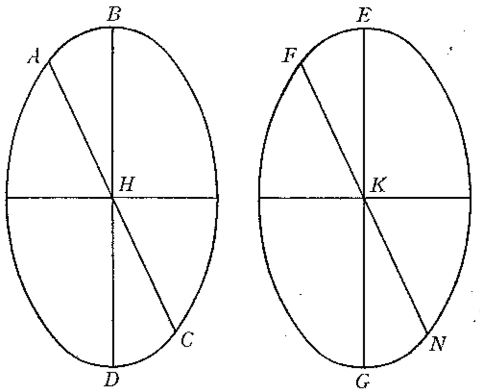
un piano perpendicolare al piano nel quale è la sezione $EFGN$; le due ellissi $ABCD$, $EFHN$, sono quindi uguali e simili tra loro, dunque coincidono l'una sull'altra ponendo la EG sulla BD e la FN sulla AC. E coincide anche il piano [eretto]



sulla NF col piano [eretto] sulla AC, poiché ambedue sono perpendicolari, dalla stessa linea, allo stesso piano. Dunque anche il segmento tagliato dallo sferoide dal piano [eretto] sulla NF e situato dalla parte del [punto] E coincide con l'altro segmento tagliato dall'altro sferoide dal piano [eretto] sulla AC e situato dalla stessa parte del [punto] B, e il residuo segmento coinciderà col residuo segmento [corrispondente] e la superficie coinciderà con la superficie.

Di nuovo, avendo posto la EG sulla BD in modo che il [punto] E coincida col [punto] D e il [punto] G [coincida] col [punto] B, e la linea [retta] compresa tra i [punti] N, F [coincida] con la [retta compresa] tra i punti A, C, è chiaro che le [due] ellissi coincidono l'una sull'altra, e che il [punto] F cadrà sul [punto] C, il [punto] N sul [punto] A. Similmente anche il piano [eretto] sulla NF coincide col piano [eretto] sulla AC, e il segmento [di sferoide] tagliato dal piano per NF, situato dalla stessa parte del [punto] G, coincide col segmento tagliato dal piano per AC situato dalla stessa parte del [punto] B; ed anche quello dalla parte di E [coincide] con quello dalla parte di D. E poiché lo stesso segmento [di sferoide] coincide con ciascuno dei

due segmenti, è chiaro che questi [due] segmenti sono uguali: e per le stesse ragioni anche le superficie [sono uguali].

Proposizione 19.

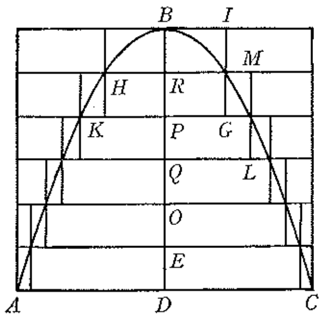
Dato un segmento di uno qualunque dei due conoidi [rettangolo o ottusangolo], ottenuto segando con un piano perpendicolare all'asse, ovvero dato un segmento di uno qualunque dei due sferoidi [allungato o appiattito], non maggiore della metà dello [intero] sferoide, similmente ottenuto segando [la figura], è possibile inscrivere [nel conoide o nello sferoide] una figura solida, e circoscriverne un'altra, composta da cilindri aventi uguale altezza, in modo che la figura circoscritta superi quella inscritta per meno di qualunque grandezza solida prefissata [21].

Sia dato un segmento quale è quello ABC, e segàtolo con un piano per l'asse la sezione del segmento sia la sezione

[21] Questa prop. 19 è di grande importanza, poiché serve come lemma, tra l'altro, rispetto alla fondamentale prop. 21, nella quale si determina il volume di un segmento di paraboloide. Qui ora si considera un segmento di qualunque conoide o sferoide, ottenuto tagliando con un piano perpendicolare all'asse, e si considerano *figure solide* rispettivamente inscritte e circoscritte. Si tratta di *figure solide* composte da cilindri aventi tutti uguale altezza. Si osservi dalla figura che ciascun cilindro componente la figura circoscritta è uguale ad un cilindro componente la corrispondente figura inscritta: unica eccezione è costituita dal *primo cilindro* della figura circoscritta, cioè da quello avente la base di diametro AC e l'asse DE: detto *primo cilindro* non è uguale a nessuno dei cilindri componenti la figura inscritta.

