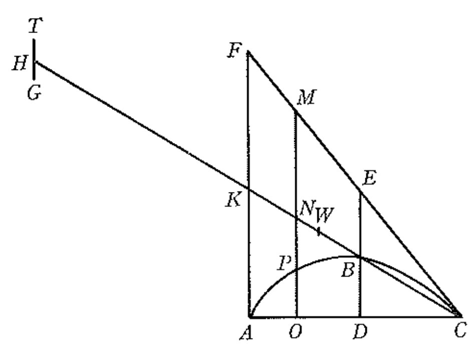
Poiché dunque la CBA è una parabola (παραβολή, *interpolazione*) e la CF è tangente, la EB è uguale alla BD: ciò infatti viene dimostrato negli Elementi (*Quadr. parabola*, 2). Per il fatto, poi, che le FA, MO sono parallele alla ED, la MN è uguale alla NO, e la FK alla KA. E poiché: $CA : AO = MO : OP$ (*Quadr. parabola*, 5) e inoltre: $CA : AO = CK : KN$ e CK è uguale a KH, dunque: $HK : KN = MO : OP$. E poiché il punto N è centro di gravità della retta MO (lemma IV) e poiché MN è uguale a NO, se dunque poniamo $TG = OP$ ed è il [punto] H il suo centro di gravità, in modo che sia $TH = HG$, la THG farà equilibrio alla MO che resti [dov'è] per il fatto che la HN è stata divisa in parti inversamente proporzionali ai pesi TG, MO, e: $HK : KN = MO : GT$ (*Equil. piani*, I, 6-7) cosicché K è il centro di gravità del[la grandezza composta da] ambedue i pesi (lemma III). Inoltre similmente, quante si traccino parallele alla ED nel triangolo FAC, faranno equilibrio, restando dove sono, alle loro parti staccate dalla parabola trasportate in H, cosicché il centro di gravità della grandezza composta da ambedue è K. E poiché il triangolo CFA consta delle [rette] tracciate nel triangolo CFA, mentre il segmento [parabolico] ABC consta delle [rette] tracciate similmente alla OP, il triangolo FAC, restando [dov'è], farà equilibrio nel punto K [assunto come fulcro], al segmento della sezione [conica] posto intorno al centro di gravità H, cosicché il centro di gravità della grandezza composta da ambedue [triangolo e segmento] è il [punto] K.



Si divida dunque la CK nel [punto] W in modo che la CK sia tripla della KW: sarà

attribuiamo pieno valore euristico a questo procedimento per la prop. 1. Come vedremo, non altrettanto potrà invece dirsi per tutte le proposizioni seguenti.

dunque il punto W il centro di gravità del triangolo AFC: ciò infatti è stato dimostrato nei [libri sugli] Equilibri (δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς Ἰσορροπικοῖς). Poiché dunque il triangolo FAC rimanendo dov'è fa equilibrio nel punto K [come fulcro] al segmento BAC posto intorno al centro di gravità H, ed il centro di gravità del triangolo FAC è il [punto] W, dunque come il triangolo AFC sta al segmento ABC posto intorno al centro H, così [sta] la HK alla KW: dunque il triangolo AFC è triplo del segmento ABC. Ma inoltre il triangolo FAC è quadruplo del triangolo ABC per il fatto che la FK è uguale alla KA, e la AD [è uguale] alla DC: dunque il segmento parabolico ABC è [uguale ai] quattro terzi del triangolo ABC.

PROPOSIZIONE 2.

Ciò dunque non è stato [veramente] dimostrato per mezzo di quel che è stato detto; ma è stata fornita una indicazione che [induce a ritenere che] la conclusione sia vera: perciò noi, vedendo che la conclusione non è stata dimostrata, ma presumendo che essa sia vera, proporremo la dimostrazione per via geometrica da noi stessi trovata, che avevamo già prima pubblicata [2].

Che qualunque sfera è quadrupla del cono avente la base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera; e che il cilindro avente base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera, si vede nel modo seguente [3].

