DEFINIZIONI

(TERMINI, ὅροι) [a].

I. Punto è ciò che non ha parti [1].
II. Linea è lunghezza senza larghezza [2].

a. In greco ὅρος significa appunto termine, linea o segno di confine.

[1] È, questa del punto, la più celebre definizione di Euclide. Essa viene comunemente interpretata nel senso che il punto, non avendo parti, non ha neppure estensione alcuna: Euclide introdurrebbe in tal modo, nella sua prima definizione, il punto quale ente idealizzato, cioè il punto privo di dimensioni della *geometria di precisione*.

Chi scrive lascia naturalmente libero il lettore di associarsi a tale *communis opinio*: tuttavia osserva che la prima definizione si riferisce tanto al punto quanto all'unità, la quale viene pure definita come *non avente parti* (cfr. PLATONE, *Sofista*, 245 *a*, *Repubblica*, 526 *a*, ecc.). Già Proclo, del resto, nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, nota l'identità delle due definizioni, distinguendo tuttavia, con i Pitagorici, il punto come *unità avente posizione* (ed. Friedlein, pp. 95, 21-96, Ver Eecke, pp. 85-96).

L'assimilazione del punto all'unità, secondo vedute pitagoriche, farebbe pensare non già ad un punto quasi evanescente, privo di dimensioni, ma ad un punto esteso, che (per dir così) abbia dimensioni *unitarie*. Nella sua prima definizione, dunque, Euclide avrebbe, a guisa di lapidario frontespizio, lasciato un ricordo, una traccia, dell'antica geometria pitagorica, riecheggiandone la dottrina fondamentale. Si osservi, infine, che la def. I non viene mai usata nel séguito: potrebbe esser tolta senza alcun danno per l'economia generale dell'opera. Infatti il punto (senza dimensioni) viene di nuovo definito nella def. III (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, 2ª ediz., Firenze, Le Monnier, 1969, pp. 92-95).

[2] Qui siamo in piena atmosfera di enti geometrici idealizzati: la linea (quindi anche la retta, che è una particolare linea) è completamente *priva di larghezza* (ἀπλατές): è lunghezza *pura*.

III. Estremi di una linea sono punti [3].

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti)[a] [4].

V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza [b].

a. Di discutibile traduzione e non facile intelligibilità. In greco ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. Ora, ἐξ ἴσου significa: « in condizione di uguaglianza », ma esso si riferisce a « rispetto ai punti su essa », τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις – nel qual caso si intende « giace ugualmente rispetto ai punti su essa », ossia i punti vanno intesi come « posti ugualmente », senza che siano inclinati in un senso o nell'altro –, oppure si riferisce a κεῖται, « giace »? Allora dovremmo intendere: « la retta che, nei punti – o: mediante i punti – posti su essa, giace ugualmente (o: uniformemente) », cioè la retta che, data la posizione dei punti, non presenta deviazioni. Insomma, nel primo caso, se verifichiamo la linea rispetto ai punti abbiamo una linea come *distanza* fra punti (anche due, per es.), nel secondo, verificando la posizione dei punti rispetto alla linea, abbiamo una linea come *direzione*. Non possiamo dire altro, filologicamente, se non che la dizione è passabilmente oscura, pur se l'idea fondamentale di Euclide sembra esser quella di una linea che presenta la stessa forma rispetto a tutti i suoi punti. Manteniamo così la significazione tradizionale.

b. Euclide e più tardi scrittori usano il termine greco ἐπιφάνεια per superficie in generale, ed invece, come vedremo, ἐπίπεδον (aggettivo sostantivato) per superficie *piana* (come specie del genere, dunque); quanto appunto ad Euclide, egli usa un'unica volta ἐπιφάνεια intendendo un piano, invece di ἐπίπεδον, nella definizione XI del libro undicesimo.

[3] Il punto viene qui definito nuovamente: essendo *estremo* di una linea risulta privo di dimensioni. Questa definizione si ricollega alla sesta, che definisce le linee come estremi della superficie, ed alla seconda del libro decimoprimo, che definisce la superficie come estremo, limite, del solido (στερεοῦ πέρας) cioè con gli stessi termini usati da Platone nel *Menone* (76 *a*) per definire la figura bidimensionale. Per questa coincidenza, e per un accenno di Aristotele (*Metafisica*, I, 992 *a*) al fatto che Platone preferiva chiamare il punto *principio di linea* (ἀρχὴ γραμμῆς) sorge l'idea di collegare a Platone l'insieme delle definizioni euclidee che dal solido discendono alla superficie, dalla superficie alla linea, dalla linea al punto (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso* cit., pp. 94-95, ed ancora: A. FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Studium, 1963, pp. 93 segg.). Va infine osservato che la linea è considerata come terminata, cioè avente estremi: qui e costantemente (salvo rarissima eccezione) negli *Elementi*.

[4] Definizione oscura, per la quale ogni traduzione appare incerta. Sembra che con essa Euclide voglia intendere che sulla retta non vi sono punti privilegiati, così come sul piano (def. VII) non vi sono rette privilegiate.

VI. Estremi di una superficie sono linee.

VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette)[a].

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta [5].

IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.

X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma[b] gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata

a. Con le opportune mutazioni, si segue esattamente la definizione IV di linea retta; non ci è così permesso, ovviamente, di risolvere in modo definitivo le oscurità di quella stessa definizione (sempre, dal punto di vista filologico).

b. Letteralmente è piuttosto *fa, produce*.

[5] La definizione euclidea di angolo appare tautologica: essa infatti sostituisce al concetto di angolo quello, non definito, di inclinazione. Quest'ultima parola (κλίσις), tuttavia, è di uso familiare nel linguaggio comune, sicché la definizione adempie ancora al compito « descrittivo ».

Va osservato, del resto, che il concetto di angolo viene solo modernamente chiarito. Piuttosto si osservi che Euclide non considera senz'altro due rette che s'incontrino in un punto (vertice dell'angolo), ma più in generale due « linee ». È soltanto nella definizione seguente (n. IX) che si definisce quell'angolo particolare (detto *angolo rettilineo*) che è compreso da linee rette (e che è l'unica specie di angolo che noi oggi di solito consideriamo). Questo modo di definire più in generale l'angolo come compreso tra linee qualunque, costituisce una delle pochissime tracce che nell'opera euclidea si trovano della più antica teoria degli angoli curvilinei. Rinviamo per questa alla nota alla proposizione XVI del libro terzo.

Si noti, infine, che viene da Euclide esplicitamente escluso che i due lati dell'angolo giacciano in linea retta: viene cioè escluso l'angolo piatto. Quest'ultimo è per noi un angolo vero e proprio in base alla nostra concezione di angolo come parte di piano; sorge inoltre per considerazioni di continuità, pensando, ad esempio, alla rotazione di una ipotetica lancetta di un orologio. Ma, come s'è già accennato nella Nota introduttiva al libro primo, considerazioni esplicite di continuità vengono, almeno fino ad un certo punto della trattazione, evitate nella geometria greca.

si chiama perpendicolare [a] a quella su cui è innalzata.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.

XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.

XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini [6].

XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea[, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro [b].

XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.

XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia [c] anche il cerchio per metà.

XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza [d] da esso tagliata. E centro del

a. L'aggettivo κάθετος di una retta, appunto *perpendicolare*, significa letteralmente « lasciata, o fatta cadere »; insomma, è l'idea del filo a piombo lasciato cadere sul terreno.

b. Malgrado i Mss. le contengano, Heiberg espunge le parole (meno *stessa*, che è nostra) poste fra parentesi quadre, del resto omesse da altre antiche fonti nel riportare la definizione. L'espunzione di Heiberg trovò poi conferma nel papiro Ercolanense n. 1061, successivamente scoperto (cfr. HEIBERG, *Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 47).

c. Cioè: divide.

d. Euclide usa la parola περιφέρεια, circonferenza, per una parte della circonferenza, vale a dire un arco della circonferenza di un cerchio. Quanto alle parole « E centro del semicerchio, ecc. », esse appaiono nel commentario di Proclo *In primum Euclidis elementorum librum*, ed. Friedlein, e non nei Mss.; tuttavia, Proclo

[6] La figura è quindi, per Euclide, essenzialmente *finita*. Così, per esempio, la retta considerata da Euclide è ciò che noi chiamiamo « segmento di retta ». Si parla quindi, negli *Elementi*, di *prolungamento* di una retta: anzi il postulato II chiede appunto che una retta possa esser sempre prolungata. Si tratta quindi di una retta potenzialmente, ma non attualmente, infinita.

semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette [a].

XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali [b].

XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.

XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti [c], rettangolo [d]

nota ad un certo punto (ed. Friedlein, p. 160), anche assurdamente, che il semicerchio è la sola figura piana ad avere il centro sul proprio perimetro, e questo fa piuttosto propendere a che le parole in questione siano genuine.

a. È probabile, a quanto risulta, che siano proprio di Euclide le parole *trilatere* (τρίπλευρα, cioè τρίπλευρα σχήματα, figure di tre lati), *quadrilatere* (τετράπλευρα, di quattro lati) e *multilatere* (πολύπλευρα, di molti lati); si distinguono così le varie figure comprese nella classe delle figure rettilinee, anzi, col suo uso di τετράπλευρον, quadrilatero, Euclide pare voglia eliminare un certo uso ambiguo della parola τετράγωνον ad indicare una figura di quattro lati, mentre egli la restringe formalmente al solo quadrato.

b. Per curiosità filologica, ad uso del lettore: isoscele, ἰσοσκελής, significa « con gambe (gamba, σκέλος) uguali », scaleno poi, σκαληνός, di un triangolo che non abbia due lati uguali, è parola da Proclo (*op. cit.*, pp. 168, 24) connessa con « zoppicare », σκάζειν, da altri riferita a σκολιός, « curvo, incurvato, di sghembo ».

c. Letteralmente: « equilatera e rettangola », ὀρθογώνιον (σχῆμα, cioè figura rettangolata).

d. Rettangolo è qui detto ἑτερομήκες, *oblungo*, cioè con lati di differente lunghezza, termine ritenuto pitagorico; sempre per curiosità del lettore, notiamo che *rombo*, il quale verrà dopo, viene probabilmente da ῥέμβειν, « girare intorno di continuo », « volgersi e rivolgersi », e fra le altre cose significa una « trottola »;

quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi [7].

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente[a] dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti [8].

romboide, poi, è il rombo-foggiato. Euclide non usa nei suoi *Elementi* né oblungo, né rombo, né romboide; è probabile quindi che avere introdotto le definizioni di tali figure corrisponda ad un uso ancora a lui circostante, proveniente da più antichi libri di testo, e che egli riporta nella sua trattazione. *Trapezio*, infine, τραπέζιον, significa « piccola tavola ».

a. Traduciamo ordinariamente « all'infinito », ma il senso esatto di εἰς ἄπειρον è « senza limite », *illimitatamente* – e non è la stessa cosa, in quanto la nozione di infinito come un limite a cui si tenda non è proprio qui presente.

[7] Come si vede, il termine « trapezio » (τραπέζιον) è usato da Euclide in senso diverso dal nostro. E va detto che i nostri « trapezi » non vengono, del resto, mai considerati in modo autonomo negli *Elementi*. Si osservi, in questa definizione, la discontinuità tra quadrato e rettangolo. Il quadrato non viene qui considerato come uno speciale rettangolo avente tutti i lati uguali, ma come una figura che dal rettangolo è essenzialmente diversa: è infatti specificato che il rettangolo non può essere equilatero (οὐκ ἰσόπλευρον). Esso viene infatti indicato col termine ἑτερόμηκες, cioè: *avente lati disuguali*. Sorge spontaneo il collegamento con la famosa lista pitagorica dei contrari (ARISTOTELE, *Metafisica*, I, 986 *a*), nella quale una coppia è costituita dal quadrato e dall'*eteromèco* (= rettangolo) in antitesi tra loro. La discontinuità osservata costituirebbe un'altra traccia, di carattere storico, dell'antica geometria pitagorica negli *Elementi*: ciò tanto più se si pone mente al fatto che nel séguito dell'opera al termine pitagorico ἑτερόμηκες (usato in questa definizione) Euclide preferisce quello ὀρθογώνιον (= con angoli retti: cfr. libro II, def. I, prop. I e seguenti).

[8] Per la definizione di rette parallele, si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

POSTULATI (αἰτήματα) [1]

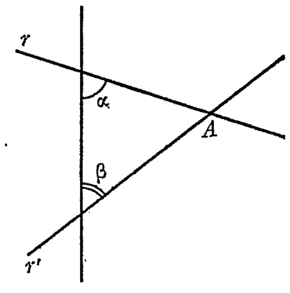
I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto [a].

II. E che una retta terminata (= finita) [b] si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio) [c].

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti) [2].



a. Letteralmente: « da ogni punto ad ogni punto ». Insomma, noi diremmo da un qualsiasi punto fra tanti, il greco dice piuttosto da ogni punto fra tutti i possibili.

b. Discutibile se tradurre πεπερασμένην greco con *limitata*, *terminata*, una linea retta cioè che ha termini, fini, confini, o con *finita*, poiché « terminata » potrebbe non indicare, magari, a sufficienza che si tratta di una linea retta avente *due* estremità, due termini, ossia di un segmento rettilineo.

c. Euclide dice: παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, « con ogni centro e distanza », al solito intendendosi « con un centro ed una distanza, cioè un raggio, qualunque ». I Greci non avevano parola per *raggio*; dovendo parlare di raggi, usavano – come vedremo – l'espressione αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, « le (rette condotte) dal centro ».

[1] Sul significato dei postulati si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

[2] È, questo, il celebre postulato quinto, o postulato delle parallele, o postulato di Euclide propriamente detto. Oltre a quanto in proposito

è stato detto nella nota introduttiva al libro primo, facciamo osservare che la forma sotto la quale Euclide enuncia il suo quinto postulato (che cioè s'incontrano due rette formanti con una trasversale angoli coniugati interni la cui somma sia minore di due retti) non è quella più comunemente adottata nelle moderne trattazioni elementari. Più comune è la forma dell'*unicità*: « Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela alla retta stessa ». Dal postulato sotto forma euclidea si passa alla forma dell'unicità, ad esempio attraverso la I, 30 di Euclide (proprietà transitiva del parallelismo), come viene spiegato nella nota a detta proposizione. Inversamente dalla forma dell'unicità si passa a quella euclidea con facili considerazioni.

La forma dell'unicità è certo assai intuitiva: alla nostra intuizione sembra impossibile che per uno stesso punto passino più parallele ad una retta data. Ma, come s'è detto nella Nota introduttiva al libro primo, le geometrie non euclidee, cioè quelle che partono dalla negazione del quinto postulato, se pure non rispondono, è vero, alla nostra intuizione spaziale, sono tuttavia logicamente coerenti. Così nella geometria non euclidea detta *iperbolica*, o di Lobacevski, passano per un punto due parallele ad una retta data (o anche infinite, secondo la definizione che di parallelismo venga data), mentre nessuna ne passa nella geometria non euclidea detta *ellittica*, o di Riemann.