Segue che tale *primo cilindro* costituisce la *differenza* tra una figura solida circoscritta e la corrispondente figura solida inscritta. Ora la prop. 19 afferma che è possibile trovare due figure solide, l'una circoscritta, l'altra inscritta ad un conoide (o sferoide) tali che la loro differenza sia piccola a piacere (cioè minore di una «grandezza solida» prefissata). Si tratta quindi di far vedere che è possibile ottenere che il suddetto *primo cilindro* venga reso piccolo a piacere. A tale scopo Archimede considera il cilindro *totale* avente la base di diametro AC e l'asse DB. Con un piano parallelo alle basi divide detto cilindro in due metà, poi divide ancora per metà ciascuna metà, e così via. Si può allora applicare la X, 1 degli *Elementi* di Euclide, proposizione che Archimede applica gran numero di volte nelle sue opere: «Date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore inizialmente assunta». Il teorema ha valore anche se ogni volta si toglie metà anziché più della metà. Applicandolo al nostro caso, si vede che possiamo rendere piccolo a piacere il *primo cilindro*, cioè la differenza tra una *figura solida* circoscritta e la corrispondente figura inscritta.

conica ABC (*Con. sfer.*, 11), quella del piano che genera il segmento [sia] la retta AC, e l'asse del segmento, e diametro della sezione, sia la BD. Poiché dunque il piano secante è perpendicolare all'asse, la sezione è un cerchio, il diametro del quale [è] la CA (*Con. sfer.*, 11). Su questo cerchio sia un cilindro avente per asse la BD: la sua superficie cadrà fuori del segmento poiché [questo] è un conoide o uno sferoide non maggiore della metà dello [intero] sferoide (*Con. sfer.*, 15 e 17).



Diviso sempre [successivamente] per metà questo cilindro con piani perpendicolari all'asse, si giungerà ad un [solido] residuo minore della grandezza solida prefissata (EUCL., X, 1): sia dunque il cilindro residuo quello che ha per base il cerchio di diametro AC e l'asse ED, ad esser minore della grandezza solida prefissata.

Si divida la BD nelle [parti] uguali alla ED nei punti R, P, Q, O e dai [punti di] divisione si conducano rette parallele ad AC fino alla sezione conica, e sulle rette così condotte si innalzino piani perpendicolari alla BD: le sezioni saranno dunque cerchi aventi i centri sulla BD.

Su ciascuno dei cerchi si costruiscano due cilindri: ciascuno avente l'asse uguale a ED, ma uno dalla stessa parte del cerchio in cui è il [punto] D, l'altro dalla stessa parte in cui è il [punto] B. Verrà così ad aversi una figura solida inscritta, composta dai cilindri costruiti dalla stessa parte in cui è il [punto] D, e un'altra circoscritta composta dai cilindri costruiti dalla stessa parte in cui è il [punto] B.

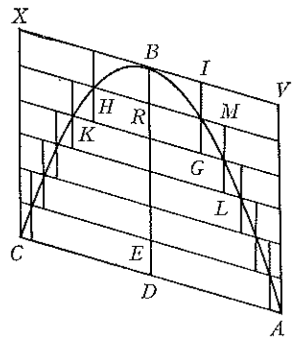
Resta ora da dimostrare che la [figura] circoscritta supera quella inscritta per meno della grandezza solida prefissata. Ciascuno dei cilindri della figura inscritta è uguale al cilindro costruito sullo stesso cerchio dalla stessa parte di B, come [per esempio] il [cilindro] HG al [cilindro] HI, quello KL a quello KM, e così per gli altri; e dunque [la somma di] tutti i cilindri [inscritti] è uguale a[lla somma di] tutti [i

cilindri circoscritti]. È dunque chiaro che la figura circoscritta supera quella inscritta del cilindro avente per base il cerchio di diametro AC e l'asse ED, e questo è minore della grandezza solida prefissata.

