LIBRO PRIMO [1]

I. Chiediamo [2] [che si ammetta] che pesi uguali [sospesi] a distanze uguali si facciano equilibrio; che pesi uguali [sospesi] a distanze disuguali non si facciano equilibrio, ma producano pendenza dalla parte del peso che si trova a distanza maggiore.

[1] Il testo greco del titolo è: Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων α', letteralmente: *Sugli equilibri dei piani, ovvero centri di gravità dei piani libro I*. Il titolo che si trova all'inizio del secondo libro della stessa opera è indicato più brevemente: Ἰσορροπικῶν β' (*Sugli equilibri*, II). Va notato che il termine per « equilibrio » è ἰσορροπία e che il plurale τὰ ἰσορροπικά (se ne trova appunto il genitivo nel titolo del libro II) significa: *opere sull'equilibrio* (intendendosi quelle di Archimede) così come τὰ φυσικά indica le opere sulla φύσις, cioè sulla natura.

[2] Archimede presenta queste prime sette proposizioni essenzialmente come « postulati ». Egli premette infatti il termine αἰτούμεθα che significa « chiediamo, domandiamo ». Siamo cioè nell'ordine di idee dei *postulati*, (αἰτήματα) che Euclide presenta usando il termine Ἠιτήσθω. Nei termini usati da Archimede in quest'opera e da Euclide si trova cioè il concetto della « richiesta»: si *chiede* che vengano accettate, riconosciute *vere*, alcune proposizioni iniziali. Dopo di avere enunciato i suoi sette postulati, Archimede conclude con l'inciso: Τούτων δὲ ὑποκειμένων (*his autem suppositis*, traduce Heiberg: supposte queste cose, ma *supposte* nel senso che vengon *poste sotto*, cioè poste a guisa di fondamenta); e dopo l'inciso passa senz'altro ai teoremi. Quindi: proposizioni *fondamentali* che *si chiede* di accogliere.

Nell'opera *Sulla sfera e il cilindro*, invece, i veri e propri postulati vengono designati col termine λαμβανόμενα (cose che *si prendono, si assumono*: assunzioni). Questo termine sembra più vicino ad una concezione moderna della matematica: pare quasi alluda ad una certa *libertà di assumere*, senza il bisogno di *domandare*. Anche nella *Sfera e cilindro* si termina con l'inciso: Τούτων δὲ ὑποκειμένων: anche qui i postulati vengon riconosciuti come proposizioni che costituiscono fondamento per le seguenti. Va pure aggiunto che nell'opera *Sul metodo* viene usato il termine: Προλαμβανόμενα per indicare alcune proposizioni preliminari: non si tratta però di postulati o di assunzioni, ma di proposizioni delle quali viene presupposta la conoscenza, e che vengono altrove dimostrate.

Ricordiamo infine che Proclo, nel suo *Commento al primo libro degli « Elementi » di Euclide* (p. 181, 18) riporta l'inizio del primo postulato del

II. Che se dati dei pesi che si facciano equilibrio essendo [sospesi] a certe distanze, si aggiunga qualcosa ad uno dei pesi, non si abbia più equilibrio, ma pendenza dalla parte del peso al quale si è fatta l'aggiunta.

III. Che similmente se da uno dei pesi si tolga qualcosa, non si abbia più equilibrio, ma pendenza dalla parte del peso dal quale non si è sottratto nulla.

IV. Che se figure piane uguali e simili coincidono l'una sull'altra, anche i centri di gravità coincideranno tra loro [3].

quale ci stiamo occupando: «*Archimede, cominciando l'opera sugli equilibri: Chiediamo, dice,* ecc.». Proclo aggiunge che questa proposizione verrebbe da taluno detta piuttosto «assioma» (ἀξίωμα). Quest'ultimo termine è però usato da Archimede nell'opera *Sfera e cilindro* per indicare alcune proposizioni iniziali che potremmo dire a metà strada tra definizioni e postulati.

[3] Qui, in questo postulato quarto, interviene per la prima volta il termine «centro di gravità» (κέντρον τοῦ βάρεως: letteralmente: *centro del peso*), che poi viene sistematicamente usato nel corso dell'opera, ed anche in altre opere. E il termine, pur così importante, viene introdotto senza che ne sia data alcuna definizione.

Come espone assai perspicuamente E. I. Dijksterhuis (in *Archimedes*, Copenhagen, 1956, p. 296) sono state immaginate due possibilità di spiegazione d'un tal modo di procedere. La prima ipotesi, sostenuta da Giovanni Vailati (*Del concetto di centro di gravità nella Statica di Archimede*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896-97, pp. 742-758) è che Archimede presupponga già noto il concetto di centro di gravità (forse perché egli stesso ne avrebbe trattato in un'opera andata perduta). La seconda ipotesi, sostenuta da O. Toeplitz e W. Stein (*Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes*, in «Quellen u. Studien zur Geschichte der Mathematik, ecc.», Abt. B, I, 1930, pp. 221-244) parte dal dato di fatto che pure vari altri concetti vengon qui da Archimede introdotti senza definizione (così: βάρος = peso, ἰσορροπεῖν = essere in equilibrio). I postulati fornirebbero una definizione implicita di detti concetti, centro di gravità compreso.