[2] Sembra che Archimede alluda qui alla dimostrazione geometrica contenuta nella seconda parte della *Quadratura della parabola*: tale opera appare dunque pubblicata prima della stesura (*non della concezione*) del *Metodo*.

[3] In questa seconda proposizione Archimede determina il volume della sfera: esso è quadruplo del volume del cono avente per base il circolo massimo e per altezza il raggio (coi nostri simboli: $V = 4 \cdot \boxed{1/3\, \pi r^2 \cdot r} = 4/3\, \pi r^3$). La sfera viene sezionata con piani tutti paralleli tra loro: le sezioni sono cerchi. Archimede considererà poi la sfera come costituita da questi infiniti cerchi, dai quali la sfera verrà come *riempita*. Nello spirito del *Metodo* occorre paragonare le sezioni circolari della sfera con le corrispondenti sezioni di una *seconda figura* di volume noto. E, come s'è detto, tutto sta

Sia infatti una sfera, nella quale circolo massimo [sia] quello $ABCD$, e [siano] diametri perpendicolari tra loro le AC, BD, e sia un cerchio nella sfera avente la BD [come]

nello scegliere convenientemente detta *seconda figura*. Nella prop. 1, s'è visto, Archimede paragona le sezioni del segmento parabolico con quelle di un triangolo, la considerazione del quale si presenta a lui immediatamente, a causa di proposizioni precedentemente studiate su proprietà elementari della parabola. Qui la *seconda figura* è un cilindro avente per raggio di base il diametro della sfera, e per altezza pure detto diametro. Ma non basta. Anche la *prima figura* viene modificata: essa non è semplicemente (come sarebbe stato da attendersi) la sfera, ma è la somma della sfera e di un cono avente la stessa base del cilindro e uguale altezza. Sfera, cilindro e cono sono situati in modo particolare, come mostra la figura della proposizione. In questa si son rappresentate le sezioni fatte segando con un piano per l'asse comune al cilindro e al cono: asse che coincide col diametro della sfera. Pertanto $ABCD$ è un circolo massimo della sfera, il rettangolo $EFGL$ è una sezione, per l'asse, del cilindro, il triangolo AEF è una sezione, per l'asse, del cono. Archimede prolunga il diametro CA oltre A, e stacca $AH = AC$; seziona inoltre cilindro, cono e sfera con uno stesso piano (la cui traccia è NM) perpendicolare al diametro AC.

Trova poi che vale la proporzione: $AH : AS = q\ (MN) : [q\ (OP) + q\ (QR)]$ e quindi, per la proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri, detto C_i il cerchio di diametro MN (sezione del cilindro), C_o il cerchio di diametro QR (sezione del cono), C_s il cerchio di diametro OP (sezione della sfera) si ha: $AH : AS = C_i : (C_o + C_s)$.

Per la legge di equilibrio della leva, dunque, se si immagina una leva HS col fulcro in A, il cerchio C_i (sezione del cilindro), lasciato dov'è, farà equilibrio alla somma dei due cerchi C_o e C_s (sezioni del cono e della sfera) trasportati col loro centro nel punto H. E poiché ciò vale qualunque sia il piano secante MN (purché resti perpendicolare ad AC) per l'intuizione che è a base del *Metodo* si avrà pure che la sfera e il cono, trasportati i loro cerchi in H, faranno equilibrio al cilindro, supposto applicato alla leva (prolungata) nel punto K (centro di gravità del cilindro: cfr. lemma 8), cioè si avrà: $AH : AK = \textit{cilindro} : (\textit{cono} + \textit{sfera})$. Ma AH, che è stato preso uguale al diametro AC della sfera, è doppio di AK, che è il raggio della sfera stessa; quindi: $\textit{cilindro} = 2\ (\textit{cono} + \textit{sfera}) = 2\ \textit{coni} + 2\ \textit{sfere}$.