Proposizione 20.

Dato un segmento di uno qualunque dei due conoidi [rettangolo o ottusangolo] staccato con un piano non perpendicolare all'asse, o [dato un segmento] di uno qualunque dei due sferoidi [allungato o appiattito] non maggiore della metà dello [intero] sferoide, similmente staccato [con un piano non perpendicolare all'asse], è possibile inscrivere nel segmento una figura solida e circoscriverne un'altra, formate da tronchi di cilindro aventi uguale altezza, in modo che la figura circoscritta superi quella inscritta per meno di una grandezza solida data [22].

Sia dato un segmento quale s'è detto, e segata la figura con un altro piano per l'asse perpendicolarmente al piano che ha generato [col taglio] il segmento dato, la sezione della figura sia la sezione conica ABC, e sia la retta CA [la sezione] del piano che genera il segmento. Poiché si è supposto che il piano che genera [col taglio] il segmento non sia perpendicolare all'asse, la sezione sarà una ellisse, il diametro della quale sarà la AC (*Con. sfer.*, 12, 13, 14). Sia dunque la VU parallela alla AC e tangente alla sezione conica: la tocchi nel [punto] B, e dalla VU si conduca un piano parallelo al piano [condotto] per la [retta] AC: questo sarà tangente alla figura nel [punto] B; e se [la figura] è la sezione di un conoide rettangolo [= paraboloide] dal [punto] B si conduca



[22] Nella prop. 20 si estende il risultato della prop. 19 al caso in cui il segmento (di conoide o di sferoide) venga ottenuto con un piano non perpendicolare all'asse.

la BD parallela all'asse; se [la figura è una sezione di conoide] ottusangolo [= iperboloide] dal vertice del cono comprendente il conoide [= cono asintotico] si prolunghi la retta condotta per B: [la retta prolungata] sia BD; se poi [la figura è una sezione] di sferoide [= ellissoide], si stacchi la BD sulla retta condotta [dal centro] al punto B. È chiaro che la BD taglia per metà la AC: dunque il punto B sarà vertice del segmento e la retta BD [sarà l']asse. Si ha dunque una ellisse di diametro AC e una linea [retta] BD innalzata dal centro in un piano perpendicolare al piano nel quale è l'ellisse, e il piano [perpendicolare] passa per uno dei diametri: è dunque possibile trovare un cilindro avente per asse la BD, sulla superficie del quale sarà l'ellisse [descritta] intorno al diametro AC (*Con. sfer.*, 9): la sua superficie cadrà fuori del segmento poiché si tratta di un segmento di conoide o di [un segmento di] sferoide non maggiore della metà dello [intero] sferoide. Si avrà quindi un tronco di cilindro avente per base la ellisse di diametro AC e per asse la [retta] BD: dunque tagliando [successivamente] per metà il tronco [di cilindro] con piani paralleli al piano passante per AC, il residuo sarà minore della grandezza solida prefissata (EUCL., X, 1). Sia il tronco [di cilindro] avente per base l'ellisse di diametro AC, e per asse la ED, [ad esser] minore della grandezza solida prefissata. Si divida la DB in [parti] uguali alla DE, e dai [punti di] divisione si conducano rette parallele alla AC fino alla sezione conica, e dalle [rette] condotte si costruiscano piani paralleli al piano per AC: dunque [questi piani] taglieranno la superficie del segmento, e [le sezioni] saranno ellissi simili a quella di diametro AC, perché i piani sono paralleli (*Con. sfer.*, 14). Costruiamo dunque su ciascuna delle ellissi due tronchi di cilindro: l'uno dalla stessa parte dell'ellisse in cui è il [punto] D, l'altro dalla stessa parte del [punto] B, [ambedue] aventi l'asse uguale alla DE: vi saranno dunque certe figure solide, l'una inscritta nel segmento, l'altra circoscritta, formata da tronchi di cilindro aventi uguale altezza.