Che vi sia stata un'opera *elementare* antecedente di Archimede sull'equilibrio non sembrerebbe, tuttavia, essere in armonia con le citazioni che di quest'opera *Sull'equilibrio dei piani* fa Archimede stesso. Mentre alcune citazioni non ci illuminano in proposito: *Galleggianti*, II, 2: δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπίαις, con riferimento incerto ad una proposizione; *Quadratura della parabola*, 6: δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς, con riferimento alla *Equil. piani*, I, 14; *Quadratura parabola*, 10: δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Μηχανικοῖς, con riferimento alla *Equil. piani*, I, 15; *Metodo*, 1: δέδεικται γὰρ ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς (con riferimento alla *Equil. piani*, I, 14) ci fornisce invece una notizia preziosa la citazione pure contenuta nei *Galleggianti*, II, 2 (poche righe dopo l'altra sopra veduta): δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Στοιχείοις μηχανικῶν = infatti ciò è stato dimostrato negli *Elementi* di meccanica. Archimede chiama dunque *Elementi* questa sua opera. Infatti nessun dubbio che la citazione alluda effettivamente all'opera *Sull'equilibrio dei piani*: essa si riferisce alla prop. I, 8 di detta opera, e ne riporta pressoché integralmente l'enunciato.

V. Che per figure disuguali ma simili i centri di gravità saranno similmente posti. Diciamo che punti in figure simili sono similmente posti se rette condotte da essi ai vertici degli angoli uguali formano angoli uguali con i lati omologhi [4].

VI. Che se grandezze a certe distanze si fanno equilibrio, anche grandezze ad esse uguali poste alle stesse distanze si faranno equilibrio [5].

VII. Che per ogni figura il perimetro della quale è concavo dalla stessa parte, il centro di gravità debba trovarsi nell'interno della figura.

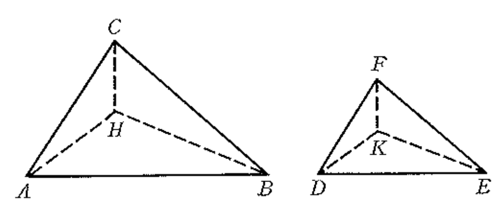
Supposte queste cose [si passa alla]:

Proposizione I.

Pesi sospesi a distanze uguali che si fanno equilibrio sono uguali.

Infatti, se fossero disuguali, togliendo la differenza tra loro dal peso maggiore, i pesi restanti non si farebbero equilibrio, poiché da uno dei due che si facevano equilibrio è stato tolto qualcosa (post. III). Dunque pesi che si facciano equilibrio essendo sospesi a distanze uguali sono uguali.

[4] Consideriamo, ad esempio, i due triangoli disuguali, ma simili, ABC, DEF. Punti come H, K si dicono similmente posti (ὁμοίως κείμενα) se rette



come AH, DK (o CH, FK, o BH, EK) formano angoli uguali coi lati corrispondenti (per esempio deve essere $\widehat{HAB} = \widehat{KDE}$; $\widehat{HCA} = \widehat{KFD}$, ecc.).

[5] Per le possibili interpretazioni di questo sesto postulato, si veda quanto viene esposto alla fine della nota alla prop. 6 di questo libro I.

PROPOSIZIONE 2.

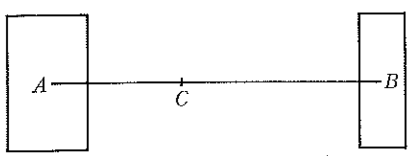
Pesi disuguali sospesi alla stessa distanza non si fanno equilibrio, ma si ha pendenza dalla parte del péso maggiore.

Infatti, tolto l'eccesso si faranno equilibrio, poiché pesi uguali sospesi a distanze uguali, si fanno equilibrio (post. I). Quindi, aggiunto ciò che si è tolto, si avrà pendenza dalla parte maggiore, poiché ad uno dei pesi in equilibrio è stato aggiunto qualcosa (post. II).

PROPOSIZIONE 3.

Se pesi disuguali sospesi a distanze disuguali si fanno equilibrio, il peso maggiore è sospeso a distanza minore [6].

Siano A, B pesi disuguali, e il maggiore sia A: e si facciano equilibrio essendo sospesi alle distanze AC, CB. Si deve dimostrare che AC è minore di CB. Infatti se possibile non sia AC minore di CB. Tolto l'eccesso di cui A supera B, poiché si toglie qualcosa da uno dei due pesi che si fanno equilibrio, si



[6] Son dati due pesi disuguali: $A > B$. Se si fanno equilibrio, e il fulcro è in C, si deve dimostrare che il *braccio* AC del peso maggiore è minore del *braccio* CB del peso minore. La dimostrazione procede per assurdo: supponiamo che non sia $AC < CB$; potrà dunque essere o $AC = CB$, o $AC > CB$. Togliamo ora dal peso A una parte uguale alla differenza A-B: i due pesi risultano allora uguali. Quindi se $AC = CB$ essi si devon fare equilibrio (post. I), mentre se $AC > CB$ si avrà pendenza dalla parte di A (sempre per il postulato I che nella sua seconda parte afferma che pesi uguali sospesi a distanze disuguali producono pendenza dalla parte del peso che si trova a distanza maggiore). Dunque: o equilibrio o pendenza dalla parte di A. Ma abbiamo tolto da A una parte, mentre la leva era in equilibrio: la pendenza deve dunque aversi dalla parte di B (post. III). Data la contraddizione trovata, si conclude che non può essere né $AC = CB$ né $AC > CB$: è dunque $AC < CB$ come volevasi dimostrare.