Inoltre il cilindro è triplo del cono avente la stessa base e uguale altezza; quindi: $3\ \textit{coni} = 2\ \textit{coni} + 2\ \textit{sfere}$ ossia: $1\ \textit{cono} = 2\ \textit{sfere}$. Si tratta del cono la cui sezione per l'asse è il triangolo AEF: esso è 8 volte il cono di sezione ABD, poiché questo secondo cono ha la base che è 1/4 di quella del primo cono (infatti ha il raggio DK che è metà del raggio CF) ed ha l'altezza metà. Quindi: $8\ \textit{coni}\ ADB = 2\ \textit{sfere}$ ossia la sfera risulta *uguale* al quadruplo del cono di sezione ADB, ossia del cono avente la base uguale al circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio di questa. E ciò si doveva appunto dimostrare.

Si estende poi subito il risultato al cilindro di sezione $EFGL$, poiché esso è triplo del cono di sezione AEF che a sua volta, come s'è visto, è doppio della sfera. Quindi detto cilindro è sestuplo della sfera. Considerando ora il cilindro di sezione $VWZX$ (che è la quarta parte del cilindro $EFGL$, avendo base di raggio metà e uguale altezza) si ricava: $\textit{cilindro}\ VWZX = 6/4\ \textit{sfera} = 3/2\ \textit{sfera}$.

Siamo a questo punto debitori al lettore della ricostruzione del procedimento seguito da Archimede per giungere alla proporzione chiave:

diametro [e situato in un piano] perpendicolare al [piano del] cerchio $ABCD$; e su questo cerchio perpendicolare [come base] si costruisca un cono avente il vertice nel punto A: ed estesa la sua superficie si seghi il cono con un piano per il [punto] C parallelo alla base: si avrà così un cerchio [situato in un piano] perpendicolare alla AC, e il suo diametro sarà la EF.

[A partire] da questo cerchio [come base] si costruisca un cilindro avente l'asse uguale alla AC, e i lati del cilindro siano le EL, FG. E si prolunghi la CA e si ponga la AH uguale ad essa, e si immagini la leva CH, il [punto di] mezzo della quale è A, e si conduca una retta parallela alla BD: [sia] la MN, ed essa seghi il cerchio $ABCD$ nei [punti] O, P, il diametro AC nel [punto] S, la retta AE nel [punto] Q, la AF nel [punto] R; e per la retta MN si conduca un piano perpendicolare alla AC; questo formerà nel cilindro come sezione un cerchio il diametro del quale sarà la MN, e nel cono AEF [formerà] un cerchio il diametro del quale sarà la QR. E poiché il [rettangolo] di AC, AS è uguale al [rettangolo] di MS, SQ (infatti la AC è uguale alla SM e la AS [è uguale] alla SQ) e inoltre: $\textit{rett.}\ (AC, AS) = q\ (AO) =$

$AH : AS = q\ (MN) : [q\ (OP) + q\ (QR)]$. Tanto vale dimostrare che: $AH : AS = q\ (MS) : [q\ (OS) + q\ (QS)]$. Ma essendo $AS = QS$ (il triangolo ACE è rettangolo isoscele) si ha: $q\ (OS) + q\ (QS) = q\ (OS) + q\ (AS) = q\ (AO)$. E applicando il cosiddetto primo teorema di Euclide al triangolo rettangolo AOC: $q\ (AO) = \textit{rett.}\ (AS, AC)$.

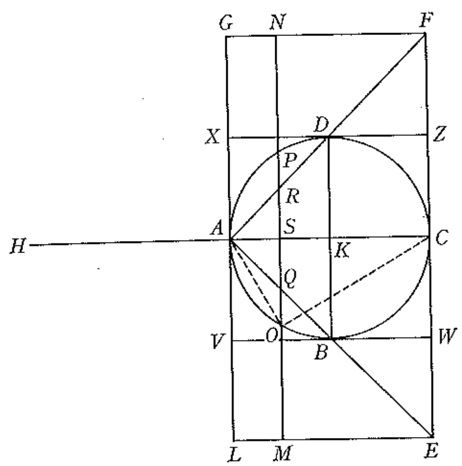
La relazione da dimostrare è dunque divenuta: $AH : AS = q\ (MS) : \textit{rett.}\ (AS, AC)$ ossia: $AC : AS = q\ (MS) : \textit{rett.}\ (AS, MS) = MS : AS$. E questo è evidente, essendo $AC = MS$.