Altri enunciati del quinto postulato sono anche i seguenti:

1) non esistono rette asintotiche (cfr. Nota introduttiva al libro primo);

2) per tre punti non allineati passa la circonferenza di un cerchio;

3) dato un triangolo, ne esiste uno simile al dato e grande a piacere (Wallis, Saccheri);

4) esistono rette equidistanti.

Finalmente, da un punto di vista strettamente stilistico, va osservato che Euclide evita sempre un termine equivalente a quello nostro *somma*. Così in questo quinto postulato non è detto che le due rette devono formare angoli interni dalla stessa parte (= coniugati interni) aventi somma minore di due retti, ma è detto che le due rette formano angoli (interni dalla stessa parte) *minori di due retti*.

NOZIONI COMUNI (κοιναὶ ἔννοιαι) [a] [1]

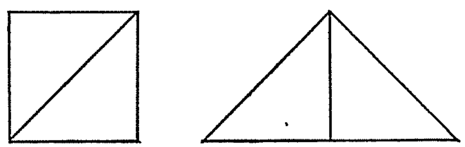
I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.

II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali [2].

a. Assai discussa è la questione se le Nozioni comuni siano di Euclide, tutte o soltanto le prime tre, o – addirittura – se non siano affatto di Euclide, neppure nel termine di nozioni comuni. Tuttavia non si può dire che vi siano stati fino ad oggi argomenti decisivi, e magari ci si trova dinanzi il contrario, cioè degli argomenti a favore, per opporsi alle « Nozioni comuni » come termine euclideo; anzi, sulla base delle varie argomentazioni (fra cui il commentario di Proclo al I libro, pp. 196, 15, che riconosce le cinque Nozioni comuni da noi date, e critica la indebita pretesa di Erone, Erone di Alessandria – il massimo ingegnere e professore di ingegneria alessandrino, di riconoscerne come autentiche solo tre, ossia le tre prime), possiamo concludere che in libri di testo precedenti a quello euclideo la presenza

[1] Sulle *Nozioni comuni* in linea generale, si veda quanto è stato detto nella Nota introduttiva al libro primo. Su tutto l'argomento dei princìpi (e delle Nozioni comuni in particolare) sono assai notevoli i recentissimi studi dell'ungherese Árpad Szábó. Si veda, per esempio, la sua memoria: *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, in: « Archive for History of Exact Sciences » (I, 1960), pubblicato anche nella raccolta: *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, edita da Oskar Becker (Darmstadt, 1965, pp. 355-461).

[2] Questa Nozione comune, così come la terza, mostra che per Euclide il termine « uguale » (ἴσος) si riferisce all'uguaglianza di grandezza. Così ad esempio per i poligoni non si tratta dell'uguaglianza in senso stretto, cioè dell'uguaglianza completa di tutti gli elementi (detta da noi anche *congruenza*), ma dell'uguaglianza di estensione (detta da noi anche *equivalenza*). Infatti somme di poligoni uguali in senso stretto non sono uguali nello stesso senso, ma soltanto equivalenti.



Così, le due figure qui riportate (un quadrato e un triangolo) sono somme di figure uguali in senso stretto, ma non sono uguali nello stesso senso, bensì equivalenti (hanno la stessa estensione = area).

III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.

VII. E cose che coincidono[a] fra loro sono fra loro uguali [3].

VIII. Ed il tutto è maggiore della parte [b] [4].

di più di un assioma della specie delle Nozioni comuni sembra accettabile e che almeno le prime tre Nozioni comuni erano contenute nel testo euclideo originario (cfr. per questo, F. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica*, Bologna, Zanichelli, 1922, cap. I, e *Gli elementi*, di Enriques e vari collaboratori, vol. I, pp. 47-48; HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*, pp. 221-234 e la nota 1 successiva).

a. Secondo sia usato all'attivo o al passivo, quale termine geometrico, ἐφαρμόζειν ha un diverso significato: al passivo, ἐφαρμόζεσθαι, significa « essere applicato a », senza una qualche implicazione che la figura applicata venga esattamente a coincidere, e debba coincidere, con la figura cui è applicata; all'attivo, ἐφαρμόζειν – e qui è usato all'attivo –, significa intransitivamente « convenire, adattarsi esattamente, coincidere con ».

b. A questo punto, i Mss. riportano quattro nozioni, dello stesso tipo delle I-III, tre delle quali sono date da Heiberg in parentesi e corrispondono alla IV, V, e VI nostre; la quarta poi, che si trova posta fra IV e V, è da Heiberg omessa del tutto; essa dice: « E se cose uguali sono sottratte da cose disuguali, i resti sono disuguali ». Tutte queste nozioni, per genuinità più che dubitevoli, appaiono in realtà non necessarie e, in vista del principio che gli assiomi non dovrebbero essere con facilità moltiplicati, sarebbe opportuno che fossero omesse. Quanto alla IX, che è data pure da buoni Mss. come da collocarsi dopo il postulato V (e difatti essa spetta alla geometria in particolare, come

[3] Come si vedrà meglio nella nota alla I, 4, Euclide si serve del movimento intuitivo della meccanica solo tre volte in tutta l'opera, per sovrapporre una figura ad un'altra. Se, come risultato della sovrapposizione, si ha la completa coincidenza, Euclide sente il bisogno di enunciare un postulato per poter affermare che le due figure sono in tal caso uguali (solo nel senso di uguaglianza di estensione da lui inteso).

[4] Che il tutto sia maggiore della parte, è caratteristica degli insiemi finiti, cioè di quelli contenenti un numero finito di elementi. Per gli insiemi infiniti non vale più: anzi il fatto che non valga è, nella moderna teoria degli insiemi, proprietà caratteristica della *infinità* dell'insieme. La relativa antinomia, o paradosso che dir si voglia, si presentò a Galileo nel confronto tra i numeri ed i loro quadrati (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata prima: *Opere*, VIII, 78-79; cfr. anche l'edizione a cura di A. Carugo e L. Geymonat, Torino, Boringhieri, 1958,

[IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali] [5].

[V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro].

[VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].

dice Proclo, *op. cit.*, pp. 196, 21, e non alle scienze in generale), è senz'altro da ritenersi interpolazione. E difatti l'assioma non è necessario, poiché quanto esso stabilisce è già incluso nel significato del postulato I; deriva probabilmente dal passo in I, 4, in cui Euclide afferma che « se ... la base *BC* non coincidesse con la base *EF*, due rette verrebbero a comprendere uno spazio: il che è impossibile » (cfr. per questo HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 232).

pp. 44-45). Ma già forse nel *Carmide* di Platone si trovano tracce di difficoltà del genere: Euclide taglia corto ad esse con questa sua Nozione comune ottava (cfr. A. FRAJESE, *Platone* cit., pp. 74 segg.).

[5] Le Nozioni comuni 4, 5, 6, 9, pur essendo implicitamente o esplicitamente applicate negli *Elementi*, vengono da Heiberg riconosciute come interpolate e quindi non sono da lui inserite nel testo. Del resto, la quinta Nozione comune, ad esempio, può ricavarsi sostanzialmente dalla seconda.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE 1.

Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero [1].

Sia AB la retta terminata data.

Si deve dunque costruire sulla retta AB un triangolo equilatero.

[1] È stato fin dall'antichità osservato che Euclide, in questa proposizione, tralascia di dimostrare che i due cerchi, che vengono descritti, si tagliano tra loro. Non viene, cioè, dimostrata l'esistenza del punto di intersezione C, e quindi neppure quella del triangolo equilatero. A questo proposito osserviamo:

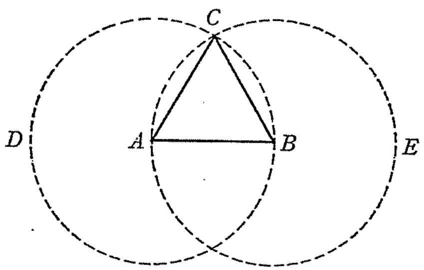
a) per tutte le questioni riguardanti intersezioni di rette e cerchi, o di cerchi tra loro, neppure oggi forniamo una vera dimostrazione, ma introduciamo postulati, che costituiscono casi particolari di quello più generale della continuità. Euclide non dà l'esplicita enunciazione di detti postulati, ma si assicura che valgano le condizioni di applicazione dei postulati stessi. Per maggiori notizie, rinviamo il lettore alle note alle proposizioni I, 12 e I, 22, così pure all'articolo: A. FRAJESE, *Il sesto postulato di Euclide*, in «Periodico di matematiche», 1968, n. 1-2 (pp. 150-159);

b) la costruzione del triangolo equilatero di I, 1 è un caso particolare della costruzione di un triangolo, dati i suoi tre lati, che viene fornita nella I, 22. In quest'ultima proposizione Euclide si assicura, mediante condizioni cui devono soddisfare le tre *rette* date, che effettivamente i cerchi si incontrino. Ma le stesse condizioni (essere la somma di due *rette*, comunque scelte, maggiore della terza) sono automaticamente verificate nel caso del triangolo equilatero;

c) come vedremo anche per qualche altro libro degli *Elementi*, le prime proposizioni del libro primo hanno indubbio carattere introduttivo: potremmo dire anzi che le prime quattro proposizioni costituiscano una specie di *prolungamento* dei postulati. Così, infatti, contiene (come s'è visto) un nuovo

Con centro A e raggio AB risulti descritto [a] il cerchio BCD (post. III), di nuovo risulti descritto, con centro B e raggio BA, il cerchio ACE (id.), e dal punto C, in cui i cerchi si tagliano fra loro, risultino tracciate ai punti A, B le rette congiungenti CA, CB (post. I).

Ora, poiché il punto A è centro del cerchio CDB, si ha che AC è uguale ad AB (def. XV); di nuovo, poiché il punto B è centro del cerchio CEB, si ha che BC è uguale a BA (id.). Ma fu dimostrato che pure CA è uguale ad AB; quindi ciascuna delle due rette CA, CB è uguale alla retta AB. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro (noz. com. I): sono perciò uguali anche CA, CB [b]; quindi le tre rette CA, AB, BC sono uguali fra loro.



Dunque, il triangolo ABC è equilatero. Ed è stato costruito sulla retta terminata data AB. – C.D.F. [c]

È APPLICATA IN: I, 2, 9, 10, 11.

a. Abbiamo già detto nella premessa che il tempo greco, il perfetto, adoperato di regola nella costruzione, e spesso anche altrove, almeno in certe occasioni, sembra non avere altro senso che quello di un « risultare », di uno stato di fatto. Ne manteniamo esempio nelle prime tre proposizioni, riservandoci in séguito, per non appesantire o render difficile la traduzione, di far uso del presente, come consuetudine.

b. Letteralmente: « quindi è uguale anche CA a CB ». Il modo di tradurre adottato sarà usato spesso, successivamente, non solo per rette, ma per angoli, somme di angoli, e per qualunque altro termine si riterrà opportuno.

c. In greco, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, « ciò che appunto bisognava fare, si doveva fare »; usiamo la formula tradizionale C.D.F., *come dovevasi fare* e, dopo, la formula C.D.D., *come dovevasi dimostrare*.

postulato il procedimento costruttivo della I, 1: invece nelle due seguenti proposizioni I, 2 e I, 3 viene precisato il significato del postulato terzo. Infine nella I, 4 viene introdotto, in modo non rigoroso, il movimento mec-

PROPOSIZIONE 2.

Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data [2].

Siano A il punto dato e BC la retta data; si deve dunque applicare con un estremo nel punto A una retta che sia uguale alla retta data BC.

Infatti, risultino: dal punto A al punto B tracciata la congiungente AB (post. I), costruito su essa il triangolo equilatero DAB (I, 1), ottenute le rette AE, BF prolungando in linea retta DA, DB (post. II) [a], con centro B e raggio BC descritto il cerchio CGH (post. III), e, di nuovo, con centro D e raggio DG, descritto il cerchio GKL (id.).

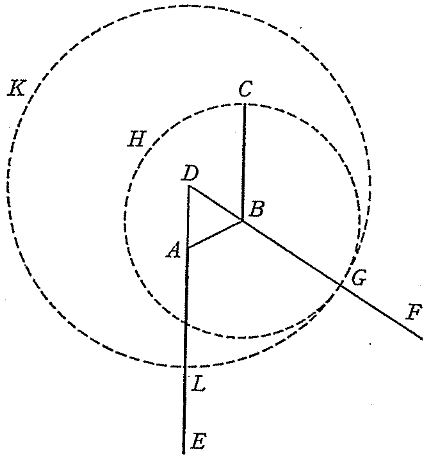
a. Letteralmente: « risultino prolungate per diritto a, in (linea) retta a DA, DB le rette AE, BF ». Da rilevare che, usando tali espressioni, di rette prolungate per diritto ad altre date, Euclide parla in sostanza di *continuare* tali rette, mentre, formalmente, indica piuttosto che le rette da « prolungare » non sono le rette originarie (qui DA, DB), ma le porzioni prolungate di esse.

canico, sicché la proposizione stessa, come vedremo, può esser considerata come un postulato. Risulta così in certo modo giustificata la costruzione della I, 1, se pure essa non può avere valore esistenziale nel senso della teoria di Zeuthen sulla dimostrazione di esistenza presso i Greci mediante la costruzione (cfr. *Nota introduttiva* al libro primo): sembra piuttosto che i due cerchi si incontrino perché il triangolo equilatero già esiste per Euclide, anziché il fatto inverso.

[2] Questa proposizione permette di eseguire il *trasporto del segmento*, cioè permette di costruire un segmento di retta uguale ad un segmento dato, ed avente un estremo in un punto qualunque del piano. Nella seguente I, 3 si completa il *trasporto*, con una ulteriore rotazione, in modo che il segmento « trasportato » venga ad avere anche una direzione prefissata. Questa proposizione I, 2 non si trova, di solito, nei moderni testi scolastici, nei quali il trasporto del segmento viene postulato, oppure viene inquadrato nella teoria del movimento.

Essa precisa in qual modo vada intesa la portata del postulato III: quest'ultimo richiede che possa eseguirsi la costruzione del cerchio soltanto quando il raggio è, per dir così, *attaccato* al centro, ossia quando ha un estremo nel centro: al resto pensano le proposizioni seconda e terza. È stato detto felicemente che il compasso di cui (pur senza nominarlo) si serve Euclide, si richiude immediatamente non appena venga sollevato dal foglio. Appunto a questo *inconveniente* (relativo alla restrizione della richiesta del post. III) rimedia la I, 2.