Resta da dimostrare che la figura circoscritta supera quella inscritta per meno della grandezza solida data. Si dimostrerà similmente a [quanto fatto] prima che la figura circoscritta supera quella inscritta di un tronco [di cilindro] avente per base la ellisse di diametro AC e per asse la ED: e questo [tronco] è minore della grandezza solida data.

PROPOSIZIONE 21.

Premesse queste cose, dimostreremo ciò che sulle figure [conoidi e sferoidi] ci eravamo proposto.

Ogni segmento di conoide rettangolo ottenuto [tagliando] con un piano perpendicolare all'asse è una volta e mezza il cono avente la stessa base del segmento e [lo stesso] asse [23].

[23] Questa prop. 21 è molto importante, e costituisce un primo punto di arrivo dell'opera *Conoidi e sferoidi*. Per poterla studiare meglio cominciamo col seguire passo a passo la dimostrazione.

Viene considerato un conoide rettangolo (paraboloide di rotazione) e vien dimostrato che un suo segmento (generato tagliando con un piano perpendicolare all'asse) è in volume una volta e mezza il cono avente la stessa base e lo stesso asse del segmento.

La figura si riferisce ad una sezione effettuata con un piano per l'asse: la parabola ABC è la sezione del conoide, la retta AC è la sezione del piano (perpendicolare all'asse) chè ha generato il segmento; il triangolo ABC è la sezione del cono, ad una volta e mezza il quale il segmento di conoide deve essere uguale.

Per dimostrare che valga effettivamente quest'ultima relazione, Archimede si serve del classico *metodo di esaustione*. Per notizie riguardanti tale metodo rinviamo il lettore al paragrafo 3 della *Introduzione* generale. Come è nella natura del metodo di esaustione, Archimede può usarlo solo in quanto già conosce il risultato da dimostrare. Effettivamente, nella prop. 4 del *Metodo*, egli determina, nel modo non rigoroso caratteristico del *Metodo* stesso, che il volume del segmento di conoide rettangolo è uguale ad una volta e mezza quel cono. Data la semplicità del procedimento della suddetta prop. 4 si può attribuire a questa pieno valore euristico: essa può cioè rappresentare proprio la via che condusse Archimede alla *scoperta*. Rinviamo tuttavia il lettore alla Nota introduttiva del *Metodo* per alcune riserve da formulare sull'effettivo valore euristico di taluna altra proposizione del *Metodo*.

Archimede costruisce ora un cono X che sia (in volume) una volta e mezza il cono ABC: può ottenere ciò dando a X la stessa base del cono ABC e un'altezza che sia una volta e mezza maggiore. Archimede costruisce anche il cilindro avente la stessa base e la stessa altezza del cono ABC, e constata che il cono X è la metà di detto cilindro. Infatti:

$$\text{cono } X = \frac{3}{2} \text{ cono } ABC$$

$$\text{cono } ABC = \frac{1}{3} \text{ cilindro}$$

$$\text{cono } X = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \text{ cilindro} = \frac{1}{2} \text{ cilindro}$$

Si tratta ora di dimostrare che il segmento di conoide è, in volume, Sia infatti un segmento di cono rettangolo ottenuto [tagliando] con un piano perpendicolare all'asse, e tagliàtolo con un altro piano per l'asse, sia ABC la parabola che è

uguale al cono X. Secondo il consueto schema del metodo di esaustione, si nega la tesi: se possibile, sia il segmento di conoide maggiore, o minore, del cono X.

Si comincia col considerare l'ipotesi che il segmento di conoide sia maggiore del cono X. Si inscrive nel segmento un solido, composto da cilindri di uguale altezza, e si circoscrive ad esso un altro solido, pure composto da cilindri di altezza uguale (e uguale a quella dei cilindri componenti la figura inscritta). Nella figura, in sezione, i cilindri componenti le due figure son rappresentati da rettangoli compresi tra le stesse rette parallele ad AC.

