PROPOSIZIONE 33.

La superficie di ogni sfera è quadrupla del suo circolo massimo [82].

[82] Questa proposizione I, 33 costituisce un importante punto di arrivo (così come la seguente I, 34 che si riferisce al volume). In questa I, 33 viene rigorosamente dimostrato, fondando sui teoremi precedenti e usando il metodo di esaustione, che la superficie della sfera è il quadruplo del circolo massimo. Viene qui dimostrato un risultato al quale Archimede (come ci fa sapere nel *Metodo*) era già arrivato per via intuitiva partendo dalla conoscenza (pur ottenuta per via intuitiva) del volume della sfera, e assimilando questa ad un cono avente per base la superficie della sfera stessa e per altezza il raggio:

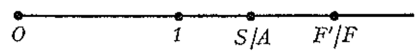
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} Sr$$

da cui: $S = 4\pi r^2$ (quadruplo del circolo massimo).

Per la dimostrazione Archimede usa (come s'è detto) il classico metodo di esaustione: per esso rinviamo il lettore al paragrafo 3 dell'*Introduzione* generale.

Egli costruisce un cerchio A uguale al quadruplo del circolo massimo (basta dare ad esso il raggio uguale al diametro della sfera) e deve dimostrare che: $S = A$.

Il metodo di esaustione viene adoperato per il rapporto S/A: occorre dimostrare che esso è uguale all'unità. A tale scopo si suppone, per assurdo, che il suddetto rapporto sia diverso dall'unità, e si comincia col supporre



che, se possibile, sia $S/A > 1$ (cioè: $S > A$). Si costruiscono allora (partendo da poligoni regolari di uguale numero di lati) le figure di rotazione, rispettivamente circoscritte e inscritte nella sfera, di cui s'è trattato nelle proposizioni 23 e 28. Poiché la superficie F' di ogni figura circoscritta è maggiore di quella F di ogni figura inscritta (come si deduce dal confronto delle proposizioni 25 e 30) il rapporto F'/F risulterà maggiore dell'unità, comunque vada crescendo il numero dei lati dei poligoni generatori. D'altra parte il rapporto F'/F è sempre maggiore di quello S/A, come si rileva osservando che F' è maggiore di S (prop. I, 28) e F è minore di A (prop. I, 25). Le cose vanno dunque come in figura: tutti i punti rappresentatori dei rapporti F'/F si trovano alla destra tanto del punto S/A quanto del punto 1. Ma Archimede mostra che, invece, si riesce a trovare un rapporto F'/F che, per dir così, *si infiltri* tra 1 e S/A, in modo cioè che sia: $F'/F < S/A$. Ma ciò è assurdo, poiché (come s'è veduto) qualunque rapporto F'/F deve essere *maggiore* di S/A. È dunque impossibile che sia $S/A > 1$ cioè $S > A$.

In modo analogo si vede che non può essere neppure $S/A < 1$ cioè $S < A$: si conclude che è $S = A$.

E come si mostra che è possibile trovare due figure tali che il rapporto F'/F delle loro superficie sia minore di quello S/A? Archimede procede nel modo seguente.

Egli sostituisce anzitutto al rapporto S/A quello tra due segmenti disuguali B, C ($B > C$) in modo che il rapporto B/C risulti minore di

Sia infatti una sfera qualunque, e il cerchio A sia quadruplo del circolo massimo: dico che A è uguale alla superficie della sfera.

quello S/A. È possibile far ciò in base alla proposizione fondamentale I, 2. Si abbia dunque:

$$B/C < S/A$$

Basterà allora dimostrare che è possibile trovare due figure di rotazione tali che per esse si abbia:

$$F'/F < B/C$$

Ma le superficie F', F delle due figure (ottenute partendo da poligoni regolari simili) stanno tra loro come i quadrati dei lati L, l dei poligoni generatori (I, 32):

$$F' : F = q(L) : q(l)$$

Occorre dunque dimostrare che:

$$q(L) : q(l) < B : C$$

Per esprimere anche il secondo membro della disuguaglianza come rapporto tra due quadrati basta considerare il segmento D medio proporzionale tra B, C:

$$B : D = D : C$$

Si ha allora: $B : C = q(B) : q(D)$ (come viene spiegato alla fine di questa nota). Si deve dunque dimostrare che è: $q(L) : q(l) < q(B) : q(D)$ ossia: $L : l < B : D$ (dove $B > D$ dal momento che è $B > C$).