Osserviamo che in questa I, 3 le lettere A, B vengono impiegate tanto per indicare i pesi (o, meglio, le grandezze che hanno quei pesi), quanto per indicare i loro punti di applicazione, cioè i due estremi della leva. Nella seguente I, 4 le stesse lettere vengono usate per indicare sia i pesi (o le relative grandezze) sia i loro centri di gravità.

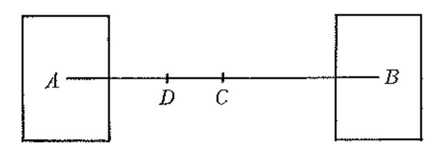
dovrà avere pendenza dalla parte di B (post. III). Ma invece non si avrà una tale pendenza: infatti o CA è uguale a CB e allora si avrà equilibrio (post. I), o $AC > CB$ e allora si avrà pendenza dalla parte di A: infatti pesi uguali sospesi a distanze disuguali non si fanno equilibrio, ma producono pendenza dalla parte della distanza maggiore (post. I). Per queste ragioni si conclude che AC è minore di CB.

Ed è manifesto che pesi che, sospesi a distanze disuguali, si fanno equilibrio, sono disuguali, e che il maggiore è sospeso a distanza minore.

PROPOSIZIONE 4.

Se due grandezze uguali non hanno lo stesso centro di gravità, il centro di gravità della figura composta dall'insieme delle due figure sarà il punto di mezzo della retta congiungente i centri di gravità delle grandezze componenti.

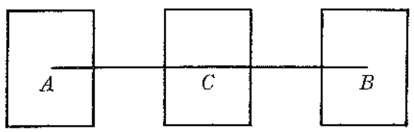
Sia A il centro di gravità della grandezza A, B quello di B; e condotta la retta AB si divida questa per metà nel punto C: dico che il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme delle due grandezze è il punto C. Se possibile non lo sia, e sia D il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme delle A, B. Sostenendo per il punto D si avrà equilibrio; dunque le grandezze A, B sospese alle distanze AD, DB si faranno equilibrio, ciò che è impossibile (post. I). È dunque manifesto che il punto C è il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di A, B.



PROPOSIZIONE 5.

Se i centri di gravità di tre grandezze stanno sulla stessa retta, le grandezze hanno uguale peso e le rette comprese tra i centri sono uguali, il centro di gravità della grandezza composta *dall'insieme di tutte le grandezze sarà il punto che è centro di gravità della grandezza di mezzo.*

Siano tre grandezze A, B, C, i loro centri di gravità siano i punti A, B, C giacenti su una stessa retta: siano inoltre uguali le grandezze A, B, C e siano rette uguali le AC, CB. Dico che il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze è il punto C.



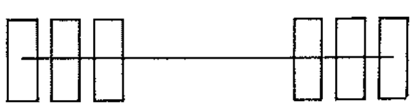
Infatti, poiché le grandezze A, B hanno uguale peso, il loro centro di gravità sarà il punto C, poiché sono uguali le AC, CB (I, 4). Ma anche il centro di gravità della grandezza C è il punto C: è dunque manifesto che il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze sarà il punto che è centro di gravità della grandezza di mezzo.

Corollario I.

Da ciò è manifesto che se i centri di gravità di figure in numero dispari sono su una stessa retta, se le grandezze aventi la stessa distanza da quella di mezzo hanno uguale peso, e le rette comprese tra i loro centri di gravità sono uguali, il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze sarà il punto che è centro di gravità della grandezza di mezzo.

Corollario II.

Anche se le grandezze sono in numero pari, se i loro centri di gravità stanno su una stessa retta, se le grandezze di mezzo



e quelle aventi la stessa distanza hanno peso uguale, e se le rette comprese tra i centri di gravità sono uguali, il centro

di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze sarà il punto medio della retta congiungente i centri di gravità, come sotto è descritto.

Proposizione 6.

Le grandezze commensurabili sono in equilibrio se sospese a distanze inversamente proporzionali ai pesi [7].

