x)$ ma g non é differenziabile due volte. Sia f una funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto. Se g'' esistesse potremmo, integrando per parti, scrivere

$$\int_{-\infty}^{\infty} g''(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) f'(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Un semplice calcolo mostra che il membro di destra della (B.1), che ha perfettamente senso, vale $2f(0)$. Siamo dunque tentati di definire $g''(x)dx$ come una misura.

Lo spirito di questa procedura é che oggetti singolari possono avere senso se integrati con funzioni regolari e questo ci porta naturalmente a considerare il concetto di distribuzione. Cominciamo con l'introdurre lo spazio delle funzioni test in R^1 . Una funzione test é una funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto. Denotiamo con \mathcal{D} lo spazio di queste funzioni. \mathcal{D} é munito di una topologia che esprimeremo mediante la nozione di convergenza. Una successione f_n si dice convergente in \mathcal{D} a f , se f_n e tutte le sue derivate convergono uniformemente a f e a tutte le sue derivate. Come si vede tale nozione di convergenza é molto forte.

Denotiamo con \mathcal{D}' lo spazio di tutti i funzionali lineari e continui su \mathcal{D} . Un tale funzionale lineare sarà denotato con:

$$\langle t, f \rangle, \quad f \in \mathcal{D}$$

e dunque, per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$\langle t, c_1 f_1 + c_2 f_2 \rangle = c_1 \langle t, f_1 \rangle + c_2 \langle t, f_2 \rangle, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D},$$

$$\langle t, f_n \rangle \rightarrow \langle t, f \rangle$$

se la successione $f_n \in \mathcal{D}$ é convergente in \mathcal{D} .

E' facile verificare che, se g é localmente integrabile, la distribuzione t_g definita da:

$$\langle t_g, f \rangle = \int g(x) f(x) dx$$

(tutti gli integrali senza limiti di integrazione sono intesi da $-\infty$ a $+\infty$) ha senso come elemento di \mathcal{D}' . Nel seguito useremo la notazione piú pratica $\langle g, f \rangle$ in luogo di $\langle t_g, f \rangle$. Si noti che \mathcal{D}' contiene oggetti piú singolari quali ad esmpio le misure Boreliane su \mathbb{R} . In particolare la distribuzione δ é definita da:

$$\langle \delta, f \rangle = f(0). \quad (\text{B.2})$$

E' possibile definire operazioni sulle ditribuzioni. Se t_1 e t_2 sono due ditribuzioni, allora $t_1 + t_2$ definita in maniera ovvia come:

$$\langle t_1 + t_2, f \rangle = \langle t_1, f \rangle + \langle t_2, f \rangle$$

é ancora un elemento di \mathcal{D}' la qual cosa rende quest'ultimo uno spazio lineare.

Si noti però che \mathcal{D}' non é un'algebra: il prodotto di due ditribuzioni non é definibile in maniera sensata (si tenti ad esempio di dare un senso a δ^2). Tuttavia se $g \in \mathcal{D}$, e $t \in \mathcal{D}'$ allora é possibile definire gt come quella ditribuzione definita da:

$$\langle tg, f \rangle = \langle t, gf \rangle.$$

Il punto centrale di questa teoria é che é possibile definire la derivata di una distribuzione per dualitá. Se $t \in \mathcal{D}'$ allora si definisce $t^{(n)}$, la derivata n -sima di t per mezzo della relazione:

$$\langle t^{(n)}, f \rangle = (-1)^n \langle t, f^{(n)} \rangle \quad (\text{B.3})$$

Esercizio 1. Si calcolino le prime quattro derivate nel senso delle distribuzioni della funzione di Heaviside definita da

$$H(x) = 0, \quad x < 0; H(x) = 1, \quad x \geq 0$$

E' naturale introdurre una topologia nello spazio \mathcal{D}' attraverso la seguente nozione di convergenza: t_n una successione in \mathcal{D}' é convergente in \mathcal{D}' se accade che:

$$\langle t_n, f \rangle \rightarrow \langle t, f \rangle$$

per ogni $f \in \mathcal{D}$.

Esercizio 2 Se $t \in \mathcal{D}'$, definiamo $t_h \in \mathcal{D}'$ per mezzo della formula:

$$\langle t_h, f \rangle = \langle t, f_{-h} \rangle$$

dove $f_h(x) = f(x-h)$, dove f e f_h sono ovviamente in \mathcal{D} . Dimostrare che:

$$t' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_h - t}{h}$$

Esercizio 3 E' spesso comodo introdurre approssimazioni della δ per mezzo di funzioni regolari o almeno $L_1(\mathbb{R})$. Dimostrare che le seguenti successioni di funzioni $L_1(\mathbb{R})$ (o L_1 locali) sono convergenti nel senso delle distribuzioni alla $\delta(x)$

$$1) \quad g_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{(\pi n)^{1/2}}$$

$$2) \quad g_n(x) = 2n\chi_{I_n}$$

dove χ_A é la funzione caratteristica dell'insieme A e $I_n = [-1/n, 1/n]$.

$$3) \quad g_n(x) = n\phi(nx)$$

dove $\phi = \phi(x)$ una funzione positiva e tale che $\int \phi(x)dx = 1$.