Ma è senz'altro possibile soddisfare a questa condizione, in base alla I, 3 (che è immediata conseguenza della precedente, fondamentale, I, 2): *Date due grandezze disuguali e un cerchio, è possibile inscrivere nel cerchio un poligono e circoscriverne un altro, in modo che il lato del poligono circoscritto abbia, rispetto al lato del poligono inscritto, rapporto minore di quello della grandezza maggiore alla minore.*

Ecco perché Archimede costruisce la media proporzionale D tra i segmenti B, C. Ottiene infatti così:

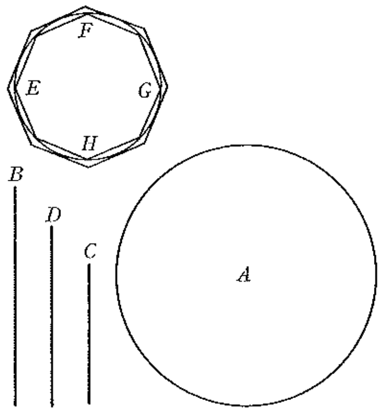
$$\begin{aligned} F' : F &= q(L) : q(l) \\ &< q(B) : q(D) \\ &< B : C \\ &< S : A \qquad \text{relazione assurda.} \end{aligned}$$

È dunque impossibile che sia $S/A > 1$ cioè $S > A$. In modo analogo si dimostra che non può essere neppure $S/A < 1$ cioè: $S < A$. Si conclude che è $S = A$ cioè che la superficie della sfera è uguale al quadruplo A del circolo massimo.

Si tratta del grande famoso risultato ottenuto e dimostrato da Archimede. Da esso si ricava subito (come fa Archimede nel corollario alla seguente prop. 34, con riferimento anche ai volumi) che la superficie della sfera è uguale a quella laterale del cilindro circoscritto (cioè del cilindro avente per raggio di base il raggio della sfera e per altezza il doppio del raggio: $2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$). Secondo la tradizione, Archimede volle scolpita sulla sua tomba la figura d'una sfera e del cilindro circoscritto, a ricordo appunto della sua famosa scoperta.

Abbiamo cercato di *ricostruire* in qual modo la dimostrazione di Archimede proceda: ci resta soltanto di mostrare come, avendosi la proporzione

Se infatti non fosse [uguale], sarebbe o maggiore o minore [della superficie della sfera]. Sia dapprima la superficie della sfera maggiore del cerchio. Vi sono quindi due grandezze disuguali: la superficie della sfera e il cerchio A; dunque è possibile prendere due rette disuguali, tali che la maggiore abbia rispetto alla minore rapporto minore di quello che la superficie della sfera ha rispetto al cerchio (I, 2). Si prendano [come tali] le rette B, C, e sia D la media proporzionale tra B, C; si immagini anche che la sfera sia tagliata da un piano per il centro secondo il cerchio $EFGH$, e si immagini anche un poligono inscritto nel cerchio, e [uno] circoscritto, tale che sia simile il circoscritto al poligono inscritto, e in modo che il lato del [poligono] circoscritto abbia [rispetto al lato del poligono inscritto] rapporto minore di quello che B ha rispetto a D (I, 3). Dunque la superficie della figura circoscritta alla sfera ha rispetto alla superficie della figura inscritta rapporto minore di quello che la superficie della sfera ha rispetto al cerchio A



continua tra segmenti: $B : D = D : C$ possa ricavarsi la proporzione:

$$B : C = q(B) : q(D)$$

(il primo termine sta al terzo *in ragione duplicata* del primo al secondo: cfr. nota 8 alla I, 5). Infatti dalla proporzione continua data si ricava analoga proporzione tra quadrati:

$$q(B) : q(D) = q(D) : q(C)$$

D'altra parte il rettangolo $r(B, C)$ di lati B, C è tale che si ha la proporzione:

$$q(B) : r(B, C) = r(B, C) : q(C)$$

(ambedue i rapporti sono infatti uguali a quello $B : C$). Per l'unicità del medio proporzionale si ricava: $q(D) = r(B, C)$ quindi: $q(B) : q(D) = q(B) : r(B, C) = B : C$. Ecco dunque che: $B : C = q(B) : q(D)$ (cioè in una proporzione continua $B : D = D : C$ il primo termine sta al terzo come il quadrato costruito sul primo sta al quadrato costruito sul secondo).