Poiché dunque il punto B è centro del cerchio CGH, si ha che BC è uguale a BG. Di nuovo, poiché il punto D è centro del cerchio GKL, si ha che DL è uguale a DG. Ora, di queste rette le parti DA, DB sono uguali; perciò la parte che rimane dell'una, AL, è uguale a quella che rimane dell'altra, BG (noz. com. III)[a]. Ma fu dimostrato che pure BC è uguale a BG; ciascuna delle due rette AL, BC è quindi uguale alla retta BG. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono pure uguali fra loro (noz. com. I); anche AL, BC sono perciò uguali.



Dunque, la retta AL uguale alla retta data BC viene a trovarsi con un estremo nel punto dato A. - C.D.F.

APPLICA: I, 1.
È APPLICATA IN: I, 3.

PROPOSIZIONE 3.

Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore[3].

Siano AB, C le due rette disuguali date, delle quali AB sia maggiore; si deve dunque togliere dalla maggiore AB una retta uguale alla minore C.

a. Letteralmente: e di queste rette la retta DA è uguale alla retta DB; quindi la retta AL che rimane è uguale alla rimanente BG.

[3] Come s'è detto nella nota precedente, questa proposizione completa l'operazione di trasporto del segmento. Essa permette, infatti, una volta *trasportato* un dato segmento nella posizione AD con un estremo in un punto A, di costruire il segmento AE ad esso uguale, ma avente non soltanto lo stesso estremo, bensì anche una direzione prefissata AB.

EUCLIDE

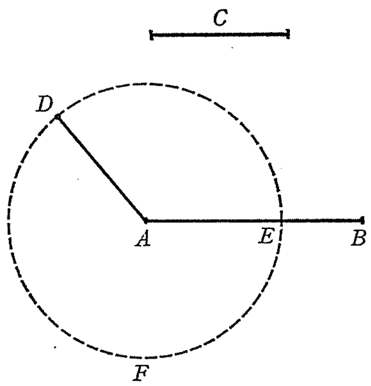
Dipinto raffigurante probabilmente il matematico Euclide

(Wolfenbüttel, Herzog August Bibliothek, Cod. Guelferbytanus 2403, Aug. 2°, f. 36.23, 69 v.).

Si applichi con un estremo nel punto A la retta AD uguale alla retta C (I, 2); e con centro A e raggio AD risulti descritto il cerchio DEF (post. III).

Ora, poiché il punto A è centro del cerchio DEF, si ha che AE è uguale ad AD (def. XV); ma pure C è uguale ad AD. Quindi ciascuna delle due rette AE, C è uguale alla retta AD, cosicché anche AE, C sono uguali (noz. com. I).

Dunque, date le due rette disuguali AB, C, dalla maggiore AB è stata tolta AE uguale alla minore C. – C.D.F.



APPLICA: I, 2.

È APPLICATA IN: I, 5, 6, 9, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 46; II, 1, 8, 9, 10; IV, 1; VI, 1, 9, 11, 12, 13, 16, 28, 29; lemma al X, 14; XII, 15; XIII, 14. Tuttavia per molte di queste proposizioni sarebbe stato sufficiente il postulato terzo.

PROPOSIZIONE 4.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali [a], *avranno anche la base* [b] *uguale alla base, il triangolo sarà*

a. Letteralmente: « l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo corrispondente ». Gli enunciati in Euclide sembrano talvolta mancare di assoluta chiarezza e precisione: così, parlando nell'enunciato dei due triangoli, soltanto di uno dice « quello compreso dalle rette uguali », sottintendendo che questa determinazione si riferisca anche all'altro; sempre nell'enunciato di cui trattiamo parla dapprima di « lati », e poi degli angoli compresi dalle « rette » uguali, non da « lati » (forse, ritiene HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 248, per aderire alla fraseologia della definizione di angolo), come ugualmente in I, 5, per aderire al post. II si parlerà del prolungamento delle « rette uguali ».

b. La parola *base*, τὴν βάσιν, è qui usata per la prima volta; Proclo (*op. cit.*, pp. 236, 12-15) spiega che la parola indica, quando *uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali*[a], *saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo]*[4].

due lati sono già stati menzionati, il terzo lato di un triangolo, ed anche quando nessun lato di un triangolo è stato prima menzionato, il lato al livello della vista. Così, negli enunciati ad es. di I, 37 ecc. il termine è usato di triangoli posti sulla stessa base o su basi uguali, ed in I, 35 ecc. il termine è usato per le basi di parallelogrammi.

a. Letteralmente: a cui si sottendono i lati uguali.

[4] In questa proposizione, che è comunemente indicata come *primo criterio di uguaglianza dei triangoli*, viene fatto uso del movimento, inteso nel senso meccanico, intuitivo. Essa non ha quindi alcun vero valore dimostrativo, ma sembra debba considerarsi come un postulato. Occorre dire a questo proposito:

a) ciò è in armonia con quanto è stato detto nella nota alla I, 2: essere le prime quattro proposizioni come un *prolungamento* dei postulati, costituendo esse un'introduzione alle proposizioni vere e proprie;

b) del movimento Euclide si serve assai raramente: ciò ancora in I, 8 e in III, 24;

c) l'uso che Euclide fa di questa I, 4 è, come si vede dall'elenco dato, assai frequente. Va però osservato che il modo di « invocarla » è, come vedremo, assai caratteristico: proprio come se la I, 4 fosse un postulato, da accettare *in blocco*.

A questo proposito, richiamiamo anzitutto l'attenzione del lettore sull'enunciato di questa proposizione. Noi enunciamo il primo criterio nel modo seguente: « Se due triangoli hanno due lati e l'angolo tra essi compreso rispettivamente uguali, essi sono uguali ». Infatti con l'affermazione (*tesi* del teorema) che i due triangoli sono uguali, intendiamo che essi sono uguali in senso stretto, cioè che hanno tutti i loro elementi (lati ed angoli) ordinatamente uguali, e non già che siano soltanto di estensione uguale, cioè che siano *equivalenti*. Ma siccome il termine « uguale » (ἴσος), applicato ai poligoni, ha per Euclide il nostro significato di *equivalente*, l'enunciato della I, 4 non può limitarsi alla tesi che i due triangoli sono uguali: Euclide aggiunge, infatti, che i due triangoli hanno anche uguali le *basi* (cioè i terzi lati), ed ordinatamente uguali i rimanenti due angoli: quelli opposti ai lati uguali. L'uguaglianza in senso stretto si presenta dunque per Euclide proprio come uguaglianza ordinata di tutti i lati e tutti gli angoli dei due triangoli, ossia di tutti gli elementi che compongono le due figure che vengono confrontate: che poi i triangoli (più in generale le due figure) siano anche di estensione uguale è cosa che Euclide ricava, in base alla Nozione comune VII, per il fatto che le figure stesse vengono portate a coincidere.

Fatto sta, ora, che molte volte, quando Euclide applica la I, 4, cioè questo primo criterio di uguaglianza dei triangoli, enuncia in modo completo la tesi, *anche per la parte che non gli serve*. Così, tanto per citare un esempio, nella I, 16 l'applicazione del primo criterio serve soltanto per dedurne l'ugua-

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente[a] ai due lati DE, DF, cioè AB uguale a DE ed AC uguale a DF, e l'angolo BAC[b] uguale all'an-

a. Letteralmente: « ciascuno dei due a ciascuno dei due »; ma tradurre così, oppure « ciascuno a ciascuno », può risultare equivoco, quasi fossero uguali fra loro tutti e quattro i lati (due in ogni triangolo), mentre solo uno dei due lati del primo triangolo è uguale al rispettivo dei due lati del secondo, e pure l'altro lato del primo triangolo è uguale solo al rispettivo del secondo.

b. L'espressione originaria intera è « l'angolo compreso dalle rette BA, AC », o indicate con qualsiasi altra lettera di cui una comune (ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένη γωνία), poi nella pratica geometrica, sottintendendosi *compreso*, l'angolo BAC sarà dapprima l'angolo (compreso) dalle BAC, cioè BA, AC, quindi l'angolo (compreso) da BAC (ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ γωνία, e poi ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία), ed infine lo (angolo compreso) da BAC (ἡ ὑπὸ ΒΑΓ) come normale in Euclide. Cfr. anche Premessa.

glianza di una coppia di angoli, ma invece (come il lettore potrà subito vedere) si enuncia tutta la tesi, anche per la parte « inutile »: si dice ivi, quindi, che sono uguali le due basi, che sono uguali i due triangoli, e finalmente che sono ordinatamente uguali le due coppie di angoli *restanti*.

In alcuni casi, poi, ad esempio, in I, 34 e in VI, 5, il carattere di postulato della I, 4 (come apparirà dalle relative note) è ancora più marcato.

Per chi volesse persuadersi del fatto che sul movimento meccanico, ingenuamente inteso, non possa venir fondata una definizione rigorosa dell'uguaglianza (in senso stretto) delle figure geometriche, ricordiamo che detto movimento non deve in alcun modo *deformare* le figure, cioè deve mantenere le figure *uguali* a sé stesse. Sicché si definirebbero come uguali due figure quando l'una possa essere portata a coincidere con l'altra mediante un movimento che lasci *uguale* la figura che viene mossa. Si commetterebbe dunque una evidente petizione di principio.

Per rendere rigorosa la definizione di uguaglianza (in senso stretto) tra due figure geometriche, si sono allora seguite due vie:

a) quella di Hilbert, adottata da Enriques e Amaldi, consistente nell'assumere come concetti primitivi l'uguaglianza tra due segmenti e quella tra due angoli, e nel definire l'uguaglianza di due figure (ad esempio di due triangoli) attraverso l'uguaglianza ordinata di tutti i loro elementi (ad esempio: lati ed angoli). In questa via occorre però *postulare* il primo criterio di uguaglianza dei triangoli. La via di Hilbert è assai vicina a quella seguita da Euclide, se si considera (s'è già detto) la I, 4 come un postulato;

b) quella che considera il movimento come una trasformazione, cioè tale da stabilire una corrispondenza (soggetta a determinate condizioni) tra gli elementi delle due figure che si considerano. Tale via si inquadra nel famoso *programma di Erlangen* del Klein.

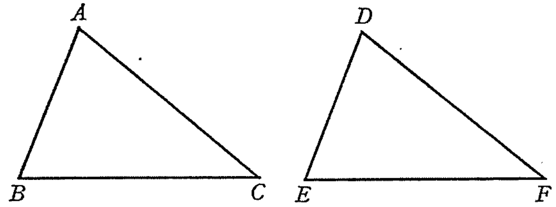
golo *EDF*. Dico che anche la base *BC* è uguale alla base *EF*, che il triangolo *ABC* sarà uguale al triangolo *DEF*, e che gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo: l'angolo *ABC* uguale all'angolo *DEF* e l'angolo *ACB* uguale all'angolo *DFE*.

Infatti, se il triangolo *ABC* è sovrapposto al triangolo *DEF* ed il punto *A* viene a coincidere col[a] punto *D* e la retta *AB* con la retta *DE*, anche il punto *B* verrà a coincidere col punto *E* essendo *AB* uguale a *DE*; coincidendo dunque *AB* con *DE*, anche la retta *AC* coinciderà con la retta *DF* essendo l'angolo *BAC* uguale all'angolo *EDF*, cosicché pure il punto *C* coinciderà col punto *F* essendo, nuovamente, uguale *AC* a *DF*. Tuttavia anche *B* ha coinciso con *E*, cosicché la base *BC* verrà a coincidere con la base *EF*.

[Se difatti, mentre *B* coincide con *E* e *C* con *F*, la base *BC* non coincidesse con la base *EF*, due rette verrebbero a comprendere uno spazio: il che è impossibile]. Quindi la base *BC* coinciderà con la base *EF*[b] e sarà ad essa uguale (noz. com. VII); cosicché anche tutto quanto il triangolo *ABC* coinciderà con tutto quanto il triangolo *DEF* e sarà ad esso uguale, e gli angoli rimanenti dell'uno coincideranno con gli angoli rimanenti dell'altro e saranno ad essi uguali: l'angolo *ABC* uguale all'angolo *DEF* e l'angolo *ACB* uguale all'angolo *DFE*.

Dunque, se due triangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.[c]

a. Letteralmente: si viene a porre sul...
b. Heiberg (*Paralipomena zu Euklid*, in *Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 56) ritiene interpolazione tutta l'espressione in parentesi quadre, eseguita da commentatori per presuntive ragioni di chiarezza e consolidamento; e senza dubbio è interpolazione, e presumibilmente a questa contemporanea, il postulato – in séguito posto fra le nozioni comuni – che « Due rette non possono comprendere, o racchiudere, uno spazio ».
c. In greco ὅπερ ἔδει δεῖξαι, « ciò che appunto si doveva dimostrare ».



È APPLICATA IN: I, 5, 6, 10, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 47; III, 7, 8, 17, 25, 26, 29, 30, 33; IV, 5, 6, 13; VI, 5, 6; XI, 4, 6, 8, 20, 22, 23, 24, 26, 29, 35, 38; XII, 3, 16; XIII, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 18 lemma.

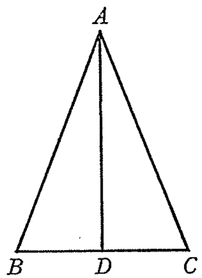
Proposizione 5.

Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali[a] *gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro*[5].

Sia *ABC* un triangolo isoscele avente il lato *AB* uguale al lato *AC*, e si prolunghino per diritto i lati *AB*, *AC* in

a. Letteralmente: « le rette uguali »; cfr. I, 4, nota *a*.

[5] Da questo punto comincia una serie concatenata di teoremi e problemi, dopo le prime quattro proposizioni le quali (come s'è detto) rappresentano una specie di *prolungamento* dei postulati: unico ritorno, per dir così, all'atmosfera delle prime quattro proposizioni è dato dalla I, 8, nella quale si fa ancora uso del movimento.



Questo è dunque il primo vero teorema che Euclide ci offre. Ci attenderemmo che, mosso da intenti didattici, Euclide ci desse una dimostrazione breve e semplice. Al contrario, essa è lunga e complicata. Ma Euclide non ha voluto servirsi della facile e breve dimostrazione fondata sulla considerazione della bisettrice *AD* dell'angolo al vertice: bisettrice che divide il triangolo isoscele *ABC* in due triangoli *ABD*, *ACD* uguali per la I, 4 (primo criterio) con l'immediata conseguenza dell'uguaglianza degli angoli alla base.

La scelta anti-didattica di Euclide è quindi un *pezzo forte* in favore della teoria di Zeuthen sulla dimostrazione di esistenza, presso i Greci, mediante la costruzione: ancora non è stata data, infatti, la costruzione della bisettrice di un angolo (che si trova soltanto in I, 9).