Esempio. Il seguente limite vale nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin kx}{\pi x} = \delta(x).$$

Infatti se $f \in C^\infty([-M, M])$ si ha:

$$\int_{-M}^M \frac{\sin kx}{x} f(x) dx = \int_{-M}^M \frac{f(x) - f(0)}{x} \sin kx dx + f(0) \int_{-M}^M \frac{\sin kx}{x} dx.$$

Si osservi che il primo termine del membro di destra tende a zero per il teorema di Riemann-Lebesgue, in quanto la funzione $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ é integrabile. D'altra parte:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-M}^M \frac{\sin kx}{x} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-M/k}^{M/k} \frac{\sin x}{x} dx$$

converge all'integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

che può essere calcolato facilmente in campo complesso. Il risultato é π (infatti la funzione $\frac{e^z}{z}$ ha un polo in zero).

Usando il fatto che:

$$\frac{\sin kx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k e^{ipx} dp$$

si ottiene la seguente utile rappresentazione della δ :

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} dp$$

C. Trasformata di Fourier

In quest'appendice richiamiamo alcune proprietà della trasformata di Fourier e di Laplace.

Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ (a valori complessi), si definisce trasformata di Fourier di f la funzione $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\hat{f}(p) = \mathcal{F}f(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx. \quad (\text{C.1})$$

L'interesse principale di tale trasformazione risiede nel fatto che l'operazione di derivazione è particolarmente semplice se letta in trasformata di Fourier. Più precisamente dalla definizione (C.1), assumendo anche che $f \in C^1(\mathbb{R})$, segue facilmente che:

$$\mathcal{F}f'(p) = ip\mathcal{F}f(p) = ip\hat{f}(p), \quad (\text{C.2})$$

la qual cosa riduce la derivazione ad una semplice moltiplicazione per ip .

È facile vedere che l'applicazione $f \rightarrow \mathcal{F}f$ non manda L_1 in se. Infatti da una parte la trasformata di Fourier regolarizza, come si vede dalla definizione, verificando che $p \rightarrow \hat{f}(p)$ è continua. Dall'altra ci si convince immediatamente che le proprietà di decadimento all'infinito non sono garantite. Infatti se $f = \chi_{[0,1]}$, la funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1]$, risulta

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ipx} dx = \frac{1 - e^{-ip}}{ip}, \quad (\text{C.3})$$

che decade in maniera non integrabile.

In generale si verifica immediatamente con un'integrazione per parti che valgono le seguenti relazioni per n intero:

$$\mathcal{F} \frac{d^{(n)}f}{dx^n}(p) = (ip)^n \hat{f}(p) \quad (\text{C.4})$$

dove abbiamo assunto che $f \in L_1 \cap C^n$: Inoltre

$$\mathcal{F}((-ix)^n f)(p) = \frac{d^{(n)}\hat{f}}{dp^n}(p) \quad (\text{C.5})$$

dove abbiamo assunto che f non è solo L_1 , ma decade all'infinito in maniera sufficientemente rapida: più rapidamente di $|x|^{-n}$.

Le (C.4) e (C.5) ci dicono che tanto più la f è liscia (con questo intendiamo buone proprietà di differenziabilità), tanto più la sua trasformata

di Fourier decade all'infinito. Viceversa, tanto piú f ha buone proprietà di decadimento, tanto piú \hat{f} é liscia. Questa considerazione suggerisce l'introduzione di uno spazio che sia stabile per l'applicazione della trasformata di Fourier. Tale spazio si chiama spazio di funzioni a decrescenza rapida, si denota con \mathcal{S} e consiste di tutte le funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ che decadono all'infinito piú rapidamente di ogni polinomio. E' facile verificare che:

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \quad (\text{C.6})$$

tale applicazione é invertibile e inoltre:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = 1. \quad (\text{C.7})$$

La (C.7) segue dalla rappresentazione:

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x-y)} dp$$

Dalla (C.7) segue anche che l'applicazione (C.6) é iniettiva e surgettiva. Si noti inoltre che l'applicazione (C.7) é isometrica per la norma L_2 :

$$\|f\|_{L_2} = \|\hat{f}\|_{L_2}. \quad (\text{C.8})$$

Lo spazio \mathcal{S} puó essere munito della stessa topologia di \mathcal{D} (determinata dalla nozione di convergenza uniforme sui compatti di tutte le derivate). Ciò suggerisce anche l'introduzione di uno spazio di distribuzioni, \mathcal{S}' , che sono gli elementi del duale di \mathcal{S} . Poiché $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, ne segue che $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Ad esempio la funzione:

$$t(x) = \exp \exp x$$

é una distribuzione in \mathcal{D}' ma non é in \mathcal{S}' infatti non é necessariamente finito l'integrale di t contro una funzione a decrescenza rapida. Parlando rozzamente, le distribuzioni di \mathcal{S}' sono oggetti che crescono all'infinito al piú come polinomi (di qualunque grado). Per questa crescita moderata le distribuzioni di \mathcal{S}' vengono dette distribuzioni temperate. Naturalmente la δ e le sue derivate sono distribuzioni temperate.