(I, 32), ciò che è impossibile: infatti la superficie della [figura] circoscritta è maggiore della superficie della sfera (I, 28), mentre la superficie della figura inscritta è minore del cerchio A (I, 25): dunque la superficie della sfera non è maggiore del cerchio A.

Dico inoltre che non è neppure minore. Infatti, se possibile, sia [minore], e si trovino, similmente [a quanto sopra veduto], le rette B, C tali che B abbia rispetto a C rapporto minore di quello che il cerchio A ha rispetto alla superficie della sfera (I, 2). E sia D la media proporzionale tra B, C, e si inscriva [nel cerchio $EFGH$] e si circoscriva di nuovo un altro poligono [come è stato fatto prima], in modo che il lato del [poligono] circoscritto abbia [rispetto al lato del poligono inscritto] rapporto minore di quello che B ha rispetto a D (I, 3): dunque la superficie della figura circoscritta ha rispetto a quella della [figura] inscritta rapporto minore di quello che il cerchio A ha rispetto alla superficie della sfera, ciò che è impossibile: infatti la superficie della figura circoscritta è maggiore del cerchio A (I, 30), mentre la superficie della [figura] inscritta è minore della superficie della sfera (I, 23).

Dunque la superficie della sfera non è neppure minore del cerchio A. Ed era stato dimostrato che non è neppure maggiore: la superficie della sfera è dunque uguale al cerchio A, ossia al quadruplo del circolo massimo.

APPLICA: I, 2; I, 3; I, 28; I, 25; I, 30; I, 23; I, 32.

È APPLICATA IN: I, 34; coroll.; I, 43.

PROPOSIZIONE 34.

Ogni sfera è quadrupla del cono avente base uguale al cerchio massimo della sfera, e per altezza il raggio della sfera[83].

[83] In questa proposizione I, 34 Archimede dimostra un altro fondamentale risultato: che la sfera è equivalente al quadruplo di un cono

Sia una sfera qualunque, e in essa sia circolo massimo quello $ABCD$. Se dunque la sfera non è quadrupla del cono suddetto, sia, se possibile, maggiore del quadruplo. Sia il cono O avente base quadrupla del cerchio $ABCD$, e altezza uguale al raggio della sfera: dunque la sfera è [supposta]

avente per base il circolo massimo e per altezza il raggio. Con i nostri simboli:

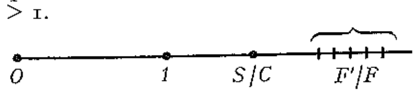
$$V = 4 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Si tratta dunque qui di volumi, mentre nella precedente proposizione si trattava di superficie.

Archimede sostituisce subito al quadruplo del cono (cioè ai quattro coni) di cui parla l'enunciato, un unico cono C avente per base il quadruplo del circolo massimo e per altezza ancora il raggio della sfera. Con ciò il teorema si ricollega al risultato intuitivo che la sfera equivale ad un cono avente per base la superficie sferica e per altezza il raggio.

Sappiamo, da un passo del *Metodo*, che Archimede giunse prima, per via intuitiva, alla scoperta del volume della sfera, e che poi, con l'assimilazione della sfera al cono di cui sopra, dedusse l'area della superficie sferica. Pertanto i risultati delle prop. 33 e 34 erano già ben noti ad Archimede quando egli si accinse a fornire le rigorose dimostrazioni. E, data la natura del metodo di esaustione, non poteva esser diversamente.

Anche per la I, 34, come per la I, 33, si applica il metodo di esaustione. Si deve dimostrare che la sfera S è equivalente al cono C? Ebbene: supponiamo che, se possibile, sfera e cono siano disuguali; ad esempio sia: $S > C$ cioè: $S/C > 1$.