Una proposizione precedente (la n. 19) ci insegna che è possibile inscrivere e circoscrivere solidi del genere (ad un segmento di conoide) in modo che la differenza tra il solido circoscritto C ed il solido inscritto I sia minore di qualunque « grandezza solida » G prefissata: $C - I < G$. Questo teorema della prop. 19 viene dimostrato ricorrendo, come Archimede fa assai spesso, alla prima proposizione del libro X degli *Elementi* di Euclide: proposizione che tradotta in termini moderni dice in sostanza che la successione 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ ... tende al limite zero. La X, 1 di Euclide si fonda poi essenzialmente sul cosiddetto postulato di Archimede, che Euclide enuncia sotto forma di definizione (def. 4 del libro V degli *Elementi*) e che Archimede enuncia esplicitamente, sotto forma lievemente diversa, nel postulato V del libro I di *Sfera e cilindro* (cfr. ivi una nota speciale su detto postulato).

Si suppone dunque che il solido circoscritto C e il solido inscritto I differiscano tra loro per meno della supposta differenza intercorrente tra il segmento di conoide S (supposto maggiore) e il cono X (supposto minore):

$$C - I < S - X$$

E siccome $C > S$, perché possa aversi la relazione sopra scritta è necessario che sia: $I > X$. Dunque, dice Archimede, la figura inscritta è maggiore del cono X.

Osserviamo che abbiamo tre specie di cilindri: quelli C relativi alla figura inscritta, quelli C' relativi alla figura circoscritta, quelli C'' relativi all'*intero cilindro*, cioè relativi al cilindro avente per base il cerchio di diametro AC e per altezza l'intero segmento BD. Questi ultimi cilindri C'' hanno tutti ugual base e uguale altezza, mentre i cilindri C e C' hanno, sì, uguale altezza, ma basi decrescenti nel procedere da D verso B.

Consideriamo ora il *primo* C_1'' dei cilindri C'' e il primo C_1 dei cilindri C: cioè quei cilindri aventi l'altezza DE. Si applica qui una proposizione di Euclide: precisamente la XII, 11 (coni e cilindri che abbiano altezze uguali stanno tra loro come le basi). Qui le basi sono cerchi di raggi DA, KE, quindi stanno tra loro come i quadrati dei raggi (Eucl., XII, 2), pertanto: $C_1'' : C_1 = q\ (DA) : q\ (KE)$.

Ma la curva-sezione ABC è una parabola, e per essa vale quindi la proprietà fondamentale della prop. 3 dell'opera *Quadratura della parabola*: proprietà che possiamo tradurre modernamente dicendo che nella parabola le ordinate stanno tra loro come i quadrati delle ascisse. Quindi:

$$q\ (DA) : q\ (KE) = BD : BE$$

sezione della superficie (*Con. sfer.*, 11), mentre sia la retta CA la sezione del piano che genera [col taglio] il segmento. Sia poi la BD l'asse del segmento e sia un cono avente la

e poi dai triangoli simili BAD, BOE:

$$BD : BE = DA : EO$$

Si ricava:

$$C_1'' : C_1 = DA : EO$$

Così per i secondi cilindri (quelli di altezza EF) si avrà:

$$C_2'' : C_2 = DA : FP$$

e similmente per tutti gli altri: ciascuno dei cilindri C'' (componenti l'intero cilindro) sta al corrispondente cilindro C (dei componenti la figura inscritta) come la metà del diametro della sua base sta alla parte di detto diametro compresa tra le rette AB, BD. Abbiamo cioè tante proporzioni, come:

$$C_1'' : C_1 = DA : EO$$
$$C_2'' : C_2 = DA : FP$$
$$\cdots\cdots$$

ossia, invertendo:

$$C_1 : C_1'' = EO : DA$$
$$C_2 : C_2'' = FP : DA$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_n : C_n'' = ST : DA$$