Nessuno scrupolo sorgerebbe invece per noi oggi: basterebbe anticipare il postulato della continuità soltanto per il caso particolarissimo dell'esistenza della bisettrice.

BD, *CE* [a]; dico che l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *ACB*, e l'angolo *CBD* uguale all'angolo *BCE*.

Infatti, si prenda su *BD* un punto a piacere *F*, dalla retta maggiore *AE* si sottragga la retta *AG* uguale alla minore *AF* (I, 3) e si traccino le congiungenti *FC*, *GB* (post. I).

Poiché dunque *AF* è uguale ad *AG*, ed *AB* è uguale ad *AC*, i due lati *FA*, *AC* sono uguali rispettivamente ai due lati *GA*, *AB*; e comprendono [gli uni e gli altri] l'angolo *FAG* comune [ai due triangoli], per cui la base *FC* è uguale alla base *GB*, il triangolo *AFC* sarà uguale al triangolo *AGB*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo, quelli cioè opposti ai lati uguali: l'angolo *ACF* uguale all'angolo *ABG*, e l'angolo *AFC* uguale all'angolo *AGB* (I, 4).

Ora, poiché tutto quanto il lato *AF* è uguale a tutto quanto il lato *AG*, e di essi la parte *AB* è uguale alla parte *AC*, le parti restanti, cioè *BF*, *CG*, sono uguali [b] (noz. com. III). Ma fu dimostrato che pure *FC*, *GB* sono uguali; i due lati *BF*, *FC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *CG*, *GB*; e l'angolo *BFC* è uguale all'angolo *CGB*, e *BC* è loro base comune, per cui anche il triangolo *BFC* sarà uguale al triangolo *CGB*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo, quelli cioè opposti ai lati uguali: l'angolo *FBC* è quindi uguale all'angolo *GCB* e l'angolo *BCF* è uguale all'angolo *CBG* (I, 4).

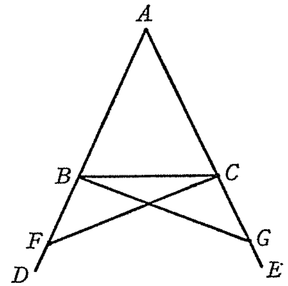
E poiché fu dimostrato che tutto quanto l'angolo *ABG* è uguale a tutto quanto l'angolo *ACF*, e di essi la parte *CBG* è uguale alla parte *BCF*, le parti restanti, cioè gli angoli *ABC*, *ACB* che sono angoli alla base del triangolo *ABC*, sono uguali (noz. com. III). Ma fu dimostrato che

a. Letteralmente la formula tecnica è quella di I, 2; cfr. nota al proposito.

b. Cfr. nota *a* (p. 80) alla prop. 2; la nota vale da qui ad innanzi anche per altri termini, ad es. gli angoli, appunto subito contemplati.

anche gli angoli *FBC*, *GCB* sono uguali; e sono angoli sotto la base.

Dunque, nei triangoli isosceli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 3 (o post. III) e I, 4.

È APPLICATA IN: I, 7, 18, 19, 20, 24; II, 4, 9, 10; III, 2, 3, 16, 20, 31; IV, 10, 15; VI, 3, 7; XIII, 7, 8, 9, 10.

PROPOSIZIONE 6.

Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti [a] *agli angoli uguali saranno uguali fra loro* [6].

Sia *ABC* un triangolo avente l'angolo *ABC* uguale all'angolo *ACB*; dico che anche il lato *AB* è uguale al lato *AC*.

Infatti, se *AB* fosse disuguale rispetto ad *AC*, uno dei lati sarebbe maggiore. Sia maggiore *AB*, dal lato maggiore *AB* si sottragga *DB* uguale al lato minore *AC* (I, 3), e si tracci la congiungente *DC* [b].

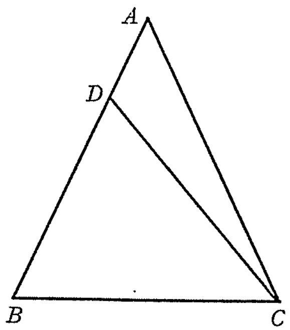
Poiché dunque *DB* è uguale ad *AC* e *BC* è comune, i due lati *DB*, *BC* sono uguali in tal caso rispettivamente ai

a. Letteralmente: « che si sottendono agli angoli uguali », come in I, 4.

b. Da questo punto in poi non sarà ripetuta più la notazione del post. I riguardo al tracciare rette congiungenti. Lo stesso avviene in seguito, secondo opportunità, per altre definizioni, postulati e nozioni comuni.

[6] Il teorema è inverso rispetto al precedente, ossia ne scambia tra loro l'ipotesi e la tesi. Quindi un triangolo isoscele ha due angoli uguali, e inversamente se un triangolo ha due angoli uguali esso è isoscele. È questa la prima dimostrazione che negli *Elementi* di Euclide adopera il procedimento di riduzione all'assurdo: procedimento che, secondo l'Enriques (*Sul procedimento di riduzione all'assurdo*; « Bollettino della Mathesis », Bologna, aprile 1919) risale verosimilmente alla scuola di Elea.

due lati AC, CB, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB; quindi la base DC è uguale alla base AB, ed il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB (I, 4), il minore al maggiore: il che è assurdo (noz. com. VIII); AB non è quindi disuguale rispetto ad AC, e perciò è uguale.



Dunque, se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro... (secondo l'enunciato)[a]. – C.D.D.

APPLICA: I, 3 e I, 4.

È APPLICATA IN: II, 4, 9, 10; III, 25; IV, 9, 10; VI, 3; XIII, 7, 8.

PROPOSIZIONE 7.

Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro[b].

Infatti, se possibile, si costruiscano sulla stessa retta AB le due rette AC, CB con estremi in A, B e che si incontrino

a. La proposizione è quanto vien detto il *reciproco* (l'*inverso*, l'*opposto*, ἀντίστροφος, la *reciprocità* ἀντιστροφή), della precedente I, 5, e qui Euclide usa per la prima volta il metodo di prova mediante *reductio ad absurdum*. Cfr. nota 6 proposizione precedente.

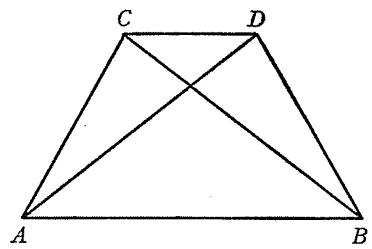
b. Letteralmente (e già con l'aderenza massima ottenibile): Sulla stessa retta, date su essa due rette, non si verranno a costruire (cioè, non si potranno costruire) alle stesse, a punti diversi dalla stessa parte ed avendo gli stessi estremi delle rette prese in principio, altre due rette rispettivamente uguali.

Infatti, se possibile, sulla stessa retta AB, date su essa le due rette AC, CB, si costruiscano alle stesse altre due rette AD, DB rispettivamente uguali, a punti diversi, cioè C e D, dalla stessa parte ed avendo gli stessi estremi, così che CA sia uguale a DA avendo il suo stesso estremo, cioè A, e CB sia uguale a DB avendo il suo stesso estremo, cioè B, e risulti... ecc.

nel punto C, ed altre due rette AD, DB uguali rispettivamente ad AC, CB, dalla stessa parte ed aventi gli stessi estremi A, B, ma che si incontrino in un punto [D] diverso da C; e risulti tracciata la congiungente CD.

Poiché dunque AC è uguale ad AD, anche l'angolo ACD è uguale in tal caso all'angolo ADC (I, 5), per cui l'angolo ADC è maggiore dell'angolo DCB (noz. com. VIII); l'angolo CDB è quindi molto maggiore dell'angolo DCB (id.). Di nuovo, poiché CB è uguale a DB, anche l'angolo CDB è uguale all'angolo DCB (I, 5). Ma fu dimostrato che è pure molto maggiore di esso: il che è impossibile.

Dunque, su una retta data e da ciascun suo estremo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 5.

È APPLICATA IN: I, 8.

PROPOSIZIONE 8.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali[7].

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente ai due lati DE, DF, cioè AB uguale

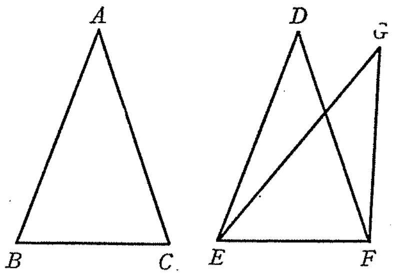
[7] Come è stato avvertito, anche in questa proposizione si fa uso del movimento (come già nella I, 4 e ancora nella III, 24). Si tratta di quello che oggi chiamiamo terzo criterio di uguaglianza dei triangoli, e che invece in Euclide appare al secondo posto (gli altri due criteri in I, 4 e in I, 26). Si osservi che nella tesi del teorema non è contenuta l'uguaglianza dei due triangoli, e neppure quella di tutti gli angoli, bensì soltanto l'uguaglianza degli angoli di una sola coppia. Finalmente va ricordato che in trattazioni scolastiche oggi in uso non si ricorre a questa dimostrazione, basata sul lemma costituito dalla precedente proposizione I, 7, ma si trasporta uno dei triangoli in modo che cada da parte opposta dell'altro rispetto al lato comune. Il lemma I, 7 riesce infatti, come osserva l'Enriques, difficile per un principiante, in quanto fa «riferimento ad una figura impossibile».

Per quanto riguarda, infine, l'enunciato di questa proposizione, che distingue due lati dal terzo lato («base») si veda la nota alla I, 25.

a DE ed AC uguale a DF; ed abbiano pure la base BC uguale alla base EF; dico che anche l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF.

Infatti, se si sovrappone il triangolo ABC al triangolo DEF, ed il punto B viene a coincidere col punto E e la retta BC con la retta EF, anche il punto C coinciderà col punto F essendo BC uguale ad EF; venendo quindi BC a coincidere con EF, pure BA, CA coincideranno rispettivamente con ED, DF. Se la base BC non coincidesse difatti con la base EF, ed i lati BA, AC non coincidessero coi lati ED, DF, ma venissero ad incontrarsi in un punto G diverso da D come [fanno] EG, GF [a], si sarebbero costruite su una stessa retta due rette EG, GF uguali rispettivamente ad altre due rette ED, DF, dalla stessa parte rispetto alla retta EF, ed aventi gli stessi estremi E, F, ma punti d'incontro D, G diversi [b]. Ma non è possibile costruirle (I, 7); qualora perciò si sovrapponga la base BC alla base EF, anche i lati BA, AC non potranno non coincidere rispettivamente coi lati ED, DF. Essi quindi coincideranno; cosicché anche l'angolo BAC coinciderà con l'angolo EDF e sarà ad esso uguale (noz. com. VII).

Dunque, se due triangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 7.

È APPLICATA IN: I, 9, 11, 12, 23, 48; III, 1, 3, 9, 28, 37; IV, 9, 12; VI, 5; XI, 4, 6, 8, 10, 23, 29, 35; XIII, 7, 17.

a. Letteralmente: Se... i lati BA, AC non coincideranno coi lati ED, DF, ma verranno a cadere presso di essi (παραλλάξουσιν) come EG, GF.

b. Il greco dirà naturalmente; a punti diversi dalla stessa parte avendo gli stessi estremi.

PROPOSIZIONE 9.

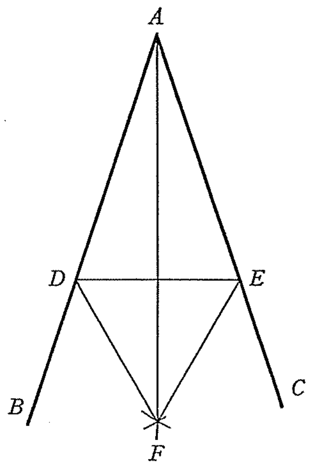
Dividere per metà un angolo rettilineo dato [8].

Sia BAC l'angolo rettilineo dato. Si deve dunque dividerlo per metà.

Si prenda su AB un punto a piacere D, da AC si sottragga AE uguale ad AD (I, 3), e si tracci la congiungente DE; si costruisca inoltre su DE il triangolo equilatero DEF (I, 1), e si tracci la congiungente AF; dico che l'angolo BAC è stato diviso per metà dalla retta AF.

Infatti, poiché AD è uguale ad AE, ed AF è comune, i due lati [a] DA, AF sono uguali rispettivamente ai due lati EA, AF. Ma la base DF è uguale alla base EF; l'angolo DAF è quindi uguale all'angolo EAF (I, 8).

Dunque, l'angolo rettilineo dato BAC è stato diviso per metà dalla retta AF. – C.D.F.



APPLICA: I, 1, 3, 8.

È APPLICATA IN: I, 10; IV, 4, 11, 13, 14.

a. Euclide non specifica letteralmente che si tratta di lati, come nemmeno dice in forma esplicita che sian rette; abbiamo già visto che, nel corso di una stessa proposizione, le indicazioni «lato» e «retta» possono trovarsi alternate con una certa indifferenza, e qui non ne abbiamo nessuna: il greco, col semplice articolo ἡ (πλευρά, lato, e così per εὐθεῖα, retta) lascia sottintendere se si indica preferibilmente l'uno o l'altra.

[8] Nella costruzione viene citato il procedimento costruttivo della I, 3, ma basterebbe applicare soltanto il postulato III.

Di solito non viene oggi usato il triangolo equilatero, ma si costruisce il punto F come intersezione di due cerchi di centri D, E e di raggio uguale convenientemente scelto. Ma Euclide preferisce usare il triangolo equilatero, come fosse un pezzo complesso *prefabbricato*, nelle sue costruzioni. Non vuole,

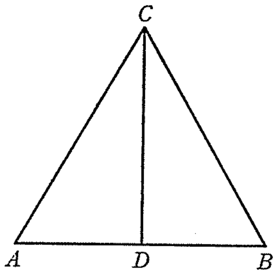
PROPOSIZIONE 10.

Dividere per metà una retta terminata data.

Sia AB la retta terminata data; si deve dunque dividere per metà la retta terminata AB.

Si costruisca su essa il triangolo equilatero ABC (I, 1), e l'angolo ACB sia diviso per metà dalla retta CD (I, 9); dico che la retta AB è stata divisa per metà nel punto D.

Infatti, poiché AC è uguale a CB, e CD è comune, i due lati AC, CD sono uguali rispettivamente ai due lati BC, CD; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD; la base AD è quindi uguale alla base BD (I, 4).



Dunque, la retta terminata data AB è stata divisa per metà in D. – C.D.F.

APPLICA: I, 1, 4, 9.

È APPLICATA IN: I, 12, 16, 42; II, 11, 14; III, 1, 9, 10, 14, 15, 25, 30, 33; IV, 5, 8; VI, 28, 29; X, 33, 34, 35, 59 lemma, 60, 100; XIII, 1.