Abbiamo anche questa volta a disposizione la costruzione, indefinitamente prolungabile, delle figure F, F' di rotazione, rispettivamente inscritte e circoscritte alla sfera. Con F, F' indichiamo questa volta i solidi, cioè (se si vuole) i loro volumi. Orbene: comunque si aumenti il numero dei lati dei poligoni generatori delle figure di rotazione, il rapporto F'/F dovrà risultare sempre maggiore del rapporto S/C (infatti è $F' > S$ ed è: $F < C$ per la I, 27). Cioè le cose andranno come nella prima figura, per tutti i possibili rapporti F'/F: essi saranno sempre maggiori tanto di S/C quanto di 1.

Mostreremo invece che è possibile trovare un rapporto F'/F minore di S/C: cioè *infiltreremo* un rapporto F'/F tra 1 e S/C: ciò che è assurdo. L'unico rimedio consisterà nel concludere che non può essere $S/C > 1$.

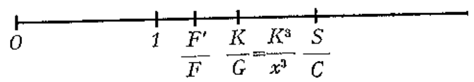
Similmente si mostra che non può essere neppure $S/C < 1$; si conclude che è $S/C = 1$ ossia: $S = C$, come si voleva dimostrare.

Vediamo ora come Archimede riesce ad *infiltrare* un rapporto F'/F tra S e C. Intanto per la proposizione fondamentale I, 2 egli può trovare due segmenti di retta K, G (con $K > G$) tali che: $K/G < S/C$ (quindi il punto rappresentatore di K/G, come si vede dalla seconda figura, si trova sempre a destra di quello di 1, ma a sinistra di quello di S/C).

L'*infiltrazione* avverrà tra 1 e K/G anziché tra 1 e S/C. Questa sostituzione del rapporto tra due volumi col rapporto tra due segmenti di

maggiore del cono O. Vi saranno [dunque] due grandezze disuguali: la sfera e il cono: è possibile prendere due rette disuguali, tali che la maggiore abbia, rispetto alla minore, rapporto minore di quello che la sfera ha rispetto al cono O (I, 2).

retta permetterà ad Archimede gli sviluppi ulteriori della dimostrazione. Per ottenere il nostro scopo, consideriamo il rapporto generico F'/F.



Dalla I, 32 sappiamo che esso è uguale al rapporto *triplicato* dei lati L, l dei due poligoni generatori, cioè che:

$$F' : F = L^3 : l^3.$$

Ora la I, 3 ci avverte che possiamo trovare un tal numero di lati per i poligoni di partenza, che il rapporto $L : l$ diventi minore di un rapporto prefissato maggiore di 1. Poniamo allora: $L : l < K : x$ e cerchiamo di determinare x in modo da realizzare l'*infiltrazione*.

Abbiamo: $F' : F < K^3 : x^3$. E siccome dobbiamo ottenere che sia: $F' : F < K : G$ scegliamo per x una determinazione tale che si abbia: $K^3 : x^3 < K : G$ da cui: $K^2G < x^3$.

E siccome è $K > G$ si vede che x deve essere maggiore di G. Esso è inoltre minore di K, dal momento che deve essere: $\frac{K^3}{x^3} > 1$ cioè: $K^3 > x^3$.

Archimede concepisce allora l'idea di ricercare il valore di x fra *i più semplici* valori intermedi tra K e G. È verosimile che abbia dapprima formulato l'ipotesi *semplicissima* che x sia il medio aritmetico M tra K, G. La relazione: $x^3 > K^2G$ diviene in tal caso: $M^3 > K^2G$ ossia, detta d la differenza $K - M = M - G$: $(K - d)^3 > K^2 (K - 2d)$ e può vedersi che tale relazione non è verificata se non sussiste una particolare relazione tra K, d: ciò che non può senz'altro supporsi dal momento che deve sussistere l'altra relazione: $K - 2d = G$.

È probabile che, visto vano il primo tentativo, Archimede sia passato al caso che subito dopo si offre alla sua ricerca: quello dell'inserzione di *due* medi aritmetici I, H tra K e G, in modo che sia:

$$K - d = I \qquad I - d = H \qquad H - d = G$$

Viene scelto il valore $x = I = K - d$.