Ma i secondi termini di queste proporzioni son tutti uguali tra loro, e così i quarti termini: possiamo dunque ricavare l'altra proporzione:

$$(C_1 + C_2 + \ldots.. + C_n) : C_1'' = (EO + FP + \ldots.. + ST) : DA$$

Ciò in base alla V, 24 degli *Elementi* di Euclide, secondo la quale, dalle due proporzioni:

$$a : b = c : d$$
$$e : b = f : d$$

si ricava:

$$(a + e) : b = (c + f) : d$$

Ed anzi possiamo anche trasformare la proporzione ottenuta nell'altra:

$$n\,C_1'' : (C_1 + C_2 + \ldots.. + C_n) = n \cdot DA : (EO + FP + \ldots.. + ST)$$

ossia: la somma di tutti i cilindri componenti l'*intero cilindro* sta alla somma di tutti i cilindri componenti la figura inscritta come la somma di tutti i raggi dei cerchi di base sta alla somma dei segmenti staccati su di essi dalle rette AB, BD.

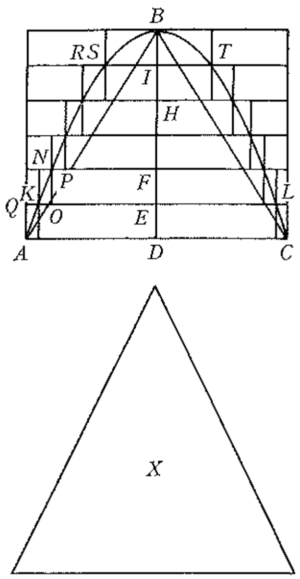
Ora esaminiamo le due grandezze che costituiscono il secondo membro dell'ultima proporzione scritta, cioè: $n \cdot DA$ e $(EO + FP + \ldots.. + ST)$.

Ci troviamo nelle condizioni per la validità del lemma (parte finale) premesso alla prop. 1 di quest'opera *Conoidi e sferoidi*, lemma che è dimostrato nella prop. *Spirali*, 11. Infatti abbiamo grandezze in progressione aritmetica decrescente (AD, EO, FP ..... ST) e altrettante grandezze tutte uguali tra loro e uguali alla maggiore tra quelle (cioè AD, AD, AD ..... n volte). Il lemma in questione ci dice che:

$$n \cdot AD > 2\ (EO + FP + \ldots.. + ST)$$

(« la somma di tutte le grandezze ciascuna delle quali è uguale alla maggiore tra quelle è maggiore del doppio della somma di tutte le grandezze restanti, eccettuata la massima ». Come si vede, dalla somma del secondo membro della disuguaglianza è stata tolta la massima grandezza AD).

Si tratta dunque di una relazione tra i raggi di base di cilindri C'' e C costituenti rispettivamente l'*intero cilindro* e la figura inscritta: e poiché



stessa base del segmento e lo stesso asse, e il suo vertice sia il [punto] B. Si deve dimostrare che il segmento del conoide è una volta e mezza questo cono.

Si costruisca infatti un cono, quello X, che sia una volta e mezza il cono la cui base è il [cerchio] di diametro AC e il cui asse è la BD, e sia anche un cilindro avente per base il cerchio di diametro AC, e per asse la BD: il cono X sarà la metà del cilindro. Dico che il segmento del conoide è uguale al cono X. Infatti, se non fosse uguale, sarebbe maggiore o minore.

tutti i cilindri hanno uguale altezza una simile disuguaglianza varrà anche tra i volumi. Cioè:

$$\text{somma cilindri } C'' > 2 \cdot \text{somma cilindri } C$$

ossia il cilindro totale (quello di base di diametro AC e di altezza BD) è maggiore del doppio della figura inscritta. Ma il suddetto cilindro (come s'è visto verso l'inizio di questa nota) è doppio del cono X, dunque il cono X risulta maggiore della figura inscritta, cioè la figura inscritta risulta minore del cono X. Ma s'era invece prima dimostrato che era $I > X$, cioè che la figura inscritta è maggiore, e non minore, del cono X. È dunque assurda l'ipotesi dalla quale siamo partiti, che cioè il segmento di conoide sia maggiore del cono X.

Similmente si dimostra che non può essere neppure minore: si conclude che il segmento di conoide è uguale al cono X, vale a dire è una volta e mezza il cono avente la base di diametro AC e l'altezza BD, ossia la stessa base e la stessa altezza del segmento.