[7] Si tratta di dimostrare che se due grandezze A, B tra loro commensurabili sono sospese (per i loro centri di gravità) in due punti D, E e se il fulcro è situato in un punto C tale che si abbia l'inversa proporzionalità: $A : B = CD : CE$ si ha equilibrio: cioè l'inversa proporzionalità di cui sopra è condizione *sufficiente* per l'equilibrio. È la famosa legge della leva: ciò che conta è l'uguaglianza dei *momenti*, cioè dei prodotti dei pesi per i rispettivi bracci di leva: $A \cdot CE = B \cdot CD$ uguaglianza che si ricava dalla proporzione. Va osservato che Archimede non dimostra che l'uguaglianza dei momenti è pure condizione *necessaria* (oltre che sufficiente) per l'equilibrio. Per dimostrare che dall'inversa proporzionalità tra pesi e bracci segue l'equilibrio, Archimede fa vedere che l'insieme dei due pesi A, B (applicati rispettivamente in E, D) ha il suo centro di gravità nel fulcro C: ammette quindi che se quest'ultimo fatto si verifica il sistema sia in equilibrio.

Archimede costruisce allora, dalle due parti della ED, segmenti tali che il fulcro C risulti essere il punto medio del segmento complessivo che così si viene a costruire. Per ottenere lo scopo basta fare $DK = CE$ e $EL = CD$: in tal modo risulta che C è il punto medio dell'intero segmento LK. Ma non basta: occorre che anche i punti E, D divengano punti medi di segmenti: ciò si ottiene ponendo: $EG = LE = CD$, sicché E risulta essere punto medio del segmento LG. Al tempo stesso D risulta essere punto medio del segmento GK: infatti dall'uguaglianza $EG = CD$ si ricava, sottraendo CG dai due membri: $EG - CG = CD - CG$ ossia: $CE = DG$. Dunque $DG = DK$, ossia D è punto medio del segmento GK.

Vale la proporzione $A : B = LG : GK$ che si deduce da quella dell'ipotesi: $A : B = CD : CE$ osservando che LG è il doppio di CD e che GK è il doppio di CE. Ma per ipotesi A, B sono commensurabili, quindi son tali anche CD, CE e pure LG, GK. Se N è un segmento contenuto in entrambi i segmenti CD, CE, esso è un sottomultiplo comune anche dei segmenti LG, GK.

Sia poi F una grandezza comune misura di A, B, scelta in modo che A contenga F tante volte quante LG contiene N. Si abbia cioè: $LG : N = A : F$.

Ciò significa che se si divide LG in parti uguali ad N, e si divide A in parti uguali a F, il numero delle parti risulta uguale nei due casi. In modo simile si vede pure che se si divide GK in parti uguali ad N, e si divide B in parti uguali a F, il numero delle parti risulta anche qui uguale nei due casi.

Si supponga di avere eseguito le suddette divisioni in parti uguali tanto di LG ed A quanto di GK e B (parti che sono rispettivamente uguali a N e F). Si costruiscano grandezze F su ciascuna parte N, in modo che il centro di gravità di ciascuna F sia il punto di mezzo della corrispondente N. Si vengono così ad avere tante grandezze F su LG: tante che la loro somma è uguale ad A (così come la somma delle relative N è uguale a LG). E si hanno pure tante grandezze F su GK: la loro somma è B. Per il corollario

Siano A, B grandezze commensurabili, i centri [di gravità] dei quali siano A, B; e sia ED una qualunque lunghezza, e si abbia la proporzione: $A : B = CD : CE$. Si deve dimostrare

II della prop. 5 si viene perciò ad avere che il centro di gravità del sistema delle F relative a LG è il punto E (medio di LG). E similmente il centro di gravità del sistema delle F relative a GK è il punto D (medio di GK).

Archimede ritiene allora di poter considerare la grandezza-somma A come se fosse concentrata in E, e la grandezza-somma B come se fosse concentrata in F (cioè i centri di gravità rispettivi sono E, F). Riesaminando ora l'insieme di tutte le F relative tanto a LG quanto a GK, cioè riesaminando l'insieme delle grandezze A, B, si applica di nuovo il corollario II della prop. 5 e si ottiene che il centro di gravità del sistema A, B è il punto medio C del segmento LK. Si ha cioè equilibrio nelle seguenti condizioni: che il fulcro sia il punto C, che A sia applicata col centro di gravità in E e che B sia applicata col centro di gravità in D. Risulta così dimostrato il teorema: si ha equilibrio se si verifica la condizione: $A : B = CE : CD$.

Su questa prop. 6 sono fiorite, a partire dall'inizio del nostro secolo, varie importanti osservazioni e discussioni. Una documentazione ampia e pertinente si trova esposta nelle pp. 291-304 della citata opera *Archimedes* di E. J. Dijksterhuis. Il primo che, a quanto pare, abbia aperto il fuoco contro Archimede, ritenendo che la dimostrazione della prop. 6 contenga una petizione di principio, è Ernesto Mach, nella sua celebre opera: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt* (ediz. ital.: *I principi della meccanica*, ecc.: trad. di Dionisio Gambioli, con prefazione di Giovanni Vailati, Roma-Milano, Soc. ed. Dante Alighieri, 1909).

In sostanza il Mach trova che l'aver sostituito ad una grandezza A, avente una certa distanza dal fulcro, l'insieme di grandezze F aventi dal fulcro distanze differenti, implica la supposizione che l'azione di un peso, nei riguardi dell'equilibrio di una leva, dipenda dai due elementi peso e distanza dal fulcro in un certo modo. E ciò equivale essenzialmente, secondo Mach, proprio al teorema da dimostrare. In analogo ordine di idee si muove A. Czwalina nel volumetto *Die Quadratur der Parabel*, ecc., p. 203 (trad. ted. delle opere di Archimede negli *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*).