Se $f, g \in \mathcal{S}$ allora:

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \langle f, g \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Ciò suggerisce di definire trasformata di Fourier $\mathcal{F}t = \hat{t}$ di una distribuzione temperata t , la distribuzione definita da:

$$\langle \hat{t}, f \rangle = \langle t, \hat{f} \rangle. \quad (\text{C.10})$$

Si noti che tale definizione non é applicabile alle distribuzioni di \mathcal{D}' perché se $f \in \mathcal{D}$ non necessariamente \hat{f} é in \mathcal{D} e quindi il membro di destra della (C.10) non avrebbe senso.

Si calcolino, per esercizio, la trasformata di Fourier della distribuzione temperata $\delta(x - x_0)$ e delle sue prime due derivate.

Citiamo infine un importante proprietá della trasformata di Fourier rispetto al prodotto di convoluzione. Si definisce prodotto di convoluzione tra due funzioni f e $g \in \mathcal{S}$ la funzione:

$$f * g(x) = \int f(x - y)g(y)dy.$$

Allora:

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}. \quad (\text{C.11})$$

Anche questa proprietá é di facile verifica.

L'aspetto piú rilevante della trasformata di Fourier é che essa diagonalizza l'operatore di derivazione (e dunque tutte le sue potenze). Questa é una proprietá utile per le applicazioni. Ad esempio se $u(x, t)$ risolve l'equazione delle onde, la sua trasformata di Fourier $\hat{u}(k, t)$ risolve l'equazione

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(k, t) = -k^2\hat{u}(k, t).$$

Tale equazione puó essere risolta facilmente: per ogni k é l'equazione di un oscillatore armonico. La soluzione nella variabile naturale x si ottiene antitrasformando la soluzione $\hat{u}(k, t)$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx}\hat{u}(k, t)dk.$$

Il calcolo esplicito di questo integrale però non é sempre agevole. In dimensione 1 si puó ottenere facilmente la formula di D'Alambert (si consiglia il calcolo per esercizio). Le analoghe formule in dimensione 2 e 3 richiedono calcoli piú laboriosi.

D. Interpretazione probabilistica dell'equazione del calore.

Ritorniamo al paragrafo 1 di Cap II dove abbiamo derivato microscopicamente una versione discretizzata dell'equazione del calore da un punto

di vista probabilistico. Vogliamo vedere se, anche nel caso continuo, le soluzioni dell'equazione del calore possono essere interpretate come somme su cammini. Come vedremo, ciò é possibile e il risultato sará una rappresentazione suggestiva, ma anche tecnicamente utile.

La costruzione che faremo, al fine di evitare argomenti probabilistici forse non noti al lettore, sará di tipo astratto. Ci limiteremo a considerare il caso unidimensionale, ma é facile convincersi che tutti gli argomenti trattati si estendono senza difficoltá al caso multidimensionale.

Cosideriamo \mathbb{R} la compattificazione a un punto della retta reale e lo spazio:

$$\Omega = \prod_{t \in [0, T]} \dot{\mathbb{R}}_t \quad (\text{D.1})$$

dove $\dot{\mathbb{R}}_t = \mathbb{R}$ per ogni $t \in [0, T]$. Dunque $\omega \in \Omega$ é una qualunque funzione $t \rightarrow \omega(t)$ (detta nel seguito traiettoria) senza nessuna proprietá di regolaritá e che puó assumere anche il valore del punto all'infinito !

Tuttavia Ω é uno spazio topologico compatto essendo uno spazio prodotto di compatti. Su Ω possiamo definire opportune funzioni continue nel modo seguente. Sia $F \in C(\mathbb{R}^k)$ e $\{t_1 \dots t_k\}$ una successione finita di k istanti in $[0, T]$. Allora:

$$f(\omega) = F(\omega(t_1) \dots \omega(t_k)) \quad (\text{D.2})$$

é una funzione continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Al variare di k , di tutte le possibili successioni di istanti $\{t_1 \dots t_k\}$, e di tutte le possibili funzioni $F \in C(\mathbb{R}^k)$ generiamo un insieme di funzioni continue che denotiamo \mathcal{C} . \mathcal{C} é un'algebra.

Si osservi che le funzioni $f \in \mathcal{C}$ sono funzioni che dipendono dalle traiettorie ω solo attraverso i valori che esse assumono in un numero finito di istanti noti $\{t_1 \dots t_k\}$. Tuttavia tali funzioni sono, per il Teorema di densitá di Stone, uniformemente dense nell'algebra delle funzioni continue in Ω . Infatti \mathcal{C} sono un algebra di funzioni che separa i punti e contiene l'identitá.