Riassumiamo ora la stessa dimostrazione, inquadrandola nel consueto schema del metodo di esaustione (cfr. *Introduzione*, al n. 3).

Si deve dimostrare che il segmento di conoide S è uguale al cono X. Si suppone che, se possibile, sia maggiore di X. Si inscrivono, nel segmento di conoide, figure composte di cilindri C'', come è spiegato nel testo. Indichiamo con I_1, $I_2 \ldots I_n \ldots$ i volumi di dette figure inscritte, procedendo col crescere del numero dei cilindri componenti. È evidente che tutte le I sono minori di S (le figure inscritte sono minori del segmento di conoide). Ma alla fine della dimostrazione si fa vedere che le I sono anche minori del cono X. Dunque le figure I rappresentano valori approssimati per difetto tanto del segmento di conoide S quanto del cono X. È invece (come s'è visto ad un certo punto della dimostrazione) si trova una figura inscritta I che è maggiore del cono X, cioè che s'infiltra tra X e S, ciò che è assurdo, dovendo essere $I < X$.

Sia dapprima, se possibile, maggiore. Si inscriva quindi una figura solida nel segmento e si circoscriva [ad esso] un'altra [figura solida] composta da cilindri aventi uguale altezza, in modo che la figura circoscritta superi la figura inscritta per meno di quanto il segmento di conoide supera il cono X (*Con. sfer.*, 19). Inoltre dei cilindri dei quali è composta la figura circoscritta il maggiore sia quello avente per base il cerchio di diametro AC e per asse la retta ED, mentre il minore sia quello avente per base il cerchio di diametro ST e per base la BI; dei cilindri, poi, dei quali è composta la figura inscritta il maggiore sia quello avente per base il cerchio di diametro KL e per asse la DE, mentre il minore sia quello avente per base il cerchio di diametro ST e per asse la HI. Si estendano poi i piani di tutti i cilindri fino alla superficie del cilindro avente per base il cerchio di diametro AC e per asse la BD: dunque l'intero cilindro sarà diviso in cilindri in numero uguale a [quello dei] cilindri della figura circoscritta, e uguali in grandezza al maggiore tra essi.

E poiché la figura circoscritta al segmento supera la figura inscritta per meno di quanto il segmento di conoide supera il cono X, è chiaro che anche la figura inscritta nel segmento è maggiore del cono X. Inoltre il primo cilindro (di quelli componenti l'intero cilindro) che ha per asse la DE, rispetto al primo cilindro (di quelli componenti la figura inscritta) avente per asse la DE, ha lo stesso rapporto che il quadrato della DA ha rispetto al quadrato della KE [letteralmente: lo stesso rapporto che la DA ha rispetto alla KE in potenza: δυνάμει] (EUCL., XII, 11). Ma: $q\ (DA) : : q\ (KE) = BD : BE = DA : EO$.

Similmente si dimostrerà che anche il secondo cilindro (*Quadr. parabola*, 3) (di quelli [componenti] l'intero cilindro) avente per asse la EF, rispetto al secondo cilindro (di quelli [componenti] la figura inscritta) ha lo stesso rapporto che la QE, vale a dire la DA [ha] rispetto alla FP, e che ciascuno degli altri cilindri (componenti l'intero cilindro) aventi l'asse uguale alla DE, rispetto a ciascuno dei cilindri (componenti la figura inscritta) aventi lo stesso asse, avrà lo stesso rapporto che la metà del diametro della sua base ha rispetto alla parte di esso compresa tra le rette AB, BD: e dunque [la somma di] tutti i cilindri (componenti l'[intero] cilindro) la cui base è il cerchio di diametro AC, mentre l'asse è la retta DB, rispetto a [la somma di] tutti i cilindri (componenti la figura inscritta) avrà lo stesso rapporto che [la somma di] tutte le rette che son raggi dei cerchi (che son basi dei [primi] cilindri sopra detti), ha rispetto a [la somma di] tutte le rette staccate su di essi tra le [rette] AB, BD. Quella [somma delle] rette suddette (eccettuata la AD) è maggiore del doppio [della somma] delle altre rette, cosicché [la somma di] tutti i cilindri (componenti l'intero cilindro) il cui asse è DI, è maggiore del doppio della figura inscritta: dunque anche l'intero cilindro il cui asse è la DB è molto [*a fortiori*] maggiore del doppio della figura inscritta. Ma [il cilindro] era doppio del cono X; dunque la figura inscritta è minore del cono X, ciò che è impossibile: era stato infatti dimostrato [che è] maggiore. Dunque il [segmento di] conoide non è maggiore del cono X.