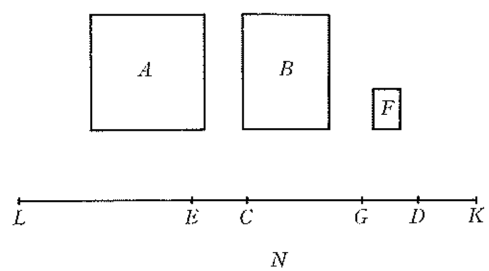
Muove alla difesa di Archimede il Toeplitz, all'opinione del quale il Dijksterhuis si associa (ed alla quale anche noi, per un motivo che esporremo, ci associamo). Secondo il Toeplitz la dimostrazione della prop. 6 risulta perfettamente valida se si interpreta in un certo modo il precedente postulato VI. Come sappiamo, detto postulato è il seguente: «Se grandezze poste a certe distanze si fanno equilibrio, anche grandezze ad esse uguali, poste alle stesse distanze, si faranno equilibrio». Questo postulato direbbe, in sostanza, che non ha alcuna influenza, sull'equilibrio, la forma dei corpi che col loro peso vengono ad agire sulla leva: quel che conta è il valore del peso. Ma secondo Toeplitz e Dijksterhuis il postulato acquista il suo pieno significato (e conduce ad interpretare rettamente la prop. 6) se per «grandezze poste alle stesse distanze» s'intende «grandezze i centri di gravità delle quali sono posti alle stesse distanze (dal fulcro)». In base a questa interpretazione, gli insiemi delle grandezze F i centri di gravità dei quali sono rispettivamente E e D, equivalgono, per quel che riguarda l'equilibrio della leva, alle grandezze A, B i cui centri di gravità sono pure D, E.

Riteniamo che, in mancanza di meglio, l'ipotesi Toeplitz-Dijksterhuis sia accettabile. Non ci sembra, infatti, accettabile l'opinione che attribuisce ad Archimede un grossolano errore logico, quale sarebbe la petizione di principio, di cui tratta il Mach.

che il punto C è il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme delle A, B.

Poiché $A : B = CD : CE$ ed A è commensurabile con C, dunque CD è commensurabile con CE (EUCL., X, 11) cioè la retta con la retta, cosicché esiste una misura comune di CE, CD. Sia essa N, e si ponga uguale a CE ciascuna delle rette DG, DK ed uguale alla DC la EL. E poiché DG è uguale a CE, anche la DG è uguale a EG, cosicché anche la EL è uguale ad EG. Dunque la LG è doppia della CD, mentre la GK è doppia della CE, cosicché la N misura ciascuna delle LG, GK, dal momento che misura le loro metà. E poiché $A : B = CD : CE$ e inoltre: $CD : CE = LG : GK$ (ciascuna delle LG, GK è infatti doppia di ciascuna delle CD, CE) si avrà dunque: $A : B = LG : GK$ (EUCL., V, 11).

Quante volte la LG contiene N, altrettante volte A contenga F; dunque: $LG : N = A : F$. Ma si ha pure: $GK : LG = B : A$ quindi *ex aequo* si ha: $GK : N = B : F$ (EUCL., V, 22). Quindi quante volte GK contiene N altrettante volte B contiene F. Ma si è determinato F in modo che A sia un suo multiplo, cosicché F è misura comune di A e di B. Quindi, divisa la LG in parti uguali ad N, e divisa A in parti uguali a F, le parti di LG uguali ad N saranno in ugual numero delle parti di A uguali a F. Cosicché se su ciascuna delle parti di LG si pone una grandezza uguale ad F avente il centro di



gravità nel punto medio della parte, l'insieme di tutte [le grandezze] è uguale alla A, e il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze sarà E (I, 5, coroll. II) poiché infatti tutte le grandezze sono in numero pari e quelle poste da ciascuna parte di E sono in numero uguale, dal momento che $LE = GE$.

Similmente si dimostrerà che se su ciascuna delle parti in cui è divisa KG si pone una grandezza uguale a F avente il centro di gravità nel punto di mezzo della parte, tutte le grandezze uguali [prese insieme] saranno uguali a B, e il centro di gravità di tutte le grandezze [prese insieme] sarà D. Dunque la grandezza A risulta posta in E, e la grandezza B in D. Ma grandezze uguali tra loro, poste su una retta, e i centri di gravità delle quali distano ugualmente l'uno dall'altro, saranno in numero pari: è manifesto quindi che il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte sarà il punto di mezzo della retta contenente i centri delle grandezze di mezzo (I, 5, coroll. II). E poiché LE è uguale a CD, e CE è uguale a DK, sarà pure la [somma] LC uguale alla [somma] CK, cosicché il centro di gravità dell'insieme di tutte le grandezze sarà il punto C. Dunque la grandezza A posta in E, la B posta in D, sospese nel punto C, si faranno equilibrio.

PROPOSIZIONE 7.