PROPOSIZIONE 11.

Su una retta data, da un punto dato su essa, innalzare una linea retta perpendicolare [a].

Sia AB la retta data e C il punto dato su essa; si deve dunque innalzare sulla retta AB dal punto C una linea retta perpendicolare.

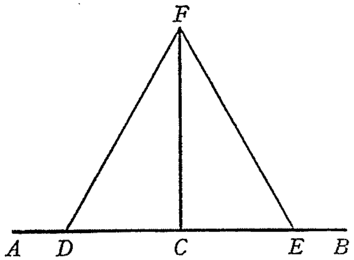
a. Letteralmente: alla retta data dal punto su essa dato condurre ad angoli retti una linea retta.

evidentemente, rimettere in gioco questioni riguardanti intersezioni di cerchi, tutte le volte che può usare il triangolo equilatero, per la costruzione del quale (I, 1) tali questioni si sono già presentate. Avviene così che, esaminando la figura, in questa proposizione e nelle due seguenti I, 10 e I, 11, non si vedono tracciamenti di cerchi: il triangolo equilatero assume appunto quella che, in senso evidentemente metaforico, abbiamo chiamato *funzione di pezzo prefabbricato.*

Si prenda su AC un punto a piacere D, si ponga CE uguale a CD (I, 3), su DE si costruisca il triangolo equilatero FDE (I, 1), e si tracci la congiungente FC; dico che sulla retta data AB dal punto C dato su essa è stata innalzata la linea retta perpendicolare FC.

Infatti, poiché DC è uguale a CE, e CF è comune, i due lati DC, CF sono uguali rispettivamente ai due lati EC, CF; e la base DF è uguale alla base FE, per cui l'angolo DCF è uguale all'angolo ECF (I, 8); e sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta produce gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto (def. X); quindi ciascuno dei due angoli DCF, FCE è retto.

Dunque, sulla retta data AB è stata innalzata dal punto C su essa dato la linea retta perpendicolare CF. – C.D.F.



APPLICA: I, 1, 8.

È APPLICATA IN: I, 13, 46, 48; II, 1, 9, 10; III, 1, 10, 15, 17, 19, 25, 30, 32, 33; IV, 3, 5, 6, 7; VI, 13, 16, 31; lemma di X, 14; XI, 11, 19.

PROPOSIZIONE 12.

Ad una data retta illimitata [a], *da un punto dato ad essa esterno* [b], *condurre una linea retta perpendicolare* [c] [9].

Sia AB la retta illimitata data, e C il punto dato, ad essa esterno: si deve dunque condurre alla retta illimitata

a. L'aggettivo greco ἄπειρος che significa appunto illimitato, senza confine, o, come di solito diciamo, infinito, e che preferiamo tradurre *illimitato* per le ragioni viste alla definizione XXIII.

b. Letteralmente: che non è su essa.

c. Qui si parla esattamente di una linea retta perpendicolare, κάθετος εὐθεῖα γραμμή, nell'intera espressione, cioè senza sottin-

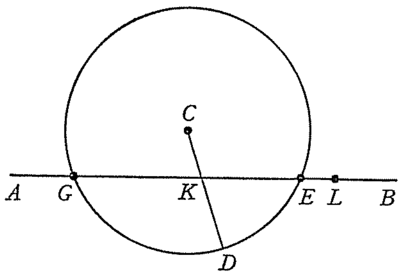
[9] Questa proposizione si trova collocata nel libro primo unicamente per ragioni di simmetrica completezza: dopo la costruzione della perpendicolare

data AB, dal punto dato C ad essa esterno, una linea retta perpendicolare.

tendere nulla, mentre alla 11 si è parlato di una retta condotta ad angoli retti in quanto innalzata, laddove, come sappiamo, in κάθετος εὐθεῖα è l'idea del filo a piombo lasciato cadere sul terreno.

ad una retta per un punto su di questa (data nella I, 11) non poteva mancare la costruzione della perpendicolare *abbassata* da un punto esterno alla retta. Ma la proposizione stessa non viene utilizzata né nel resto del libro primo né nel libro secondo: essa viene applicata per la prima volta soltanto per dimostrare la III, 14. Sicché essa potrebbe senza danno alcuno essere spostata al libro terzo, dove troverebbe la sua collocazione più naturale fra la tredicesima e la quattordicesima proposizione, o anche, per ragioni di simmetria espositiva, subito dopo la seconda dello stesso libro, della quale costituisce in certo senso la proposizione inversa (cfr. nota alla III, 2).

Effettivamente la I, 12 si riferisce a proprietà del cerchio (le quali vengono appunto trattate nel libro terzo), e più precisamente si ricollega a questioni riguardanti le intersezioni di cerchio e retta. La precauzione usata da Euclide nella costruzione (di prendere un punto D situato da parte opposta di C rispetto alla retta AB) assicura che la retta AB passa per un punto interno al cerchio che vien tracciato: tale sarebbe il punto K intersezione della congiungente CD con la retta AB. Che la CD tagli la AB in un punto K proviene dall'avere scelto D da parte opposta di C rispetto ad AB: che K sia interno al cerchio risulta per il fatto che la distanza CK dal centro è minore del raggio CD. Ma la retta AB è infinita (ἄπειρος): cosa insolita in Euclide, che considera sempre rette limitate, cioè segmenti (soltanto nella I, 22 considera una semiretta, infinita da una parte). Dunque sulla retta AB, oltre ad un punto K interno al cerchio, si troverà certamente un punto L distante da C più del raggio, quindi esterno al cerchio. Si vede dunque che Euclide dispone le cose in modo che un segmento KL di AB abbia un estremo K interno al cerchio ed uno L esterno, sicché egli ammette tacitamente quel postulato (caso particolare del postulato della continuità) che noi enunciamo di solito così: « Se un segmento di retta ha un estremo interno ed uno esterno ad un cerchio, esso taglia la circonferenza in un punto ». Quindi KL taglia la circonferenza nel punto E: similmente la AK taglia la circonferenza nel punto G dall'altra parte di K.



In definitiva, Euclide qui, più che aver tralasciato una dimostrazione, ha omesso l'enunciazione di un postulato: si è però garantito che risul-

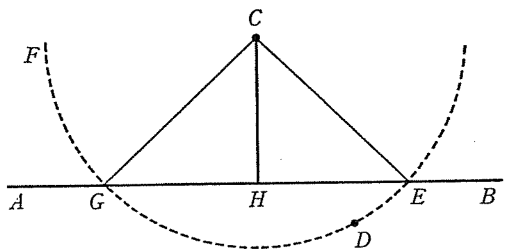
Si prenda difatti dall'altra parte della retta AB un punto a piacere D, con centro C e raggio CD si descriva il cerchio EFG (post. III), si divida la retta EG per metà in H (I, 10) e si traccino le congiungenti CG, CH, CE; dico che CH è la perpendicolare condotta alla retta illimitata AB dal punto dato C ad essa esterno.

Infatti, poiché GH è uguale a HE, e HC è comune, i lati GH, HC sono uguali rispettivamente ai lati EH, HC; e la base CG è uguale alla base CE, per cui l'angolo CHG è uguale all'angolo EHC (I, 8). Ed essi sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata (def. X).

Dunque, alla retta illimitata AB, dal punto dato C ad essa esterno, è stata condotta la perpendicolare CH. – C.D.F.

APPLICA: I, 8, 10.

È APPLICATA IN: III, 14, 15, 16, 35, 36; IV, 4, 13; XI, 11.



tassero verificate le condizioni perché il « postulato » stesso fosse applicabile.

Proclo, nel suo *Commento* (Ed. Friedlein, p. 283, 7-10, trad. Ver Eecke, p. 243) ci dice, a proposito di questa proposizione I, 12: « Questo problema lo investigò per primo Enopide, ritenendolo utile per l'astronomia. Egli designa la perpendicolare con l'antica denominazione *secondo lo gnomone*, poiché anche lo gnomone forma angoli retti con l'orizzonte » (per il termine « gnomone » cfr. nota alla I, 43). Una seconda attribuzione ad Enopide troviamo pure in Proclo nel commento alla proposizione I, 23. A questa, ed alla nota relativa alla I, 22, rinviamo per l'interpretazione unitaria delle due attribuzioni a Enopide (cfr. FRAJESE, *Il cerchio nella geometria di Enopide di Chio*, in « Archimede », dicembre 1967, pp. 285-294).

PROPOSIZIONE 13.

Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti od angoli la cui somma è uguale a due retti[10].

Infatti, una retta AB innalzata sulla retta CD formi gli angoli CBA, ABD; dico che gli angoli CBA, ABD o sono due retti od angoli la cui somma è uguale a due retti.

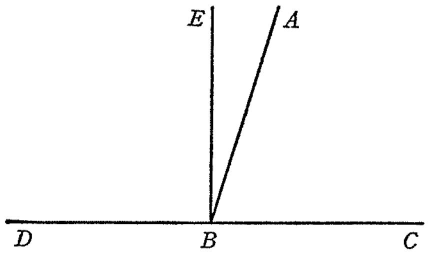
Ora, se l'angolo CBA è uguale all'angolo ABD, essi sono due retti (def. X). Se questo invece non è, si innalzi dal punto B su CD la retta perpendicolare BE (I, 11), per cui sono due angoli retti CBE, EBD; e poiché l'angolo CBE è uguale alla somma dei due angoli CBA, ABE, si aggiunga in comune [all'uno e all'altra] l'angolo EBD[a]; la somma degli angoli CBE, EBD è quindi uguale alla somma dei tre angoli CBA, ABE, EBD (noz. com. II). Di nuovo, poiché l'angolo DBA è uguale alla somma dei due angoli DBE, EBA, si aggiunga in comune all'uno e all'altra l'angolo ABC; la somma degli angoli DBA, ABC è perciò uguale alla somma dei tre angoli DBE, EBA, ABC (noz. com. II). Ma fu dimostrato che pure la somma degli angoli CBE, EBD è uguale alla somma di quegli stessi tre angoli; e cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro (noz. com. I); sono quindi uguali pure la somma degli angoli CBE, EBD e quella degli angoli DBA, ABC; ma la somma degli angoli

a. Espressione caratteristica nella geometria greca, ma di non facile resa letterale: « si aggiunga l'angolo EBD comune » sarebbe una traduzione inesatta, poiché l'angolo non è comune prima di essere aggiunto, mentre nel caso della sottrazione, κοινὴ ἀφῃρήσθω (invece di κοινὴ προσκείσθω, per la somma), « risulti sottratto l'angolo comune » sarebbe resa meno insoddisfacente, ma neanche esatta; abbiamo preferito aggiungere qualche parola.

[10] Questa proposizione è per noi evidente, dato che tra gli angoli consideriamo anche quello piatto. Euclide non considera, invece, detto angolo (come è stato spiegato nella nota alla def. VIII) e quindi egli deve *dimostrare* che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti.

CBE, EBD è uguale a due retti, per cui anche la somma degli angoli DBA, ABC è uguale a due retti.

Dunque, se una retta innalzata... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 11.

È APPLICATA IN: I, 14, 15, 17, 28, 29, 32; III, 32; IV, 3, 15; VI, 7.

PROPOSIZIONE 14.

Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro[a][11].

Infatti, per il punto B della retta AB si traccino le due rette BC, BD, da parti opposte rispetto al punto B, e formino con AB gli angoli adiacenti ABC, ABD, la cui somma sia uguale a due retti; dico che BD, CB sono per diritto [, cioè sulla stessa retta,] fra loro.

Se BD non fosse difatti in linea retta con BC, [supponiamo che] sia BE in linea retta con CB.

a. Letteralmente: se con una retta ed in un punto su essa due rette che non giacciano dalla stessa parte producono gli angoli adiacenti uguali a due retti, le rette saranno per diritto, in retta, fra loro.

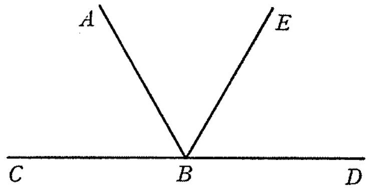
[11] Questa proposizione può dirsi inversa della precedente. In quella (I, 13) si stabilisce che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti: in questa (I, 14) si afferma che se la somma di due angoli consecutivi è uguale a due retti, gli angoli sono adiacenti, cioè i loro lati non comuni sono per diritto.

Zeuthen osserva che in questa proposizione si fa tacito uso del postulato quarto (che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro), e interpreta la proposizione stessa nel senso che è unico il prolungamento di una retta (non potrebbe CB avere altro prolungamento che BD).

Poiché dunque [in tal caso] la retta AB risulta innalzata sulla retta CBE, la somma degli angoli ABC, ABE è uguale a due retti (I, 13); ma anche la somma degli angoli ABC, ABD è uguale a due retti, per cui la somma degli angoli CBA, ABE sarebbe uguale alla somma degli angoli CBA, ABD (post. IV e noz. com. I). Si sottragga da ambedue le somme l'angolo CBA [a]; l'angolo rimanente ABE sarebbe perciò uguale all'altro angolo rimanente ABD (noz. com. III), il minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Perciò BE non è in linea retta con CB.

Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto BD; quindi CB è in linea retta con BD.

Dunque, se per un punto di una retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 13.

È APPLICATA IN: I, 45, 47; VI, 14, 15, 23, 25, 32; X, 25; XI, 38.

PROPOSIZIONE 15.

Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice[b] *tra loro uguali*[12].

Infatti, le due rette AB, CD si taglino fra loro nel punto E; dico che l'angolo AEC è uguale all'angolo [opposto al vertice] DEB, e l'angolo CEB uguale all'angolo [opposto al vertice] AED.

Poiché difatti la retta AE è innalzata sulla retta CD così da formare gli angoli CEA, AED, la somma di [tali] angoli CEA, AED è uguale a due retti (I, 13). Di nuovo, poiché la retta DE è innalzata sulla retta AB così da formare gli angoli AED, DEB, la somma di tali angoli è pure uguale a due retti (id.). Ma fu dimostrato che pure la somma degli angoli CEA, AED è uguale a due retti; quindi la somma degli angoli CEA, AED è uguale alla somma degli angoli AED, DEB (post. IV e noz. com. I). Si sottragga da ambedue le somme l'angolo AED; l'angolo rimanente CEA è perciò uguale all'altro angolo rimanente BED (noz. com. III). Similmente potremo dimostrare che anche gli angoli CEB, DEA sono uguali[a].

a. Letteralmente: In comune risulti sottratto l'angolo CBA.