Osserviamo ora che c'è una forte differenza tra la prop. 1 e la prop. 2. Nella prop. 1, come s'è visto, immediata risultava per Archimede la considerazione della *seconda figura*, sicché la proposizione stessa ha pieno valore euristico, cioè può aver condotto senz'altro al classico risultato sull'area del segmento parabolico: anzi il procedimento può (s'è pure detto) aver fornito ad Archimede lo spunto per ideare il suo metodo (metodo che, come egli dichiara alla fine della lettera introduttiva, applicò per la prima volta proprio per questo problema della prop. 1).

Non altrettanto può dirsi per la prop. 2. La dimostrazione sopra veduta è facile ed elementare, ma essa parte dal presupposto che già si sappia che il cilindro $EFGL$ è la *seconda figura*, da paragonare alla *prima figura*, per giunta trasformata (uguale alla somma della sfera e del cono). Una nostra ipotesi sulla via intuitiva che, anteriormente a quella del *Metodo*, poté condurre Archimede a determinare il volume della sfera, è esposta nel paragrafo 5 della *Introduzione* generale, paragrafo al quale rinviamo il lettore.

$= q\,(OS) + q\,(SQ)$ dunque: *rett.* $(MS, SQ) = q\,(OS) + q\,(SQ)$. E poiché: $AC : AS = MS : SQ$ e: $AC = AH$ sarà: $AH : AS = MS : SQ$ vale a dire: $= q\,(MS) :$ *rett.* (MS, SQ). Ma è stato dimostrato che: *rett.* $(MS, SQ) = q\,(OS) + q\,(SQ)$; dunque: $AH : AS = q\,(MS) : [q\,(OS) + q\,(SQ)]$. Ma: $q\,(MS) : [q\,(OS) + q\,(SQ)] = q\,(MN) : [q\,(OP) + q\,(QR)]$ così nello stesso rapporto il cerchio nel cilindro, il diametro del quale è la MN, sta al[la somma de]i cerchi: quello del cono, il cui diametro è QR, e quello nella sfera, il cui diametro è OP (Eucl., XII, 2).

Dunque come AH sta ad AS così il cerchio nel cilindro sta al[la somma de]i cerchi nella sfera e nel cono. Poiché dunque come AH sta ad AS così lo stesso cerchio nel cilindro, rimanendo dov'è, sta rispetto al[la somma di] ambedue i cerchi, i diametri dei quali sono le [rette] OP, QR, trasportati questi e posti intorno ad H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H, essi si faranno equilibrio rispetto al punto A [come fulcro]. Similmente si dimostrerà che se nel parallelogrammo LF si conduce un'altra [retta] parallela alla EF, e per la [retta] tracciata si conduce un piano perpendicolare alla AC, il cerchio generato nel cilindro restando dov'è farà equilibrio rispetto al punto A [come fulcro] ad ambedue i cerchi: quello generato nella sfera e quello nel cono, trasportati e collocati sulla leva col punto H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H.



Riempito (συμπληρωθέντος) dunque il cilindro dai cerchi [così] assunti e [similmente] la sfera e il cono, il cilindro restando dov'è farà equilibrio [con fulcro] nel punto A ad ambedue [i solidi]: la sfera e il cono trasportati e collocati sulla leva nel [punto] H, in modo che il centro di gravità di ciascuno di essi sia il [punto] H.

Poiché dunque i solidi suddetti si fanno equilibrio nel punto A [come fulcro], il cilindro rimanendo [dov'è] intorno al centro di gravità K (lemma VIII), la sfera e il cono trasportati intorno al centro di gravità H, sarà:

$$AH : AK = \textit{cilindro} : (\textit{sfera} + \textit{cono}).$$

Dunque il cilindro è doppio [della somma] della sfera e del cono. Ma è triplo dello stesso cono: dunque tre coni sono uguali a due coni e a due sfere. Si sottraggano i due coni che sono in comune: dunque un cono avente il triangolo AEF [come sezione con un piano passante] per l'asse è uguale alle due sfere suddette (= al doppio della sfera suddetta).