Ed anche se le grandezze sono [tra loro] incommensurabili, similmente manterranno l'equilibrio se sono poste a distanze inversamente proporzionali alle grandezze [8].

[8] Il testo di questa proposizione è, verso la fine, incompleto: bisogna quindi ritenere o che il testo originale non sia giunto integro a noi, o che si tratti di un notevole esempio del modo in cui Archimede trascura le esigenze del comune lettore, e, tacendo talcuni « passaggi », lascia al lettore stesso il compito di trarre le conclusioni. Ciò pure in un'opera a carattere elementare qual è il primo libro di *Equilibrio dei piani*. Nella prop. 7 si suppone che le due grandezze siano incommensurabili, e che valga una relazione simile a quella della precedente prop. 6 (inversa proporzionalità tra pesi e bracci di leva): $(A + B) : C = DE : EF$. Uno dei due pesi è indicato come somma $(A + B)$: nel corso della dimostrazione viene precisato a quale condizione debba soddisfare questa divisione in parti A, B.

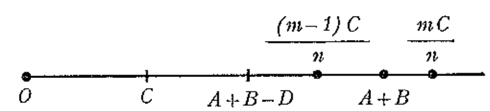
Si deve dimostrare che il centro di gravità del sistema $(A + B)$, C cade nel fulcro E, sicché si ha equilibrio. La dimostrazione procede col metodo di riduzione all'assurdo. Se possibile, non si abbia equilibrio: allora o $(A + B)$ è maggiore di quel che dovrebbe essere perché, posto in F, faccia equilibrio a C posto in D, o è minore. La dimostrazione viene svolta per il caso del « maggiore »: e vien concluso che per gli stessi motivi (διὰ ταὐτά) risulta

Siano le grandezze incommensurabili $A + B$, C posti alle distanze [dal fulcro E] DE, EF, e si abbia la proporzione: $(A + B) : C = DE : DF$. Dico che il centro di gravità della

impossibile anche il caso del « minore » (infatti i due pesi son considerati in condizioni di perfetta simmetria tra loro: si sa che sono disuguali, altrimenti non sarebbero incommensurabili, ma non si formula alcuna ipotesi sul *senso* della disuguaglianza).

Dunque, nella prima ipotesi, che si deve dimostrare assurda, il peso $(A + B)$ in F è troppo grande per equilibrare C in D: la leva penderà allora dalla parte di F. Togliamo ora qualcosa da $(A + B)$, e precisamente togliamo la parte B, sicché il peso si riduca ad A. Ma ciò in modo che vengano soddisfatte due condizioni: 1) la parte B che si toglie sia minore dell'eccesso di $(A + B)$ rispetto a C agli effetti dell'equilibrio: in altre parole il peso residuo A in F sia ancora troppo grande perché si abbia equilibrio: la leva penderà ancora dalla parte di F; 2) la parte residua A sia commensurabile col peso C.

Cerchiamo in qual modo Archimede possa aver ritenuto verificabili le due condizioni. Per la prima condizione, dato che $(A + B)$ è troppo grande rispetto a C (nelle rispettive posizioni), si supponga che togliendo un peso D da $(A + B)$ si ottenga l'equilibrio (l'esistenza di D segue in base ad una intuizione di continuità). Basta allora supporre $B < D$ perché, togliendo B, si abbia ancora pendenza dalla parte di F. E si osservi che se anche D fosse *piccolissima*, si potrebbe sempre considerare una grandezza B ancora più piccola: ciò in base alla X, 1 degli *Elementi* di Euclide, proposizione che Archimede applica più volte nelle sue opere, e il cui contenuto può essere sintetizzato con la frase significativa di un frammento di Anassagora: « Del piccolo c'è ancora il più piccolo ». Passando alla seconda condizione, consideriamo



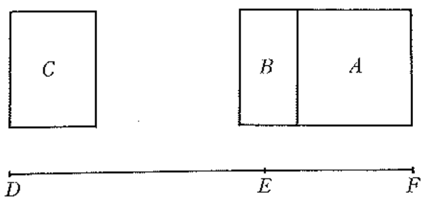
i due pesi $(A + B)$ e $(A + B - D)$: quest'ultimo è l'*equilibrante* di C. Consideriamo ora un sottomultiplo C/n di C con la condizione che esso sia minore di D (basta per ciò che sia $nD > C$, la qual relazione può ottenersi in base al cosiddetto postulato di Archimede nella forma espressa da Euclide nella quarta definizione del libro V dei suoi *Elementi*). Fissate così C/n troviamo un suo multiplo (secondo il numero m) tale che esso sia il primo ad essere maggiore di $(A + B)$:

$$m \frac{C}{n} > A + B$$

(si tratta ancora dello stesso postulato « di Archimede ». Osserviamo che un procedimento del genere si trova nella dimostrazione della V, 8 degli *Elementi* di Euclide). Allora il multiplo di C/n secondo il numero $(m - 1)$ risulterà minore di $(A + B)$, ma maggiore di $(A + B - D)$ dato che $C/n < D$): cioè il suo punto rappresentatore risulterà compreso tra quelli di $(A + B - D)$ e di $(A + B)$. Basta allora supporre che A sia uguale a $\frac{(m - 1)\, C}{n}$ perché sia verificata la condizione della commensurabilità tra A e C. Si osservi che in tal modo risulta verificata anche la prima condizione.