Similmente [si dimostra che] non è neppure minore. Infatti si inscriva di nuovo la figura e si circoscriva [un'altra], in modo che [l'una] superi [l'altra] per meno di quanto il cono X supera il segmento di conoide (*Con. sfer.*, 19); e si dispongano le stesse cose di prima. Poiché dunque la figura inscritta è minore del segmento [di conoide] e la figura inscritta è superata dalla [figura] circoscritta per meno di quanto il segmento è minore del cono X, è chiaro che la figura circoscritta è minore del cono X. Di nuovo, poi, il primo cilindro (di quelli componenti l'intero cilindro) avente per asse la DE, rispetto al primo cilindro (di quelli componenti la figura circoscritta) avente lo stesso asse ED, ha lo stesso rapporto che il quadrato di AD ha rispetto allo stesso [quadrato di AD]. Inoltre il secondo cilindro (di quelli componenti l'intero cilindro) avente per asse la EF, rispetto al secondo cilindro (di quelli componenti la figura circoscritta) avente per asse la EF, ha lo stesso rapporto che il quadrato di DA ha rispetto al quadrato di KE: questo [rapporto] è lo stesso che ha la BD rispetto alla BE e [lo stesso che] la DA ha rispetto alla EO.

E così ciascuno degli altri cilindri (di quelli componenti l'intero cilindro) aventi l'asse uguale alla DE, rispetto a ciascuno dei cilindri (di quelli componenti la figura circoscritta) aventi lo stesso asse, avrà lo stesso rapporto che la metà del diametro della loro base ha rispetto alle rette staccate su di esso dalle rette AB, BD: e dunque [la somma di] tutti i cilindri (componenti l'intero cilindro) il cui asse è la retta BD, rispetto a[lla somma di] tutti i cilindri (componenti la figura circoscritta) avranno lo stesso rapporto che [la somma di] tutte le rette ha rispetto a[lla somma di] tutte le rette. Ma [la somma di] tutte le rette che son raggi dei cerchi che son basi dei cilindri, è minore del doppio [della somma] di tutte le rette tagliate su di esse con la AD; è dunque chiaro che anche [la somma di] tutti i cilindri componenti l'intero cilindro è minore del doppio [della somma] dei cilindri componenti la figura circoscritta: dunque il cilindro avente per base il cerchio di diametro AC e per asse la BD, è minore del doppio della figura circoscritta. Ma non è, bensì [è] maggiore del doppio: infatti [il cilindro] è doppio del cono X, ed è stato dimostrato che la figura circoscritta è minore del cono X. Dunque il segmento di conoide non è neppure minore del cono X. Ed è stato dimostrato che non è maggiore, dunque è una volta e mezza il cono avente la stessa base del segmento e lo stesso asse.

Proposizione 22.

Anche se il segmento di conoide rettangolo viene ottenuto [tagliando] con un piano non perpendicolare all'asse, similmente esso sarà uguale ad una volta e mezza il segmento di cono avente la stessa base e lo stesso asse.

Sia un segmento di conoide rettangolo ottenuto tagliando come s'è detto, e tagliàtolo con un [altro] piano per l'asse, perpendicolare al piano che ha generato, col taglio, il segmento, la sezione della figura sia la parabola ABC (*Con. sfer.*, 11), quella del piano che ha generato, col taglio, il segmento [sia] la retta AC. E [sia] la VU parallela alla AC, e tangente