Ma il cono il cui triangolo per l'asse è AEF è uguale a otto coni il cui triangolo per l'asse sia quello ABD, poiché la EF è doppia della BD (Eucl., XII, 12). Dunque gli otto coni suddetti sono uguali a due sfere. Quindi la sfera, della quale il circolo massimo è quello $ABCD$, è quadruplo del cono, il vertice del quale è il punto A, e la base [del quale] è il cerchio tracciato intorno al diametro BD [in un piano] perpendicolare alla AC.

Si conducano ora per i punti B, D nel parallelogrammo LF le parallele VBW, XDZ e si immagini il cilindro, le basi del quale [siano] i cerchi aventi i diametri VX, WZ, e il cui asse sia AC. Poiché dunque il cilindro del quale il parallelogrammo per l'asse è quello VZ è doppio del cilindro il cui parallelogrammo per l'asse è quello VD (Eucl., XII, 14) e questo è triplo del cono il cui triangolo per l'asse è quello ABD, come [è mostrato] negli Elementi (Eucl., XII, 10: ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις) il cilindro del quale il parallelogrammo per l'asse è quello VZ è sestuplo del cono il cui triangolo per l'asse è quello ABD. Ma è stato dimostrato che la sfera il cui circolo massimo è quello $ABCD$ è quadrupla dello stesso cono: dunque il cilindro è una volta e mezza la sfera: ciò che si doveva dimostrare.

Veduto ciò: che qualunque sfera è quadrupla del cono avente per base il cerchio massimo e altezza uguale al raggio della sfera, [mi] venne l'idea che la superficie di qualunque sfera sia quadrupla del cerchio massimo della sfera: la supposizione consisteva [nel ritenere] che come qualunque cerchio è uguale ad un triangolo avente per base la circonferenza del cerchio e l'altezza uguale al raggio del cerchio, così qualunque sfera sia uguale al cono avente per base la superficie della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera [4].

[4] Qui Archimede ci rivela in qual modo giunse al celebre risultato riguardante la superficie della sfera (uguale a quattro circoli massimi). Poiché il volume della sfera è quadruplo di quello del cono avente per base il circolo massimo e per altezza il raggio, si può anche dire che detto volume sia uguale a quello di un cono avente per base il quadruplo del circolo massimo (basta dare al cerchio di base un raggio uguale al diametro della sfera) e per altezza il raggio. D'altra parte, dall'analogia col caso del cerchio (che è uguale a un triangolo avente per base la circonferenza e per altezza il raggio; cfr. *Misura del cerchio*, 1), Archimede è indotto a formulare l'ipotesi che il volume della sfera sia uguale a quella di un cono avente per base la superficie sferica e per altezza il raggio. Confrontando col cono di cui si è sopra discorso si ricava che, sotto l'ipotesi fatta, la superficie della sfera debba essere uguale al quadruplo del circolo massimo.

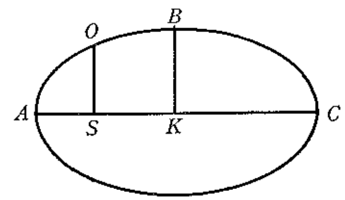
Questa intuizione, o ipotesi che dir si voglia, non viene confermata per mezzo del *Metodo*: la conferma viene solo dalla dimostrazione del libro I di *Sfera e cilindro*, in cui prima si determina l'area della superficie sferica e poi il volume della sfera, secondo il processo di una rigorsa dimostrazione, la quale procede in senso inverso a quello della effettiva ricerca che condusse alla scoperta. E poiché dall'essere la superficie sferica uguale a quattro circoli massimi segue immediatamente che essa è uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera (coi nostri simboli: $S = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$) si vede che tra la superficie laterale di detto cilindro e la superficie della sfera si ha la più completa *simmetria*: l'uguaglianza, cioè il rapporto 1 : 1. Una perfezione, cioè, nella *simmetria*. Non a caso si dice che Archimede volesse incisa sulla sua tomba la figura di una sfera e del cilindro circoscritto, che poi dà luogo anche ad una seconda notevolissima *simmetria* per quel che riguarda i volumi (rapporto 2 : 3).