Consideriamo ora la funzione di Green per il problema del calore in \mathbb{R} :

$$g_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{(4\pi t)^{1/2}} \quad (\text{D.3})$$

e, per una funzione $f \in \mathcal{C}$ del tipo (3.2) per cui $t > t_k > t_{k-1} \dots t_1 > 0$,

definiamo:

$$P_{x,y}^t(f) = \int dy_1 \int dy_2 \dots \int dy_k g_{t-t_k}(y - y_k) g_{t_k-t_{k-1}}(y_k - y_{k-1}) \dots g_{t_1}(y_1 - x) F(y_1 \dots y_k). \quad (\text{D.4})$$

L'applicazione $f \in \mathcal{C} \rightarrow P_{x,y}^t(f)$ é un funzionale lineare per cui vale la stima:

$$|P_{x,y}^t(f)| \leq g_t(x - y) \|F\|_\infty \quad (\text{D.5})$$

e che dunque (essendo continuo) puó essere esteso su tutto $C(\Omega)$.

Per il Teorema di Riesz-Markov, esiste una misura positiva su Ω per cui:

$$P_{x,y}^t(f) = \int P_{x,y}^t(d\omega) f(\omega). \quad (\text{D.6})$$

Tale misura si chiama misura di Wiener ed é a priori concentrata sulle traiettorie di Ω tali che $\omega(0) = x$ e $\omega(t) = y$.

Si noti che a priori $P_{x,y}^t(d\omega)$ é definita su uno spazio enorme di traiettorie. In realtà si puó dimostrare che $P_{x,y}^t(d\omega)$ é supportata sulle traiettorie continue, piú precisamente su traiettorie Holderiane di esponente $\alpha < 1/2$ ma la $P_{x,y}^t(d\omega)$ -misura delle traiettorie differenziabili é nulla.

Per visualizzare le traiettorie "tipiche", possiamo pensare a un moto continuo, ma molto erratico.

Non diamo la dimostrazione di queste affermazioni (un po' tecniche), ma andiamo avanti a vedere le conseguenze di questa analisi sulle soluzioni dell'equazione del calore.

Definiamo ora un'altra misura su $P_x^t(d\omega)$ su Ω definita dalla relazione:

$$\int_\Omega P_x^t(d\omega) f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} dy \int_\Omega P_{x,y}^t(d\omega) f(\omega). \quad (\text{D.7})$$

La (D.7) definisce una misura, ancora sulla base del Teorema di Riesz-Markov. E' anche ovvio che le proprietá di supporto di $P_x^t(d\omega)$ sono le stesse di $P_{x,y}^t(d\omega)$. Si noti inoltre che $\int P_x^t(d\omega) = 1$ e dunque $P_x^t(d\omega)$ é una misura di probabilitá. Infine si osservi che se

$$f(\omega) = F(\omega(t)) \quad (\text{D.8})$$

(f dipende solo dal valore della traiettoria al tempo t), si ha che:

$$\int_{\mathbb{R}} F(y) dy \int_\Omega P_{x,y}^t(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} dy \int_\Omega P_{x,y}^t(d\omega) F(\omega(t)) = \int_\Omega P_x^t(d\omega) F(\omega(t)) \quad (\text{D.9})$$

Stabiliamo ora un interessante connessione con l'equazione del calore. Poiché

$$\int P_{x,y}^t(d\omega)1 = g_t(x-y) \quad (D.10)$$

ne segue che:

$$e^{\Delta t}u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} u(y) \int P_{x,y}^t(d\omega) = \int_{\Omega} P_x^t(d\omega)u(\omega(t)) \quad (D.11)$$

dove con $e^{\Delta t}$ indichiamo l'operatore soluzione dell'equazione del calore. Dalla (D.11) ne segue che tale soluzione può essere espressa per mezzo di un integrale, rispetto a una misura di probabilità, su tutte le traiettorie che partono da x .

Una formula analoga alla (D.11) può essere ottenuta a partire dalle considerazioni svolte in paragrafo 1 per l'equazione del calore discretizzata: la soluzione può essere facilmente espressa in termini di una somma su tutte le passeggiate aleatorie. Lasciamo al lettore per esercizio il ricavarla esplicitamente.

E. Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace: cenno al metodo di doppio strato

Ricordiamo preliminarmente alcuni fatti di algebra lineare che dovrebbero essere già noti al lettore.

Consideriamo lo spazio $H = \mathbb{C}^n$ e denotiamo il prodotto scalare nel modo seguente: $(f, g) = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j g_j$. Sia data l'equazione lineare

$$Af = g \quad (E.1)$$

in H . A è una matrice $n \times n$ e si denoterà con A^* la sua matrice aggiunta ($(A^*)_{i,j} = (\bar{A})_{j,i}$). Denotiamo con $Ker A$ il nucleo di A , con R_A il codominio di A e con $Ran A = dim R_A$ il suo rango (cioè la dimensione del suo codominio).