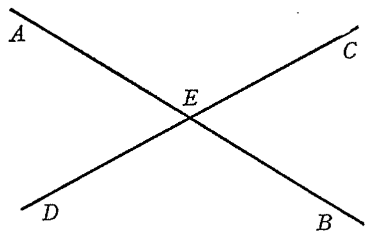
b. αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, « gli angoli al vertice », ossia gli angoli « a modo di vertice », « secondo vertice » o « aventi verticalmente relazione », vale a dire gli angoli opposti verticalmente, così come Proclo (*op. cit.*, pp. 298, 14-24) spiega di preciso la differenza tra gli angoli adiacenti – αἱ ἐφεξῆς γωνίαι – e gli angoli al vertice – αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι –: i primi, nel caso in cui una retta incontra un'altra in un punto che non è né l'uno né l'altro degli estremi, né è essa stessa prolungata al di là del punto di contatto, per cui gli angoli prodotti dalle due rette sono adiacenti; i secondi, quando la prima retta essendo prolungata, le due rette – che si attraversano allora nel punto di contatto – producono due coppie di angoli al vertice, opposti verticalmente, e così chiamati perché da opposte direzioni convergono ad un punto, cioè l'intersezione delle linee, come vertice (κορυφή).

a. Tale, anche letteralmente, la formula greca.

[12] Il teorema sull'uguaglianza degli angoli opposti al vertice è per noi, che consideriamo tra gli angoli l'angolo piatto, di estrema semplicità. Euclide è costretto, invece, a servirsi della I, 13, che stabilisce essere uguale a due retti la somma di due angoli adiacenti. In tale senso può parlarsi di una « rigorizzazione » della dimostrazione per opera di Euclide, e nello stesso senso può intendersi la testimonianza di Proclo (Friedlein, p. 298, 1-5, Ver Eecke, p. 255) che risulterebbe altrimenti pressoché incomprensibile: « Questo teorema, come dice Eudemo, fu trovato per primo da Talete, e ritenuto degno di una dimostrazione scientifica (ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως) dall'autore degli *Elementi* » (Euclide). Potrebbe infatti sembrare assurdo che un teorema tanto semplice dovesse attendere più di due secoli, da Talete che lo avrebbe intuito e sperimentato, ad Euclide che lo avrebbe (per primo) dimostrato « scientificamente ».

Per quanto riguarda il corollario, del resto di dubbia autenticità, va osservato che attraverso il teorema degli angoli opposti al vertice esso raddoppia, per dir così, la portata della I, 13. In detta proposizione s'è mostrato che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti: in questo corollario si fa vedere che quel che noi chiamiamo « angolo giro » equivale a quattro retti.

Dunque, se due rette si tagliano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 13.

È APPLICATA IN: I, 16, 28, 29, 44; II, 10; IV, 15; XI, 4, 33, 38.

COROLLARIO (πόρισμα).

È da ciò evidente che se due rette si tagliano fra loro, esse formeranno al punto di incontro angoli[a] uguali complessivamente a quattro retti[b].

PROPOSIZIONE 16.

In ogni triangolo[c], *se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti*[13].

a. Letteralmente: esse produrranno gli angoli alla sezione... ecc., vale a dire *al punto* in cui si tagliano, trattandosi di due linee; e dovrebbe intendersi *la linea* di sezione, se si trattasse di due superficie, pur avendo a che fare con la sola parola *sezione*, τομή. È l'uso regolare del termine.

b. La genuinità del corollario sembra però dubitevole (cfr. HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 278, ed *Euclid in Greek*, p. 186; ENRIQUES e collaboratori, *op. cit.*, I, 80).

c. Il greco dice di regola « ciascun, ogni triangolo », dove noi diciamo « un (ossia, un qualunque) triangolo »; manteniamo *ogni* come aderenza traduttiva possibile.

[13] Questo teorema, che possiamo chiamare *teorema dell'angolo esterno maggiore*, è una delle proposizioni più importanti del libro primo degli *Elementi*. E poiché rappresenta una proposizione-chiave per la teoria delle parallele (che si ha motivo di ritenere sistemata da Euclide) risulta assai verosimile l'attribuzione a Euclide stesso del suo processo dimostrativo, e del suo posto particolare nella trattazione. Diciamo « del suo processo dimostrativo » perché senza dubbio la proposizione era ben nota prima di Euclide, costituendo un semplice corollario del *teorema dell'angolo esterno somma*

Sia ABC un triangolo, ed un suo lato BC sia stato prolungato oltre C sino a D[a]; dico che l'angolo esterno ACD è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti CBA, BAC.

Si divida AC per metà in E (I, 10); tracciata la congiungente BE la si prolunghi oltre E e sul prolungamento si ponga EF uguale a BE (I, 3), si tracci la congiungente FC, e si prolunghi AC oltre C sino a G (post. II).

Poiché dunque AE è uguale ad EC, e BE è uguale ad EF, i due lati AE, EB sono uguali rispettivamente ai due lati CE, EF; e l'angolo AEB è uguale all'angolo FEC – essi sono difatti angoli opposti al vertice (I, 15) –, per cui la base AB è uguale alla base FC, il triangolo ABE è uguale al triangolo FEC, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, sono uguali ai rispettivi angoli del secondo (I, 4); l'angolo BAE è perciò uguale all'angolo ECF. Ma l'angolo ECD è maggiore dell'angolo ECF (noz. com. VIII); quindi l'angolo ACD è maggiore dell'angolo BAE. Similmente, divisa per metà BC, si potrà dimostrare che anche l'angolo BCG, vale a dire quello ACD (I, 15), è maggiore pure dell'angolo ABC.

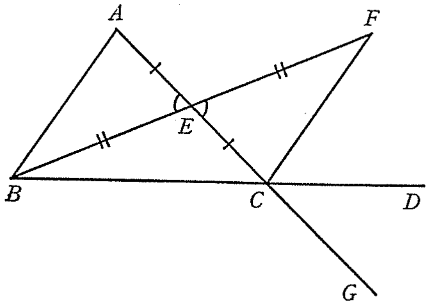
a. Letteralmente: « un suo lato BC sia stato prolungato sino a D » (cioè, sino al punto D); e pure dopo si avrà: « e dopo che fu tracciata la congiungente BE, risulti essa prolungata per diritto sino a F, e si ponga EF uguale a BE ». Abbiamo, vale a dire, adottato formule opportune alla comprensione.

(I, 32): se, infatti un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, è evidentemente maggiore di ciascuno di essi.

La I, 16 si distingue per l'estrema semplicità dei mezzi impiegati (soltanto il primo criterio di uguaglianza dei triangoli e l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice). Presuppone tuttavia l'indefinita prolungabilità della retta (post. II) dato che il segmento BE, qualunque esso sia, *va prolungato di altrettanto* in EF: il teorema dell'angolo esterno maggiore non varrebbe, ad esempio, per triangoli sferici.

Il significato della I, 16 in relazione alla teoria delle parallele è il seguente: se due rette BA, CA si incontrano in un punto A, cioè se due rette di un piano non sono parallele, esse, tagliate dalla trasversale BD, formano angoli corrispondenti (ABC e ACD) disuguali. Segue perciò che quando gli angoli corrispondenti sono uguali, le rette sono necessariamente parallele, cioè segue il cosiddetto *teorema diretto sulle parallele* (I, 27-28).

Dunque, in ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



Applica: I, 4, 10, 15.

È applicata in: I, 17, 18, 21, 26, 27; III, 2, 23.

Proposizione 17.

In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi [a], *è minore di due retti* [14].

Sia ABC un triangolo; dico che nel triangolo ABC la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

a. Si dice naturalmente *i due angoli sono minori di due retti*, ma il *comunque presi assieme* è letterale. Si potrebbe veder qui la forza dell'articolo definito greco: αἱ δύο γωνίαι, i due angoli, vuol dire di preciso «i due angoli che possono esser presi, qualunque essi siano» (e noi diciamo semplicemente, di solito, «due angoli»); ed il testo poi determina πάντῃ μεταλαμβανόμενοι, cioè comunque presi assieme, comunque sommati.

[14] Questa proposizione, come si vede dalla sua dimostrazione, è un corollario immediato del teorema I, 16 dell'angolo esterno maggiore. Si tratta di un importante risultato, che permette di classificare i triangoli secondo i loro angoli. Infatti, se la somma di due angoli di un triangolo deve essere minore di due retti, non possono esistere in un triangolo due angoli retti, o due ottusi, o un retto ed un ottuso (Dante, *Paradiso*, canto XVII, v. 15: *Non capere in triangol due ottusi*). Necessariamente, dunque, almeno due angoli di un triangolo sono acuti (e segue la distinzione in triangoli rettangoli, ottusangoli, acutangoli).

La I, 17 potrebbe anche ricavarsi come conseguenza del teorema sulla somma di tutt'e tre gli angoli del triangolo uguale a due retti (la somma di due angoli sarebbe certamente minore), e ciò in quanto la I, 17 non viene utilizzata per le proposizioni intermedie tra di essa e la I, 32, nella quale appunto Euclide dimostra la proprietà fondamentale sulla somma dei tre angoli di un triangolo. Così pure, come s'è visto, la I, 16 (teorema

Infatti, si prolunghi BC oltre C sino a D (post. II).

E poiché nel triangolo ABC l'angolo ACD è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno ed opposto ABC (I, 16).

dell'angolo esterno maggiore) può ricavarsi come conseguenza della stessa I, 32 che dà anche il teorema dell'angolo esterno somma. Ma la I, 16 viene applicata per proposizioni intermedie: non così la I, 17 che viene applicata per la prima volta soltanto nel libro terzo. La proposizione I, 17 è dunque inutile per l'economia generale degli *Elementi*. Perché, dunque, Euclide l'ha data?

La spiegazione più ovvia consiste nel rilevare che la I, 17, come la sua collocazione mostra (è compresa tra le prime ventotto proposizioni del libro primo!), è indipendente dal quinto postulato, o postulato di Euclide propriamente detto. La I, 32 dipende invece da detto postulato (attraverso la I, 29). Euclide ha dunque voluto mostrare fin dove si poteva giungere senza applicare il postulato quinto: questa separazione netta tra proposizioni che applicano detto postulato (dalla I, 29 in poi) e quelle che non l'applicano (le prime ventotto proposizioni del libro primo) è negli *Elementi* assai evidente, e costituisce uno dei motivi fondamentali del libro primo.

Questa *separazione* rappresenta una *finezza* di Euclide, il quale vuole adoperare soltanto postulati strettamente necessari: vi si può anche scorgere una specie di esitazione di Euclide di fronte all'uso di quel quinto postulato, che resistette ai suoi tentativi di dimostrazione.

Ma un'altra considerazione può farsi nei riguardi dello *scopo* dell'inserzione della I, 17, apparentemente inutile. Va anzitutto avvertito che Euclide ama considerare quelli che possiamo chiamare *quadrilateri* di proposizioni (ad esempio in V, 7, 8, 9, 10 ed in X, 9), cioè gruppi di quattro proposizioni legate tra loro da uno speciale vincolo logico: proposizione diretta, inversa, contraria, contronominale.

Se rappresentiamo la *diretta* schematicamente con:

$$I \rightarrow T$$

(dall'ipotesi I segue la tesi T)

l'inversa è: $T \rightarrow I$

la contraria è: $-I \rightarrow -T$

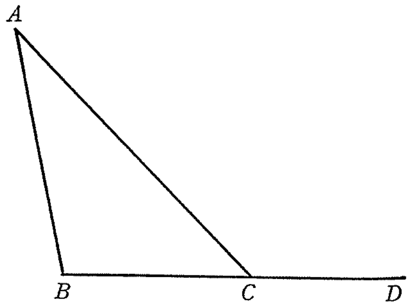
(dalla negazione di I segue la negazione di T)

e la contronominale è $-T \rightarrow -I$

(dalla negazione di T segue la negazione di I).

La cosiddetta contronominale è, come si vede, l'inversa della contraria, o, ciò che fa lo stesso, la contraria dell'inversa, ed è sempre *valida* insieme alla diretta, alla quale è logicamente equivalente (ciascuna di esse si ricava dall'altra). Per esempio, dalla diretta $I \rightarrow T$ segue subito la contronominale se si ammette il *principio del terzo escluso*. Infatti la $-T \rightarrow -I$ può esser subito dimostrata per assurdo partendo dalla diretta. Se da $-T$ non seguisse $-I$ ne seguirebbe I. Ma siccome da I (per la *diretta*) segue T, da $-T$ seguirebbe T, ciò che è assurdo. Ebbene: se dagli *Elementi* si

Si aggiunga in comune l'angolo ACB; quindi la somma degli angoli ACD, ACB è maggiore della somma degli angoli ABC, BCA (noz. com. IV)[a]. Ma la somma degli angoli ACD, ACB è uguale a due retti (I, 13); la somma degli angoli ABC, BCA è quindi minore di due retti. Similmente potremo dimostrare che anche la somma degli angoli BAC, ACB è minore di due retti e così, infine, quella degli angoli CAB, ABC.



Dunque, in ogni triangolo la somma di due angoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13, 16.

È APPLICATA IN: III, 16, 31; VI, 3, 4, 7; XI, 14.

a. È fra le nozioni comuni espunte da Heiberg. Ricordiamo ancora che esse sono la IV, V e VI.

togliesse l'apparentemente inutile I, 17, verrebbe a mancare uno dei *lati* di un quadrilatero di proposizioni fondamentali per la teoria delle parallele. Prendendo infatti come proposizione diretta il quinto postulato, la I, 17 ne costituisce l'inversa, mentre la I, 27-28 ne costituisce la contraria e la I, 29 la contronominale. Per le ultime due proposizioni, rimandiamo il lettore alle note ad esse relative: che la I, 17 sia l'inversa del postulato quinto, si vede poi subito osservando che in quest'ultimo l'ipotesi è che la somma di due angoli sia minore di due retti, mentre questa è la tesi della I, 17: la tesi del postulato quinto è che due rette s'incontrino, mentre questa è l'ipotesi della I, 17 (cioè che esista un triangolo, ossia che due rette s'incontrino, mentre il terzo lato del triangolo è costituito dalla cosiddetta «trasversale»).

Va finalmente osservato che Legendre (seguendo anche un certo corso di idee di Saccheri) dimostra che dalla I, 17 può ricavarsi che la somma di tutt'e tre gli angoli di un triangolo non può superare due retti: ciò applicando anche la X, 1 di Euclide (cfr. nota a detta prop.). Il notevolissimo risultato di Saccheri-Legendre rappresenta il massimo al quale possa giungersi, senza applicare il quinto postulato, in materia di somma dei tre angoli di un triangolo. Ad esso si collega un secondo risultato, che possiamo pure chiamare «di Saccheri-Legendre», secondo il quale se in un solo triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti, lo stesso si verifica per qualunque altro triangolo.

PROPOSIZIONE 18.

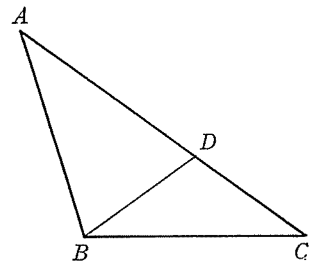
In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore [a] [15].