Ci sembra infine che assai felicemente E. Rufini deduca dalle frasi finali della prop. 2 che l'opera sul *Metodo* sia stata composta dopo di quella *Sfera e cilindro*. Secondo l'opinione del Rufini (*op. cit.*, p. 98), alla quale aderiamo completamente, l'accenno alla determinazione, così importante, della superficie sferica è troppo fuggevole perché venga qui data per la prima volta: doveva invece trattarsi di un risultato già noto, pubblicato appunto in *Sfera e cilindro*. E in modo particolare richiamiamo l'attenzione del lettore sulla necessità di non confondere la cronologia della stesura completa dell'opera sul *Metodo* con quella delle intuizioni che sono alla base di essa, taluna delle quali intuizioni (come s'è detto) è verosimilmente anteriore perfino alla stesura della *Quadratura della parabola*.

PROPOSIZIONE 3.

Con questo metodo si vede pure che il cilindro avente la base uguale al circolo massimo di uno sferoide, e altezza uguale all'asse dello sferoide, è una volta e mezza lo sferoide; esaminato ciò è manifesto che, tagliato qualunque sferoide con un piano per il centro perpendicolare all'asse, la metà dello sferoide è doppia del cono avente la stessa base e lo stesso asse del segmento [5].

[5] Questa prop. 3 ricalca il procedimento della precedente prop. 2: si riferisce però ad un ellissoide di rotazione (lo *sferoide* di Archimede) invece che ad una sfera. La proporzione-chiave di tutto il procedimento è in questo caso: *rett.* $(AS, SC) : q\ (SO) =$ *rett.* $(AK, KC) : q\ (KB)$ ed esprime una proprietà elementare dell'ellisse, la quale viene dimostrata da Apollonio nella prop. 21 del libro I del suo trattato sulle sezioni coniche. Cioè il rapporto tra il quadrato del segmento SO perpendicolare all'asse maggiore AC e il rettangolo dei due segmenti nei quali S divide l'asse maggiore stesso, non dipende dalla posizione di S su detto asse: la proporzione sopra scritta esprime appunto il fatto che detto rapporto conserva lo stesso valore anche se S coincide col centro K dell'ellisse. Se in particolare l'ellisse è un cerchio, il valore costante del rapporto è uguale all'unità, poiché in tal caso: *rett.* $(AS, SC) = q\ (SO)$ (è il cosiddetto secondo teorema di Euclide). Applicando la geometria analitica si dimostra subito la proprietà in questione. Scritta l'equazione dell'ellisse sotto la forma:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e detta s l'ascissa di S, il rapporto che c'interessa si presenta sotto la forma:

$$(a - s)\ (a + s) : b^2\left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right) = (a^2 - s^2) : \frac{b^2}{a^2}\,(a^2 - s^2) = \frac{a^2}{b^2}$$

ossia è indipendente dall'ascissa s del punto S.

Il risultato finale della prop. 3 è questo: che il cilindro il cui parallelogramma per l'asse è quello $VWZX$ è una volta e mezza lo sferoide, cioè lo sferoide è 2/3 di detto cilindro. Ossia: detti a, b rispettivamente il semiasse maggiore e il semiasse minore dell'ellisse, il volume V dello sferoide è:

$$V = \frac{2}{3}\,\pi\, b^2 \cdot 2\,a = \frac{4}{3}\,\pi\, a\, b^2.$$

Siamo dunque ancora di fronte ad una notevole *simmetria*: sferoide e cilindro sono commensurabili, e il loro rapporto è 2 : 3, cioè viene espresso da numeri assai piccoli. Nel caso particolare in cui l'ellisse-sezione sia un cerchio, si ha: $a = b = r$ e si ritrova la formula del volume della sfera.