È ben noto che se $Ker A = \emptyset$ allora l'equazione (E.1) è risolvibile per ogni $g \in H$.

Teorema E

Sia $Ker A \neq \emptyset$ e $dim (Ker A) = k$. Allora $dim (Ker A^*) = k$. Siano $\{u_1 \dots u_k\} \in Ker A^*$ k vettori linearmente indipendenti. Allora l'equazione (E.1) è risolvibile se e solo se $(g, u_j) = 0$ per ogni $j = 1 \dots k$.

Dim. Se $u \in KerA^*$ allora:

$$(A^*u, v) = (u, Av) \quad (E.2)$$

per ogni $v \in H$. Ci si convince allora che $KerA^* \perp R_A$ e in piú che:

$$\begin{aligned} H &= KerA^* \oplus R_A \\ H &= KerA \oplus R_A^* \end{aligned} \quad (E.3)$$

Quindi per un generico $u \in H$ possiamo scrivere in maniera unica:

$$u = u_1 + u_2 \quad (E.4)$$

con $u_1 \in KerA$ e $u_2 \in R_{A^*}$.

Dalla relazione:

$$Au = Au_1 + Au_2 = Au_2$$

poiama dedurre che:

$$RanA = dimA(R_{A^*}) \leq dimR_{A^*} = RanA^*.$$

Scambiando i ruoli tra A e A^* si evince che $RanA = RanA^*$ e, passando ai sottospazi complementari:

$$dim(KerA^*) = dim(KerA).$$

Infine se g é ortogonale a $KerA^*$ ne segue che $g \in R_A$ e dunque l'equazione (E.1) é risolubile. ■

Come corollario abbiamo il seguente teorema di alternativa.

Corollario.

Vale una e soltanto una delle affermazioni seguenti

- 1) l'equazione $(I - A)f = g$ ha soluzione per ogni $g \in H$;
- 2) l'equazione $A^*f = f$ ammette soluzioni non banali

Le precedenti considerazioni valgono naturalmente anche nel caso che la matrice A sia considerata in \mathbb{R}^n . In questo caso alla matrice aggiunta va sostituita la matrice trasposta.

Veniamo ora al problema della costruzione la soluzione $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ del problema:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \quad (E.5)$$

$$u = f, \quad x \in \partial D \quad (\text{E.6})$$

dove $f \in C(\partial D)$ é assegnata e $D \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ é un dominio regolare e limitato.

L'idea é quella di esprimere la soluzione di questo problema, se esiste, nella forma di potenziale di doppio strato:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mu(y) \frac{\cos(x-y, n)}{|x-y|^2} d\sigma(y) = \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y). \quad (\text{E.7})$$

Per semplicitá notazionale abbiamo posto:

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(x-y, n)}{|x-y|^2}.$$

Naturalmente u é una funzione armonica in D quindi é soluzione della (8.1-1). La distribuzione di dipolo μ non é a priori nota. La si vuole determinare imponendo per u le condizioni al contorno (E.6).

Se u é soluzione della (E.5), in virtú della formula (8.8) abbiamo (ponendo $\partial D = \Sigma$):

$$f(x) = -\frac{1}{2}\mu(x) + \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y). \quad (\text{E.8})$$

che é un'equazione integrale nell'incognita μ sul dominio Σ .

Purtroppo non abbiamo studiato la teoria delle equazioni integrali che ci consente di studiare a fondo l'eq. (E.8), possiamo però dare un'idea di come si procede in questo caso.

Si osservi che l'applicazione

$$\mu \rightarrow \int_{\Sigma} \mu(y) K(x, y) d\sigma(y) := K\mu(x).$$

é un operatore lineare in qualche spazio di funzioni che, per fissare le idee, penseremo essere $L_2(\Sigma)$. Dunque l'equazione (E.8) é un'equazione lineare del tipo

$$f = -\frac{1}{2}\mu + K\mu \quad (\text{E.9})$$

da risolversi nello spazio di Hilbert $L_2(\Sigma)$, nell'incognita μ , con l'operatore K e il dato f assegnati.

Se K fosse una matrice e non un operatore su uno spazio funzionale, potremmo applicare il Corollario per cui si hanno soluzioni della (E.8) se l'equazione:

$$\frac{1}{2}\mu(x) = \int_{\Sigma} \mu(y)K(x,y)d\sigma(y). \quad (\text{E.10})$$

ammette solo la soluzione nulla. Si noti che l'operatore K é simmetrico: $K = K^*$.

L'applicabilitá del Teorema di alternativa, che abbiamo formulato per matrici, al nostro case operatoriale, puó essere giustificato dalla Teoria di Fredholm, che vale per operatori compatti che sono una classe speciale di operatori che si comportano in maniera molto simile alle matrici. Non é difficile dimostrare che l'operatore K é in effetti compatto per cui il Teorema dell'alternativa invocato puó essere applicato.