Le cose vanno ora bene: la relazione $x^3 > K^2G$ è verificata. Infatti:

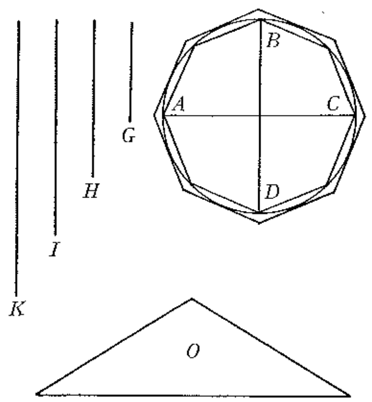
$$I^3 = (K - d)^3 = K^3 - 3K^2d + 3Kd^2 - d^3$$
$$K^2G = K^2 (K - 3d) = K^3 - 3K^2d$$

(l'aggiunta $3Kd^2 - d^3$ è positiva, essendo $K > d$).

Sostituendo I al posto di x abbiamo appunto: $K^3 : I^3 < K : G$ quindi il numero dei lati dei poligoni di partenza va scelto in modo che si abbia: $L : l < K : I$.

Va detto che, conformemente al suo stile espositivo, che affida tacitamente al lettore la risoluzione di *piccole difficoltà*, Archimede non fornisce la dimostrazione della relazione: $K^3 : I^3 < K : G$ dopo di avere costruito la progressione aritmetica decrescente K, I, H, G. Il commentatore Eutocio ne fornisce una lunga dimostrazione, e ad essa ne aggiunge un'altra più breve il Ver Eecke.

Siano [queste] le rette K, G e si prendano le [rette] I, H che ugualmente si superino scambievolmente: K rispetto ad I, e I rispetto a H, e H rispetto a G. E si immagini nel cerchio $ABCD$ inscritto un poligono il numero dei lati del quale sia divisibile per 4, e circoscritto un altro simile all'inscritto, come [abbiamo già considerato] precedentemente. E il lato del poligono circoscritto abbia rispetto al [lato] del poligono inscritto rapporto minore di quello che K ha con I (I, 3), e siano AC, BD diametri perpendicolari tra loro.



Se dunque, [fermo] restando il diametro AC, ruota il piano nel quale sono i poligoni, si avranno [due] figure: quella inscritta nella sfera e quella circoscritta, e la [figura] circoscritta avrà rispetto alla [figura] inscritta rapporto triplicato di quello che il lato del [poligono] circoscritto ha rispetto a quello del [poligono] inscritto nel cerchio $ABCD$ (I, 32). E il lato ha rispetto al lato rapporto minore di quello che K ha con I: cosicché la figura circoscritta ha [rispetto alla figura inscritta] rapporto minore di quello triplicato [del rapporto] di K ad I.

Ma K ha rispetto a G rapporto maggiore di quello triplicato [del rapporto] di K ad I: dunque la [figura] circoscritta ha rispetto alla [figura] inscritta rapporto molto minore di quello che K ha con G. E K ha con G rapporto minore di quello che la sfera ha rispetto al cono O (come s'è supposto), e permutando si ottiene ciò che è impossibile: infatti la figura circoscritta è maggiore della sfera, mentre quella inscritta è minore del cono (I, 27). La sfera non è dunque maggiore del quadruplo del cono suddetto.

Sia, se possibile, minore del quadruplo, cosicché la sfera sia minore del cono O. Si prendano le rette K, G tali che K sia maggiore di G e che abbia rispetto alla stessa rapporto minore di quello che il cono O ha rispetto alla sfera

(I, 2). E si pongano le [rette] H, I come [è stato fatto] prima, e si immagini un poligono inscritto nel cerchio $ABCD$, ed uno circoscritto, in modo che il lato del [poligono] circoscritto abbia rispetto al lato del [poligono] inscritto rapporto minore di quello che K ha rispetto ad I (I, 3): e vengano eseguite le altre costruzioni nello stesso modo prima veduto: dunque la figura solida circoscritta avrà rispetto a quella inscritta rapporto triplicato di quello che il lato del [poligono] circoscritto al cerchio $ABCD$ ha rispetto al lato del [poligono] inscritto (I, 32). Ma il lato ha rispetto al lato rapporto minore di quello di K ad I: dunque la figura circoscritta avrà, rispetto alla [figura] inscritta, rapporto minore del [rapporto] triplicato di quello che K ha con I.