Infatti, sia ABC un triangolo avente il lato AC maggiore del lato AB; dico che anche l'angolo ABC è maggiore dell'angolo BCA.

Poiché AC è difatti maggiore di AB, si ponga AD uguale ad AB (I, 3), e si tracci la congiungente BD.

E poiché nel triangolo BCD l'angolo ADB è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno ed opposto DCB (I, 16); ma l'angolo ADB è uguale all'angolo ABD, poiché sono pure uguali il lato AB ed il lato AD (I, 5); anche l'angolo ABD è quindi maggiore dell'angolo ACB, per cui l'angolo ABC è molto maggiore dell'angolo ACB (noz. com. VIII).

Dunque, in ogni triangolo, a lato maggiore... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 3 (o anche post. III), 5, 16.

È APPLICATA IN: I, 19.

a. Letteralmente: il lato maggiore sottende l'angolo maggiore.

[15] È questa, nella sua classica semplicità, una delle più belle dimostrazioni degli *Elementi*. Oseremmo dire che mai essa sia stata variata attraverso i secoli.

Effettivamente è una dimostrazione eseguita, per dir così, con grande larghezza, col ricorso alla «più forte ragione»: si deve dimostrare che l'angolo ABC è maggiore di quello BCA, e si riesce a dimostrare che già è maggiore di BCA una sola parte (ABD) di ABC.

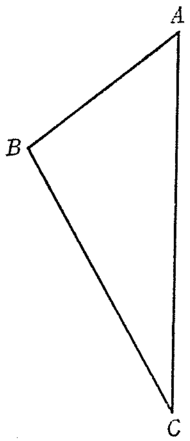
Si osservi che la dimostrazione è fondata sul teorema dell'angolo esterno maggiore I, 16: ove questo non avesse una dimostrazione autonoma, ma si ricavasse come corollario del teorema I, 32 dell'angolo esterno somma, potrebbe credersi che il nostro teorema I, 18 dipendesse dal postulato quinto: invece Euclide mostra, con vero *esprit de finesse*, che esso ne è indipendente. Così per il teorema inverso (I, 19) che segue immediatamente. Sicché i due teoremi fondamentali sulle disuguaglianze tra lati ed angoli di un triangolo risultano indipendenti dal quinto postulato.

PROPOSIZIONE 19.

In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore [a] [16].

Sia ABC un triangolo avente l'angolo ABC maggiore dell'angolo BCA; dico che anche il lato AC è maggiore del lato AB.

Infatti, se non lo fosse, AC sarebbe o uguale ad AB o minore; ora, AC non è uguale ad AB: difatti anche l'angolo ABC sarebbe in tal caso uguale all'angolo ACB (I, 5); ma non lo è, per cui AC non è uguale ad AB. Tuttavia, AC non è neppure minore di AB; in tal caso anche l'angolo ABC sarebbe difatti minore dell'angolo ACB (I, 18), e non lo è; quindi AC non è minore di AB. Ma fu dimostrato che non è nemmeno uguale ad esso. Perciò AC è maggiore di AB.



Dunque, in ogni triangolo, ad angolo maggiore... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 18.

È APPLICATA IN: I, 20, 24; III, 2, 16, 18.

a. Letteralmente: all'angolo maggiore si sottende il lato maggiore.

[16] Questa proposizione è l'inversa della precedente, della quale si serve per la dimostrazione. È, questo, uno dei più eleganti esempi di dimostrazione per assurdo. È poi superfluo richiamare l'attenzione sull'importanza del teorema, in base al quale (tanto per citare un esempio) si ricava che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei cateti.

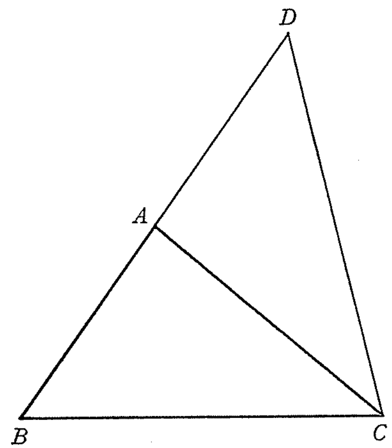
PROPOSIZIONE 20.

In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente [17].

Infatti, sia ABC un triangolo; dico che la somma di due suoi lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente, cioè che la somma di BA, AC è maggiore di BC, la somma di AB, BC è maggiore di AC, e la somma di BC, CA è maggiore di AB.

Si prolunghi difatti BA oltre A, [sul prolungamento] si ponga AD uguale a CA (I, 3), e si tracci la congiungente DC.

Poiché dunque DA è uguale ad AC, anche l'angolo ADC è uguale all'angolo ACD (I, 5); l'angolo BCD è quindi maggiore dell'angolo ADC (noz. com. VIII); e poiché DCB è un triangolo che ha l'angolo BCD maggiore dell'angolo BDC e ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19), DB è maggiore di BC. Ma DA è uguale ad AC; perciò la somma di BA, AC è maggiore di BC. Similmente potremo dimostrare che anche la somma di AB, BC è maggiore di CA, e quella di BC, CA è maggiore di AB.



Dunque, in ogni triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 5, 19.

È APPLICATA IN: I, 21; III, 7, 8, 11, 12, 15; XI, 20, 22.

[17] Anche questa proposizione è una delle più importanti sui triangoli, e la sua dimostrazione è una di quelle che son rimaste classicamente invariate attraverso i secoli. È opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che essa non dipende dal postulato quinto.

Il suo significato più generale è che la linea retta rappresenta il minimo percorso tra due punti, se paragonato a spezzate rettilinee: sarà

PROPOSIZIONE 21.

Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme [a], *saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore* [18].

Infatti, nel triangolo ABC si costruiscano su uno dei lati BC, a partire dagli estremi B, C, le due rette BD, DC

a. Sia il « così » del *così costruite*, come il *sommate assieme*, ed il *pure sommati assieme* dei lati del triangolo, posteriormente, non esistono nel testo greco.

poi Archimede a postulare tale proprietà di minimo anche rispetto alle linee curve.

A proposito di questo teorema I, 20, Proclo ci riporta (Friedlein, p. 322, 4-14, Ver Eecke, p. 275) la curiosa notizia che secondo gli Epicurei esso è evidente anche ad un asino: infatti se si pone del foraggio ad un estremo di un lato di un triangolo, l'asino, che ha fame, partendo dall'altro estremo, percorre un solo lato e non due!

Euclide non aggiunge la proprietà che in ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due, perché (date le tre disuguaglianze riguardanti la somma) se ne possono, per tutti i casi possibili, ricavare le disuguaglianze riguardanti la differenza: disuguaglianze che non offrirebbero dunque alcun nuovo elemento.

[18] Per rendere più facile la lettura riassumiamo il testo usando il simbolo $>$ (maggiore di):

Per i lati del triangolo ABE vale la relazione:

$$AB + AE > BE$$

da cui: $$AB + AE + EC > BE + EC$$

cioè: $$AB + AC > BE + EC \quad (*)$$

Ma: $$CE + ED > CD$$

da cui: $$CE + ED + DB > CD + DB$$

ossia: $$CE + EB > CD + DB$$

ossia ancora (alterando l'ordine al primo membro):

$$BE + EC > CD + DB$$

e confrontando con la (*):

$$AB + AC > CD + DB$$ come si doveva dimostrare.

Così per gli angoli: $BDC > CEB$

che si incontrano internamente ad esso; dico che la somma di BD, DC è minore della somma dei due rimanenti lati BA, AC del triangolo, ma che BD, DC comprendono un angolo maggiore, cioè che BDC è maggiore di BAC.

Si prolunghi difatti BD oltre D sino ad E. Poiché in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del lato rimanente, nel triangolo ABE la somma dei due lati AB, AE è maggiore di BE (I, 20); si aggiunga EC in comune [alla somma dei due lati ed al terzo lato]; la somma di BA, AC è quindi maggiore della somma di BE, EC (noz. com. IV). Di nuovo, poiché nel triangolo CED la somma dei due lati CE, ED è maggiore di CD, si aggiunga DB in comune [alla somma dei due lati ed al terzo lato]; la somma di CE, EB [a] è perciò maggiore della somma di CD, DB. Ma fu dimostrato che la somma di BA, AC è maggiore della somma di BE, EC; quindi la somma di BA, AC è molto maggiore della somma di BD, DC.

Di nuovo, poiché in ogni triangolo l'angolo esterno è maggiore dell'angolo interno ed opposto (I, 16), nel triangolo CDE l'angolo esterno BDC è maggiore dell'angolo CED. E per la stessa ragione, anche nel triangolo ABE l'angolo esterno CEB è maggiore dell'angolo BAC. Ma fu dimostrato che l'angolo BDC è maggiore dell'angolo CEB, per cui l'angolo BDC è molto maggiore dell'angolo BAC.

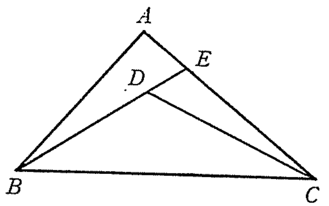
a. Così in greco; si tratta di BE, EC, evidentemente, come è detto dopo.

Ma: $$CEB > BAC$$

quindi: $$BDC > BAC$$

Per quanto riguarda i segmenti, il procedimento dimostrativo consiste nel dimostrare un caso particolare più semplice (quello nel quale il punto D coincida con E, cioè si trovi sul lato AC): questo stesso caso particolare viene poi applicato una seconda volta nel triangolo BCE (dato che il punto D di CD si trova sul lato BE).

Dunque, se su uno dei lati di un triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 16, 20.

È APPLICATA IN: III, 8.

PROPOSIZIONE 22.

Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente (I, 20) [a] [19].

Siano A, B, C tre rette date, e la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente, cioè la somma

a. L'enunciato prosegue con le parole seguenti, che costituiscono probabilmente una glossa e sono una mera, ed anche inutile, ripetizione dell'enunciato di I, 20: « dato che pure, in ogni triangolo, la somma di due lati comunque presi è maggiore del lato rimanente ». Nell'enunciato stesso, da *occorre dunque* in poi, abbiamo lo stabilimento di un διορισμός, ossia della condizione che è necessaria perché la soluzione del problema sia possibile, ed è questo negli *Elementi* il primo caso di διορισμός in tal senso, cioè come condizione generale; la formula che lo introduce, il δεῖ δή, è la medesima che introduce il διορισμός nell'altro senso di ciò che va effettuato quale condizione particolare per ottenere ciò che ricerchiamo in generale (ad es., in I, 10: tagliare in due parti uguali la retta terminata AB).

[19] Questa proposizione presuppone, per l'effettiva possibilità della costruzione in essa eseguita, una proposizione che Euclide non esprime esplicitamente, e che possiamo dire in certo senso inversa della I, 20. In quest'ultima si dimostra che i tre lati di ogni triangolo sono *rette* tali che la somma di due di esse, in qualunque modo prese, supera la terza (ciò vale quanto dire che ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza). Qui, invece, si vuol « dimostrare » che se dette condizioni di disuguaglianza fra tre rette si verificano, con le tre rette si può costruire un triangolo. Abbiamo posto tra virgolette la parola

di A, B sia maggiore di C, la somma di A, C sia maggiore di B, ed infine quella di B, C sia maggiore di A; si deve dunque costruire un triangolo i cui lati siano tre rette rispettivamente uguali ad A, B, C.

Si assuma una retta DE terminata in D ed illimitata dalla parte di E, e si ponga DF uguale ad A, sia posta FG uguale a B, e si ponga GH uguale a C (I, 3). Con centro F e raggio FD si descriva il cerchio DKL (post. III); di nuovo,

« dimostrare », perché effettivamente una vera dimostrazione Euclide non ce la dà, né poteva darla se anche oggi, per noi, questa proposizione inversa della I, 20 va riguardata come un postulato (che taluno chiama appunto *postulato del triangolo*). Si tratta di questioni riguardanti le intersezioni di due circonferenze, e più precisamente si tratta di ammettere che se determinate condizioni si verificano (che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza) le due circonferenze sono secanti.

Noi ricorriamo per questo (s'è detto) ad un caso particolare del postulato della continuità, postulando che se un arco di cerchio ha un estremo interno ed uno esterno ad un secondo cerchio, l'arco taglia la seconda circonferenza in un punto. Similmente facciamo per le intersezioni tra cerchio e retta, come è stato esposto nella nota alla I, 12.

Euclide, come già appunto nella I, 12, non enuncia esplicitamente il postulato, ma si pone proprio nelle condizioni occorrenti affinché il postulato stesso, da lui evidentemente intuìto, sia applicabile. Ecco dunque che egli già nell'enunciato di questa I, 22 espone quale sia la condizione di risolubilità, dando in sostanza il cosiddetto *diorisma* (cioè la distinzione tra i casi di possibilità e quelli di impossibilità nella risoluzione di un problema). Ma per maggiori notizie sul *diorisma* rinviamo alla nota alla VI, 27.

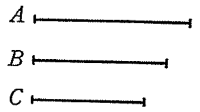
La proposizione I, 22 della quale ci stiamo occupando rappresenta la premessa essenziale per il problema seguente (I, 23) che richiede di effettuare la costruzione di un angolo uguale ad un angolo dato. Si tratta di un problema (quello della costruzione dell'angolo) assai più importante: la sua risoluzione, però, è fondata sulla costruzione del triangolo, della quale è una semplicissima conseguenza. Questo fatto permette di attribuire a Enopide di Chio la costruzione del triangolo della I, 22 (così come la costruzione della perpendicolare da un punto esterno ad una retta, esposta nella I, 12). Ma sull'attribuzione in questione si veda la nota alla proposizione seguente I, 23.

Va infine notato che in questa proposizione I, 22 viene considerata una semiretta, cioè una *retta* delimitata da una parte, illimitata dall'altra. E, come s'è veduto, nella I, 12 si considera una retta illimitata dalle due parti. Le costruzioni effettuate in queste due proposizioni (I, 22 e I, 12) richiedono effettivamente tale infinità (parziale o totale): ma in ogni altro caso Euclide considera sempre rette terminate dalle due parti (segmenti), postulandone tuttavia la prolungabilità.

con centro G e raggio GH si descriva il cerchio KLH (id.), e si traccino le congiungenti KF, KG; dico che con tre rette uguali ad A, B, C è stato costruito il triangolo KFG.