Per escludere soluzioni non banali della (E.10) procediamo per assurdo. Sia $\mu \in C(\Sigma)$ una soluzione non banale della (E.10). Il potenziale u generato da questa distribuzione di strato singolo é una funzione armonica in $\mathbb{R}^3/\partial D$, che ha derivata normale esterna $(\frac{\partial u}{\partial n}(x))^+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\partial u}{\partial n}(x)$ nulla per la (E.10).

Prendiamo ora una sfera S di raggio R , molto grande che contiene D . La funzione u in S/D é armonica, la derivata normale ha valori nulli in ∂D e molto piccoli in ∂S . Dall'identitá:

$$\int_{S/D} |\nabla u|^2 dx = \int_{S/D} \text{div} (u \nabla u) dx = \int_{\partial S} u \partial_n u \sigma(dx)$$

si ottiene che il membro di destra tende a zero quando R tende a infinito. Quindi $\nabla u = 0$ e $u = \text{cost}$. D'altra parte $u \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e dunque $u = 0$ in \mathbb{R}^3/D . Infine, poiché u é continua nell'attraversamento di Σ e u é armonica in D , u é anche nulla in D per il principio di massimo. Dunque u é nulla ovunque cosí come é nullo il salto della sua derivata normale. Quindi u é armonica in tutto lo spazio da cui si deduce che $\mu = 0$.

F. Problema di Neumann

In alcune applicazioni fisiche ha interesse risolvere il problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in D$$

$$\partial_n u(x) = f(x) \quad x \in \partial D. \quad (\text{F.1})$$

L'incognita u é dunque armonica in D , si richiede che sia $C(\bar{D})$ e che abbia derivata normale assegnata sulla frontiera di D .

Osserviamo preliminarmente che, in virtú della condizione (2.9), tale problema non può risolversi in generale dovendo essere:

$$\int_{\partial D} f(x)\sigma(dx) = 0. \quad (\text{F.2})$$

La condizione (F.2) va dunque intesa come una condizione di compatibilità che deve essere sempre soddisfatta perché il problema (F.1) abbia senso. Supponiamo dunque che la (10.2) sia soddisfatta. E' ben evidente che anche avendo una soluzione della (F.2), tale soluzione non può essere unica. Infatti le costanti soddisfano la (F.2) con $f = 0$, e dunque, se u é una soluzione del problema (F.1), anche $u + \text{cost}$ lo sarà.

Per costruire una soluzione del problema (F.2), sulla base di quanto visto nel precedente paragrafo, si cerca una soluzione del tipo:

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y)\mu(y)d\sigma(y) \quad (\text{F.3})$$

che é il potenziale di singolo strato generato dalla densità superficiale μ . La ragione di questa scelta sarà ovvia tra un attimo se si pensa che ∇u ha componente normale discontinua sul bordo e quindi la conoscenza della derivata normale sul bordo ci dá un'equazione integrale per μ dello stesso tipo di quella vista nel precedente paragrafo. Questa volta però la risolubilità di tale equazione non può essere garantita perché la condizione (F.2) che sappiamo essere essenziale per la risolubilità del problema, non é stata ancora utilizzata. In effetti si può dimostrare che l'omogenea associata ammette soluzioni non banali e che la non omogenea ammette pure soluzioni se f é ortogonale alle costanti, cioè se la (F.2) é soddisfatta.

Non sviluppiamo in dettaglio la teoria ma ci limitiamo ad affermare che la soluzione del problema (F.1) esiste, unica a meno di costanti, in ipotesi di sufficiente regolarità per f e la frontiera ∂D .

Esercizio 1. Risolvere il problema di Neumann in un rettangolo.

Esercizio 2. Determinare una formula esplicita per la soluzione del problema di Neumann per il cerchio unitario.

G. Equazione di trasporto e di continuità

Consideriamo l'equazione in \mathbb{R}^d :

$$\partial_t u + (F \cdot \nabla)u = 0 \quad (\text{G.1})$$

ove $u = u(x, t)$ é la funzione incognita e $F = F(x, t)$ é un campo vettoriale dipendente dal tempo $F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ assegnato. Chiariamo la notazione $F \cdot \nabla$:

$$F \cdot \nabla = \sum_{j=1}^d F_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Sul campo F assumeremo condizioni di regolarit  sufficienti affinché il sistema differenziale ordinario da esso generato posseda soluzione globale. Sia $\Phi_t(x)$ la traiettoria che parte da x al tempo 0, cio  la soluzione del problema di Cauchy:

$$\dot{\Phi}_t(x) = F(\Phi_t(x)); \quad \Phi_0(x) = x. \quad (\text{G.2})$$

Proposizione

Sa la funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ é soluzione del problema (G.1) allora é costante lungo le traiettorie:

$$u(\Phi_t(x), t) = u(x, 0)$$

Dim. E' una verifica diretta.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(\Phi_t(x), t) &= \partial_t u(\Phi_t(x), t) + \dot{\Phi}_t(x) \cdot \nabla u(\Phi_t(x), t) = \\ &= \partial_t u(\Phi_t(x), t) + F(\Phi_t(x)) \cdot \nabla u(\Phi_t(x), t). \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

■

L'equazione (G.3) suggerisce che é anche vero l'inverso e cio  che se u é costante lungo le traiettorie allora é soluzione dell'equazione (G.1). Ci  naturalmente é vero, almeno in un intervallo di tempo $[0, T]$, se l'applicazione $\Phi_t(x)$ é invertibile in tale intervallo. Ci  significa che per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ esiste $y \in \mathbb{R}^d$ tale che $x = \Phi_t(y)$. Useremo la notazione: $y = (\Phi_t)^{-1}(x) = \Phi_{-t}(x)$.