Ma la [retta] K ha rispetto alla G rapporto maggiore del [rapporto] triplicato di quello che K ha con I: cosicché la figura circoscritta ha rispetto alla [figura] inscritta rapporto minore di quello che K ha con G. Quindi K ha con G rapporto minore di quello che il cono O ha rispetto alla sfera, ciò che è impossibile: infatti la figura inscritta è minore della sfera, mentre quella circoscritta è maggiore del cono O (I, 31, coroll.).

Dunque la sfera non è neppure minore del quadruplo del cono avente base uguale al cerchio $ABCD$, e altezza uguale al raggio della sfera. E fu dimostrato che non è neppure maggiore: dunque è quadrupla.

Applica: I, 2; I, 3; I, 32; I, 27; I, 31, coroll.

È applicata in: I, 34, coroll.

Corollario.

Dimostrate queste cose, è evidente che ogni cilindro avente per base il circolo massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera, e la sua superficie, comprese le basi, è una volta e mezza la superficie della sfera.

Infatti il cilindro suddetto è sestuplo del cono avente la stessa base e l'altezza uguale al raggio [della sfera]: la sfera, poi, s'è dimostrato essere quadrupla dello stesso cono (I, 34): è dunque evidente che il cilindro è una volta e mezza la sfera. Di nuovo, poiché la superficie del cilindro, eccetto le basi, si dimostra essere uguale al cerchio, il raggio del quale è medio proporzionale tra il lato del cilindro e il diametro della base (I, 13), [e poiché] il lato del suddetto cilindro circoscritto alla sfera è uguale al diametro della base: e il cerchio avente il raggio uguale al diametro della base è quadruplo della base, vale a dire del circolo massimo della sfera, dunque la superficie del cilindro, eccetto le basi, sarà quadrupla del circolo massimo, e tutta la superficie del cilindro insieme con le basi sarà sestupla del circolo massimo. Ma la superficie della sfera è quadrupla del circolo massimo (I, 33): dunque la superficie totale del cilindro è una volta e mezza la superficie della sfera [84].

APPLICA: I, 33; I, 34; I, 13.

È APPLICATO IN: II, 1.

[84] Questo corollario, che immediatamente si deduce dalle precedenti prop. 33 e 34, contiene i risultati più clamorosi: che il volume del cilindro circoscritto è uguale ad una volta e mezzo quello della sfera, e che la superficie *totale* dello stesso cilindro è uguale ad una volta e mezzo la superficie della sfera medesima (ossia che la superficie *laterale* del cilindro è uguale alla superficie della sfera). Conformemente le nostre formule:

$$V = \pi r^2 d = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S_l = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \qquad S_t = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 = \frac{3}{2} \cdot 4\pi r^2$$

Archimede osserva che il cilindro circoscritto è sestuplo del cono avente la stessa base e altezza uguale al raggio della sfera (infatti il cilindro è triplo del cono avente la stessa base e la stessa altezza, quindi è sestuplo del cono avente la stessa base e altezza metà). E poiché nella precedente I, 34 ha dimostrato che la sfera è quadrupla dello stesso cono, conclude che i volumi del cilindro circoscritto e della sfera stanno tra loro come 6 sta a 4, ossia che il cilindro è una volta e mezzo la sfera.

Per quanto riguarda, poi, le superficie, Archimede ricorda che nella I, 13 ha dimostrato che la superficie laterale S_l di un cilindro è uguale al cerchio avente per raggio la media proporzionale tra il diametro d della base e il lato h (= altezza) del cilindro stesso:

$$S_l = \pi x^2 = \pi d h = 2\pi r h \qquad (d : x = x : h)$$

Ma nel nostro caso il lato (= altezza) del cilindro è uguale al diametro di base, cioè: $h = d$. La proporzione continua scritta sopra diviene dunque: $d : x = x : d$ e dà evidentemente: $x = d$. Pertanto la superficie laterale


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

ARCHIMEDE.

L'inizio del trattato *Sulla sfera e il cilindro* nell'edizione di Basilea del 1544 delle opere di Archimede.