Eseguito, sotto le condizioni sopra esposte, l'*alleggerimento* di $(A + B)$, veniamo ad avere i due pesi A, C rispettivamente posti in F, D. Per la prima grandezza costituita dall'insieme delle grandezze $(A + B)$, C è il punto E.

Infatti se $(A + B)$ posto in F non fa equilibrio a C posto in D, o $(A + B)$ sarà maggiore di quel che deve essere, rispetto a C, per l'equilibrio, o non lo sarà [ma sarà minore]. Sia maggiore, e si tolga da $(A + B)$ una grandezza minore della differenza di cui $(A + B)$ supera C agli effetti dell'equilibrio, in modo che il rimanente A sia commensurabile con C. Poiché



ora le grandezze A, C sono commensurabili, ed è: $A : C < DE : EF$ non si avrà l'equilibrio delle grandezze A, C, poste alle distanze [dal fulcro] DE, EF, posto A in F e C in D. Per le stesse ragioni non potrà C essere maggiore di quanto occorre per fare equilibrio ad $(A + B)$.

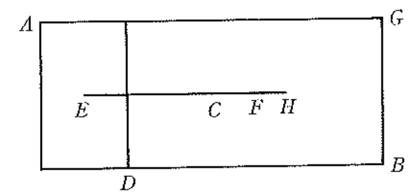
condizione non deve aversi equilibrio, ma la leva deve pendere ancora dalla parte di F. Ma per ipotesi si aveva la proporzione: $(A + B) : C = DE : EF$. Si avrà quindi la disuguaglianza di rapporti: $A : C < DE : EF$. Ma questa volta i due pesi A, C sono commensurabili: ammettiamo che la proporzione: $A : C = DE : EF$ sia non soltanto condizione sufficiente, ma anche condizione necessaria per l'equilibrio (la *sufficienza* è stata dimostrata nella I, 6: che Archimede non dimostri la *necessità*, cosa che sarebbe assai facile, ma ne lasci implicitamente la cura al lettore, non è cosa che ci sorprenda). Quindi la disuguaglianza di rapporti: $A : C < DE : EF$ porta come conseguenza la mancanza di equilibrio. E siccome questa volta A appare troppo piccolo rispetto a C perché si abbia l'equilibrio, la leva penderà dalla parte del peso C, ossia dalla parte del punto D. Ma ciò è impossibile, perché il peso B era stato scelto in modo che il toglierlo non modificasse la pendenza dalla parte di F.

Il procedimento che considera la possibilità che uno dei pesi sia maggiore o minore di quel che deve essere perché si abbia equilibrio rispetto all'altro peso (col quale è incommensurabile) ci richiama alla mente un procedimento che Galileo propone. Si tratta dell'inizio di *Giornata quinta* dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* in cui, dopo di aver criticato la definizione di proporzione degli *Elementi* di Euclide, propone quella nuova serie di definizioni che verranno poi riprese dall'*ultimo dei discepoli* Vincenzo Viviani. E precisamente ricordiamo la seguente definizione di Galileo: « Quando la prima grandezza per avere alla seconda la medesima proporzione che la terza alla quarta non è punto né maggiore né minore di quello che ella dovrebbe essere, allora s'intende aver la prima alla seconda la medesima proporzione che la terza alla quarta ».

PROPOSIZIONE 8.

Se da una grandezza si toglie una parte non avente lo stesso centro di gravità del tutto, il centro di gravità della grandezza restante è [un punto] tale che, considerata la retta congiungente i centri di gravità dell'intera grandezza e della [parte] tolta, prolungandola dalla stessa parte nella quale è il centro della grandezza intera, e dal prolungamento della retta congiungente i detti centri togliendo [una retta] tale che abbia rispetto alla distanza dei centri lo stesso rapporto che il peso della grandezza tolta ha rispetto al peso della [grandezza] restante, è [il centro di gravità della grandezza restante], l'estremo della retta sottratta [9].

Sia C il centro di gravità di una grandezza AB, e si tolga da AB la grandezza AD, il centro di gravità della quale sia il punto E. Condotta la retta congiungente EC, e prolungatala, si stacchi un segmento CF tale che: $CF : CE = AD : DG$. Si deve dimostrare che il centro di gravità della grandezza DG è il punto F.



Non lo sia, infatti, ma, se possibile, [il centro di gravità di DG] sia il punto H. Poiché dunque il centro di gravità di AD è E, quello di DG è H, il centro di gravità dell'insieme di ambedue le grandezze AD, DG si troverà sulla retta EH

[9] È data una grandezza AB avente il centro di gravità C, e da essa si sottrae la parte AD avente il centro di gravità E. Si vuol dimostrare che il centro di gravità della grandezza residua DG è un punto F tale che: 1) stia sul prolungamento della retta EC dalla parte di C; 2) soddisfi alla proporzione: $CF : CE = AD : DG$ (cioè, supposto in C il fulcro, la leva EF sarebbe in equilibrio). La dimostrazione procede col metodo di riduzione all'assurdo. Il centro di gravità della parte restante DG non sia F, ma H (viene comunque supposto che esso si trovi sul prolungamento della retta EC dalla parte di C). Ma allora la leva EH, con fulcro in C, sarebbe in equilibrio se valesse la proporzione: $CH : CE = AD : DG$. Confrontando con la proporzione valida per ipotesi, si ricava, per l'unicità del quarto proporzionale, $CH = CF$, ossia il centro di gravità della parte restante DG è il punto F, come si voleva dimostrare.