La (G.3) implica allora che la costanza lungo le traiettorie implica che u é soluzione. In tale ipotesi, se $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ la funzione

$$u(x, t) = u_0(\Phi_{-t}(x)) \quad (\text{G.4})$$

é la soluzione (unica: verificare!) dell'equazione (G.1) con dato iniziale u_0 .

Una variante dell'equazione (G.1), di grande interesse per le applicazioni, é la seguente:

$$\partial_t u + \operatorname{div}(Fu) = 0 \quad (\text{G.5})$$

o, equivalentemente,

$$\partial_t u + (F \cdot \nabla)u + u \operatorname{div} F = 0. \quad (\text{G.6})$$

Ne segue allora che la quantità:

$$u(\Phi_t(x), t) e^{\int_0^t \operatorname{div} F(\Phi_s(x)) ds} \quad (\text{G.7})$$

é costante lungo le soluzioni di (G.2) e, in caso di invertibilità, possiamo scrivere la soluzione di (G.5) come:

$$u(x, t) = u_0(\Phi_{-t}(x)) e^{-\int_0^t \operatorname{div} F(\Phi_{s-t}(x)) ds} \quad (\text{G.8})$$

L'equazione (G.5) prende sovente il nome di legge di conservazione perché la quantità:

$$\int_{V_t} u(x, t) dx$$

ove $V_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x = \Phi_t(y), y \in V\}$ é un volume in moto con il flusso Φ_t , é conservata nel tempo.

Per comprendere meglio tale fatto, che peraltro può essere verificato direttamente, consideriamo il caso concreto di una massa fluida che si evolve in accordo a una famiglia a un parametro di diffeomorfismi

$$\Phi_t(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

che supporremo invertibili. Il campo di velocità é denotato con F secondo la (G.2). Supponiamo che sia assegnato un campo di densità $\rho(x, t)$. Ciò significa che $\rho(x, t) dx$ é la massa che compete al tempo t al volume dx attorno al punto x . La conservazione della massa implica:

$$\int_{V_t} \rho(x, t) dx = \int_V \rho_0(x) dx \quad (\text{G.9})$$

ove $\rho_0(x)$ é il campo di densitá iniziale e

$$V_t = \{x \in \mathbb{R}^d | x = \Phi_t(y), y \in V\}$$

é il volume trasportato dal flusso Φ_t . Naturalmente $V \subset \mathbb{R}^d$ é un insieme misurabile. Abbiamo dunque:

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\Phi_t(x), t) J(x, t) dx. \quad (\text{G.10})$$

In (G.10) abbiamo operato il cambiamento di variabili

$$x \rightarrow \Phi_t(x)$$

il cui Jacobiano é

$$J(x, t) = \left| \frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial x} \right|. \quad (\text{G.11})$$

Il Teorema di Liouville assicura che J soddisfa all'equazione:

$$\partial_t J(x, t) - J(x, t) \operatorname{div} F(\Phi_t(x), t) = 0. \quad (\text{G.12})$$

Pertanto dalla (G.10) segue:

$$0 = \int_V (\partial_t \rho + (F \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} F)(\Phi_t(x), t) J(x, t) dx. \quad (\text{G.13})$$

Dall'arbitrarietá di V e dall'invertibilitá di Φ_t segue dunque

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(F \rho) = 0 \quad (\text{G.14})$$

che prende il nome di equazione di continuitá.

H. Equazione di Eulero per i fluidi ideali e onde sonore

Consideriamo un continuo fluido in \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Ogni punto $x \in \mathbb{R}^d$ é da considerarsi come una partiuccella di fluido cui compete una densitá di massa $\rho(x, t)$ e una velocitá $v(x, t)$. L'evoluzione del fluido é descritta da una famiglia di diffeomorfismi di \mathbb{R}^d :

$$\Phi_t(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

che supporremo invertibili. Ciò significa che le particelle di fluido conservano la loro individualità. Il campo di velocità é dunque definito come:

$$\dot{\Phi}_t(x) = v(\Phi_t(x), t). \quad (\text{H.1})$$

Da un punto di vista fisico $v(x, t)$ non é la velocità di una prefissata particella di fluido, ma la velocità della particella che al tempo t transita per il punto x . Accanto all'equazione di continuità, derivata in Appendice G, che descrive la conservazione della massa:

$$\partial_t \rho + \text{div}(v\rho) = 0, \quad (\text{H.2})$$

vogliamo ricavare la legge di moto. L'equazione di Newton ci dice che, se

$$P_{V_t} = \int_{V_t} \rho(x, t)v(x, t)$$

é il momento della quantità di moto che compete al volume di fluido V_t in moto col fluido, allora:

$$\dot{P}_{V_t} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho(x, t)v(x, t) = \text{forze che agiscono su } V_t. \quad (\text{H.3})$$

Infatti il termine di sinistra della (H.3) é l'impulso che compete a un volume V_t di fluido in moto. Procedendo come in Appendice G:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{V_t} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho(\Phi_t(x), t)v(\Phi_t(x), t)J(x, t) = & (\text{H.4}) \\ &\int_V (\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho)(\Phi_t(x), t)v(\Phi_t(x), t)J(x, t)dx + \\ &\int_V \rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v)(\Phi_t(x), t)J(x, t)dx + \\ &\int_V \rho v(\Phi_t(x), t)\text{div}v(\Phi_t(x), t)J(x, t)dx. \end{aligned}$$

Il primo e terzo termine si compensano per l'equazione di continuità. Dunque

$$\dot{P}_{V_t} = \int_{V_t} \rho(x, t)(\partial_t v + v \cdot \nabla v)(x, t)dx. \quad (\text{H.5})$$

Analizziamo ora il termine di forze che agisce sul volume V_t . Faremo l'ipotesi severa (che caratterizza i fluidi ideali o perfetti) che tali forze (a

parte le forze esterne, come la forza di gravità, che sono note e che danno un termine aggiuntivo che non consideriamo) siano solo forze di pressione. Esse agiscono sulla superficie ∂V_t e sono esclusivamente dirette nel verso della normale alla superficie stessa. Ciò esclude sforzi di taglio che danno luogo a termini più complicati che non analizzeremo in questa sede. Dunque assumiamo che il termine di forza sia:

$$- \int_{\partial V_t} p n d\sigma$$

per un campo $p = p(x, t)$, detto campo di pressione. $d\sigma$ è l'elemento di superficie e n è la normale esterna a V_t . Il segno meno è convenzionale. Dal teorema della divergenza segue che:

$$- \int_{\partial V_t} p n d\sigma = - \int_{V_t} \nabla p dx$$

da cui, per l'arbitrarietà di V ,

$$\rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) = -\nabla p. \quad (\text{H.6})$$

L'equazione (H.6) va accoppiata con l'equazione di continuità (H.2). Queste due equazioni non bastano a risolvere (almeno in linea di principio) il problema della determinazione delle incognite ρ e v perché il campo di pressione p non è noto. Si ricorre ad una equazione aggiuntiva ottenibile per mezzo di argomenti termodinamici. Sappiamo che pressione e densità sono legati, in equilibrio termodinamico, da relazioni, dette leggi di stato. Si pensi ad esempio all'equazione per i gas perfetti che ci dice che, a temperatura costante il prodotto $\frac{p}{\rho}$ è costante. In generale si può ipotizzare una legge del tipo:

$$p = C\rho^\gamma; \quad \gamma \geq 1, \quad (\text{H.7})$$

ove γ e C sono costanti caratteristiche del fluido in esame. Per l'aria γ vale circa 1.4.

Le equazioni (H.2),(H.6) e (H.7) prendono il nome di equazioni di Eulero.

Passiamo ora alla derivazione dell'equazione di propagazione delle onde sonore. Si noti che le equazioni di Eulero ammettono la soluzione banale $v = 0, \rho = \rho_0$ ove ρ_0 è costante nello spazio e nel tempo. Consideriamo ora

il problema ai valori iniziali per una piccola perturbazione di questo stato stazionario. Assumiamo dunque che inizialmente:

$$v = 0, \quad \rho = \rho_0(1 + h)$$

con $h \ll 1$ una perturbazione molto piccola. Assumendo che a tempi successivi, a causa della piccolezza di h si creino piccole velocità w che ci consentono di trascurare i termini non lineari, si ottiene dall'equazione di continuità:

$$\partial_t h + \operatorname{div} w = 0 \tag{H.8}$$

(trascurando $\operatorname{div}(hw)$). Dall'equazione di evoluzione della velocità otteniamo poi:

$$\partial_t w + C\gamma\rho_0^{\gamma-1}\nabla h = 0. \tag{H.9}$$

Derivando ancora rispetto al tempo l'equazione (H.8) e prendendo la divergenza dell'equazione (H.9), si perviene al risultato:

$$\partial_{tt}^2 h - C\gamma\rho_0^{\gamma-1}\Delta h = 0. \tag{H.10}$$

Dunque il disturbo h si propaga per mezzo dell'equazione delle onde e la velocità di propagazione (ad esempio la velocità di propagazione del suono) é data da $c = \sqrt{C\gamma\rho_0^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}$, ove $p_0 = C\rho_0^\gamma$.