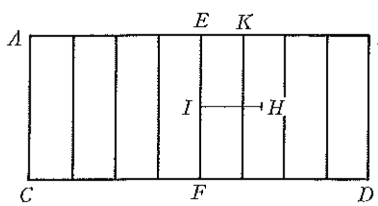
Va detto infine che la prima parte dell'enunciato di questa I, 8 viene riportata quasi letteralmente, e utilizzata, nella prop. II, 2 dell'opera *Sui corpi galleggianti*.

divisa in modo che le [sue] parti siano inversamente proporzionali alle grandezze (I, 6-7). Cosicché il punto C non si troverà nella sezione corrispondente a quanto si è detto. Dunque non è C il centro dell'insieme delle grandezze AD, DG cioè della [grandezza] AB. Ma invece lo è: ciò è stato infatti supposto. Dunque non è H il centro di gravità della grandezza DG.

PROPOSIZIONE 9.

Il centro di gravità di qualunque parallelogrammo si trova sulla retta congiungente i punti di mezzo dei lati opposti del parallelogrammo.

Sia il parallelogrammo $ABCD$, e la EF sia condotta per i punti medi dei lati AB, CD: dico che il centro di gravità del parallelogrammo $ABCD$ starà sulla EF. Non vi stia, infatti, ma, se possibile, sia H [il centro di gravità]: si conduca HI parallela alla AB. Dividendo di nuovo sempre per metà la retta EB, si giungerà ad una parte EK minore di IH (EUCL., X, 1). E si divida ciascuna delle AE, EB in parti uguali ad EK, e per i punti di divisione si conducano parallele alla EF. L'intero parallelogrammo risulterà così diviso in parallelogrammi uguali e simili a quello FK. Ora se si fanno coincidere l'uno sull'altro i parallelogrammi uguali e simili a KF, anche i loro centri di gravità coincideranno l'uno sull'altro (post. IV). Si avranno quindi delle grandezze, parallelogrammi uguali a quello KF, in numero pari, e i loro centri di gravità sono posti sulla stessa retta, e le grandezze di mezzo sono uguali, e pure uguali sono tutte le grandezze poste da ciascuna parte di quelle di mezzo, e sono ancora uguali le distanze tra un centro e l'altro: dunque il centro di gravità della grandezza costituita dall'insieme di tutte le grandezze starà sulla retta congiungente i centri di gravità delle figure di mezzo (I, 5, coroll., II).

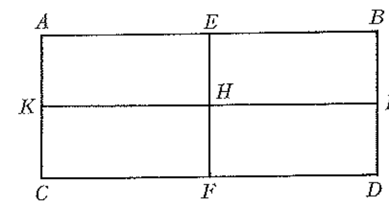


Ma ciò non è, perché il punto H è esterno ai poligoni di mezzo. dunque manifesto che il centro di gravità del parallelogrammo $ABCD$ si trova sulla retta EF.

PROPOSIZIONE 10.

Il centro di gravità di qualunque parallelogrammo è il punto nel quale si intersecano le diagonali[10].

Sia il parallelogrammo $ABCD$ ed in esso la retta EF che divida i lati AB, CD in due parti uguali, e la retta KL che divida per metà i lati AC, BD. Dunque il centro di gravità del parallelogrammo $ABCD$ sta sulla EF: è stato ciò dimostrato (I, 9).



Ma per lo stesso motivo il centro di gravità si trova anche sulla KL: dunque esso è il punto H. Ma nel punto H si intersecano le diagonali del parallelogrammo: sicché è stato dimostrato ciò che ci eravamo proposto.

PROPOSIZIONE 11.

Se due triangoli non simili tra loro e [due] punti in essi son similmente posti rispetto ai triangoli, ed un punto è il centro di gravità del triangolo nel quale si trova, anche l'altro punto è centro di gravità del triangolo nel quale si trova.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e come AC sta a DF così AB stia a DE e BC stia a EF; e nei suddetti triangoli i punti H, N siano similmente posti; inoltre H sia centro di

[10] Alla dimostrazione sopra riportata della I, 10 fa seguito, nell'edizione di Heiberg, una seconda dimostrazione (che applica il postulato IV) che per brevità tralasciamo. Nella prima dimostrazione Archimede lascia al lettore di dimostrare (ciò che è assai facile) che la diagonale AH del parallelogrammo $AEHK$ e la diagonale HD del parallelogrammo $HLDF$ stanno su una stessa retta, che è la diagonale di $ABCD$. Similmente per l'altra diagonale.