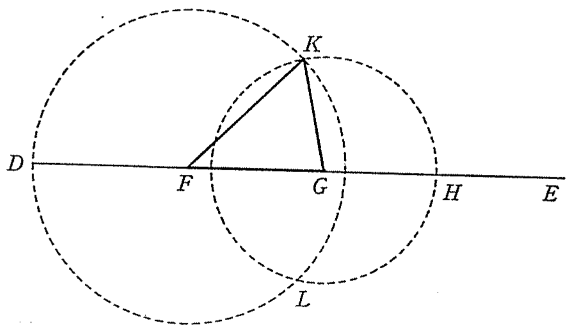
Infatti, poiché il punto F è centro del cerchio DKL, si ha che FD è uguale a FK; ma FD è uguale ad A, per cui pure KF è uguale ad A (noz. com. I). Di nuovo, poiché il punto G è centro del cerchio LKH, si ha che GH è uguale a GK; ma GH è uguale a C: anche KG è quindi uguale a C. Ed è uguale a B la retta FG; perciò le tre rette KF, FG, GK sono uguali alle tre A, B, C.

Dunque, con le tre rette KF, FG, GK che sono uguali alle tre rette date A, B, C, è stato costruito il triangolo KFG. – C.D.F.



APPLICA: I, 3.

È APPLICATA IN: I, 23.



PROPOSIZIONE 23.

Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato [20].

Siano AB la retta data, A il punto [dato] su essa, e DCE l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire sulla retta

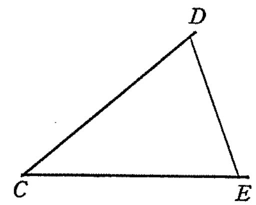
[20] Questo problema è di grande importanza nell'economia generale degli *Elementi*, come il lettore potrà vedere anche dal numero delle propo-

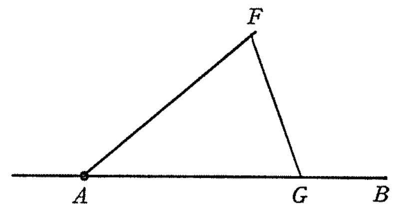
data AB, e [con vertice] nel suo punto A, un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato DCE.

Si prendano a piacere su ciascuna delle due rette CD, CE i punti [rispettivi] D, E, si tracci la congiungente DE, e con tre rette, uguali alle tre rette CD, DE, CE, si costruisca il triangolo AFG, in modo che CD sia uguale ad AF, sia CE uguale ad AG, ed infine DE sia uguale a FG (I, 22).

Quindi, poiché i due lati DC, CE sono uguali rispettivamente ai due lati FA, AG, e la base DE è uguale alla base FG, l'angolo DCE è uguale all'angolo FAG (I, 8).

Dunque, sulla retta data AB, e con vertice nel punto A di essa, è stato costruito l'angolo rettilineo FAG uguale all'angolo rettilineo dato DCE. – C.D.F.





APPLICA: I, 8, 22.

È APPLICATA IN: I, 24, 31, 42; III, 7, 8, 25, 27, 33, 34; IV, 2, 3; VI, 5, 6, 7, 18; XI, 26, 31.

sizioni seguenti nelle quali esso trova applicazione. Una testimonianza di Proclo (Ed. Friedlein, p. 333, 1, Ver Eecke, p. 284) ci fa sapere che, secondo Eudemo, la sua invenzione (εὕρημα) è dovuta a Enopide di Chio, matematico e astronomo del v secolo avanti Cristo. Tale attribuzione che, per l'esplicita citazione di Eudemo, acquista una particolare attendibilità, va accoppiata all'altra già veduta per la costruzione della perpendicolare ad una retta per un punto ad essa esterno, esposta nella I, 12 (si veda la nota a detta proposizione). Si tratta di due costruzioni (della perpendicolare e dell'angolo) molto elementari, e sembra strano che il merito della loro «invenzione» venga dato ad un matematico del v secolo, pressoché contemporaneo di Anassagora, di Ippocrate di Chio (suo conterraneo), di Archita di Taranto.

Si osserva, tuttavia, che la costruzione dell'angolo consiste essenzialmente nella costruzione del triangolo, sicché le due proposizioni da attribuire effettivamente ad Enopide sono la I, 12 e la I, 22. E queste due proposizioni hanno un elemento comune: si tratta nella prima di determi-

PROPOSIZIONE 24.

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali [a] *maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.*

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente ai due lati DE, DF, cioè AB uguale a DE ed AC uguale a DF, e l'angolo con vertice in A sia maggiore dell'angolo con vertice in D; dico che anche la base BC è maggiore della base EF.

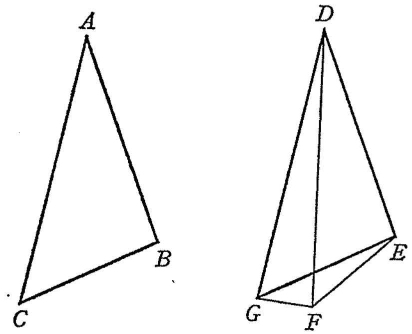
Infatti, poiché l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF, si costruisca sulla retta DE, e col vertice nel punto D di essa, l'angolo EDG uguale all'angolo BAC (I, 23), si ponga DG uguale all'una o all'altra [indifferentemente] delle rette AC, DF (I, 3, o post. III), e si traccino le congiungenti EG, FG.

Poiché dunque AB è uguale a DE, ed AC a DG, i due lati BA, AC sono uguali rispettivamente ai due lati ED, DG; e l'angolo BAC è uguale all'angolo EDG, per cui la base BC è uguale alla base EG (I, 4). Di nuovo, poiché DF è uguale a DG, anche l'angolo DGF è uguale all'angolo DFG (I, 5); quindi l'angolo DFG è maggiore dell'angolo EGF (noz. com. VIII); l'angolo EFG è perciò molto maggiore di quello EGF (id.). E poiché EFG è un triangolo che ha l'angolo EFG maggiore dell'angolo EGF, e ad angolo

a. Letteralmente: «dalle rette uguali», secondo l'alternanza già prima vista.

nare le condizioni perché siano secanti un cerchio ed una retta, mentre nella seconda si tratta delle condizioni perché due cerchi siano secanti. Da questo punto di vista, che lo sviluppo di questo interessante capitolo della geometria (retta secante un cerchio, cerchi secanti tra loro) venga attribuito ad un matematico del v secolo è perfettamente spiegabile: ed un merito non piccolo risale all'autore delle relative teorie. Per maggiori notizie cfr. A. FRAJESE, *Il cerchio nella geometria di Enopide di Chio*, in «Archimede», n. 6, dicembre 1967, pp. 285-294.

maggiore è opposto lato maggiore (I, 19), anche il lato EG è maggiore del lato EF. Ma EG è uguale a BC; quindi anche BC è maggiore di EF.



Dunque, se due triangoli hanno due lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 4, 5, 19, 23.

È APPLICATA IN: I, 25; III, 7, 8, 15; XI, 22.

PROPOSIZIONE 25.

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente [21].

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente ai due lati DE, DF, cioè AB uguale

[21] Questa proposizione è l'inversa della precedente I, 24. In ambedue le proposizioni, così come in altre precedenti, Euclide si riporta alla nomenclatura da lui usata per i due criteri di uguaglianza dei triangoli già considerati (I, 4 e I, 8). Così, dovendo considerare il caso di due triangoli aventi i tre lati rispettivamente uguali, vengono considerati dapprima due lati di un triangolo che sono uguali a due lati dell'altro: il terzo lato, poi, nell'uno e nell'altro triangolo, viene chiamato *base* (βάσις).

Perché questa *dissimmetria* nel considerare i tre lati di un triangolo, che, d'altra parte, risultano *simmetricamente* uguali a due a due? Una risposta può esser data se si osserva che, con enunciati di tal genere, le quattro proposizioni I, 4; I, 8; I, 24; I, 25 vengono a formare un *quadrilatero* di proposizioni (cfr. nota alla I, 17), sia pure con qualche adattamento. Una volta ammessa l'ipotesi (comune alle quattro proposizioni) che due lati a, b di un primo triangolo sono rispettivamente uguali a due lati a', b' di un secondo triangolo, la I, 4 aggiunge l'ipotesi supplementare dell'uguaglianza degli angoli compresi $\gamma = \gamma'$, e ne deduce l'uguaglianza dei terzi lati, o *basi* ($c = c'$). La I, 8, invece, parte dall'ipotesi dell'uguaglianza dei terzi lati o *basi* $c = c'$ e ne deduce l'uguaglianza degli angoli compresi tra i primi due lati ($\gamma = \gamma'$): si presenta, cioè, come l'inversa a DE ed AC uguale a DF, ma la base BC sia maggiore della base EF; dico che anche l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.

Infatti, se non lo fosse, sarebbe o uguale ad esso o minore; ora, l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF: in tal caso difatti anche la base BC sarebbe uguale alla base EF (I, 4), ma non lo è. Perciò l'angolo BAC non è uguale all'angolo

della I, 4. E la I, 24, se si prescinde dal senso della disuguaglianza, è la *contraria* della I, 4: cioè dalla disuguaglianza degli angoli compresi deduce la disuguaglianza delle basi. Finalmente, sempre prescindendo dal senso della disuguaglianza, la I, 25 è l'inversa della contraria (ovvero, ciò che fa lo stesso, la contraria dell'inversa), cioè la cosiddetta *contronominale* della I, 4: se le basi sono disuguali, dice infatti la I, 25, gli angoli compresi sono disuguali. Tutto ciò risulta più evidente attraverso il seguente quadro sinottico:

Ipotesi comune: $a = a'$; $b = b'$

	Ipotesi supplementare	Tesi
I, 4	$\gamma = \gamma'$	$c = c'$
I, 8	$c = c'$	$\gamma = \gamma'$
I, 24	$\gamma \neq \gamma'$	$c \neq c'$
I, 25	$c \neq c'$	$\gamma \neq \gamma'$

È, questo, il secondo *quadrilatero* di proposizioni che troviamo negli *Elementi* (il primo è costituito dal postulato V, dalla I, 17, dalla I, 27-28 e dalla I, 29).

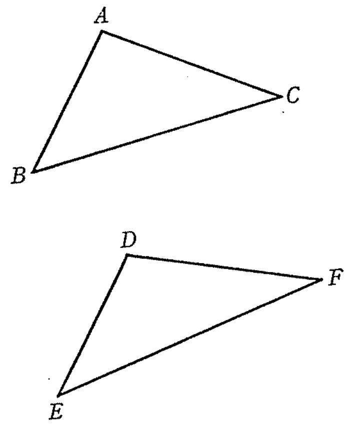
Ma anche un altro *quadrilatero* è dato di scorgere tra le proposizioni del libro primo finora vedute: quello costituito (pure con qualche adattamento) dalle I, 5; I, 6; I, 18; I, 19.

Più precisamente, la I, 5, che assumiamo come proposizione iniziale, parte dall'uguaglianza di due lati di un triangolo e ne deduce l'uguaglianza di due angoli: la I, 6 ne è l'inversa: inoltre, prescindendo dal senso della disuguaglianza, la I, 18 ne è la contraria, e la I, 19 ne è la contronominale. Abbiamo così:

	I quadrilatero	II quadrilatero	III quadrilatero
diretta $I \to T$	post. V	I, 4	I, 5
inversa $T \to I$	I, 17	I, 8	I, 6
contraria $-I \to -T$	I, 27-28	I, 24	I, 18
contronominale $-T \to -I$	I, 29	I, 25	I, 19

Si vede così che se si prescinde dai problemi e da un lemma, la maggioranza delle prime 29 proposizioni del libro primo è ordinata in *quadrilateri*. Ed altri quadrilateri troveremo nel séguito: Euclide ama porre in evidenza tale relazione tra quattro proposizioni, ed ama enunciare tutte e quattro le proposizioni anche quando per taluna di esse ciò non è strettamente necessario: ad esempio per la I, 17.

EDF; e neppure, tuttavia, l'angolo BAC è minore dell'angolo EDF: difatti in tal caso anche la base BC sarebbe minore della base EF (I, 24), ma non lo è; quindi l'angolo BAC non è minore dell'angolo EDF. Ma fu dimostrato che non è nemmeno uguale, per cui l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.



Dunque, se due triangoli hanno due lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 24.

È APPLICATA IN: XI, 20, 23.

PROPOSIZIONE 26.

Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente[22].

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due angoli ABC, BCA uguali rispettivamente ai due angoli DEF, EFD, cioè

[22] Questa proposizione è comunemente detta oggi « secondo criterio di uguaglianza dei triangoli »: negli *Elementi*, invece, questo « criterio » occupa il terzo posto (dopo la I, 4 e la I, 8).

Come si vede, Euclide tratta di séguito i due casi: quello del lato adiacente ai due angoli uguali e quello del lato opposto ad uno di detti angoli. Il secondo caso viene trattato applicando il teorema I, 16 dell'angolo esterno maggiore, sicché anch'esso è indipendente dal postulato quinto. Qualche testo di geometria non introduce il teorema dell'angolo esterno maggiore in modo autonomo, ma lo deduce da quello dell'angolo esterno somma (I, 32). In questo modo il secondo caso del criterio di uguaglianza che stiamo considerando si deduce dal primo caso in base al teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo. Infatti, applicando detto teorema, si vede che se due triangoli hanno due angoli rispettivamente uguali a due angoli, essi hanno anche uguali i *terzi angoli*, dato che la somma dei tre angoli è costantemente uguale a due retti. Sicché è la introduzione

ABC uguale a *DEF* e *BCA* uguale ad *EFD*, ed abbiano anche un lato uguale ad un lato: dapprima, quello adiacente agli angoli uguali, cioè *BC* uguale ad *EF*; dico che essi avranno anche i lati rimanenti uguali ai lati rimanenti, cioè *AB* uguale a *DE* ed *AC* uguale a *DF*, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente, cioè *BAC* uguale ad *EDF*.

Infatti, se *AB* fosse disuguale rispetto a *DE*, uno dei lati stessi sarebbe maggiore. Sia maggiore *AB*, si ponga *BG* uguale a *DE* (I, 3), e si tracci la congiungente *GC*.

Poiché dunque *BG* è uguale a *DE*, e *BC* ad *EF*, i due lati *BG*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e l'angolo *GBC* è uguale all'angolo *DEF*, per cui la base *GC* è in tal caso uguale alla base *DF*, il triangolo *GBC* è uguale al triangolo *DEF*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); l'angolo *GCB* è quindi uguale all'angolo *DFE*. Ma l'angolo *DFE* è per ipotesi uguale all'angolo *BCA*; anche l'angolo *BCG* sarebbe perciò uguale all'angolo *BCA* (noz. com. I), il minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi *AB* non è disuguale rispetto a *DE*, e perciò è uguale [a]. Ma anche *BC*, *EF* sono uguali fra loro: i due lati *AB*, *BC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; l'angolo *ABC* è inoltre uguale all'angolo *DEF*; dunque la base *AC* è uguale alla base *DF*, e l'angolo rimanente *BAC* è uguale all'angolo rimanente *EDF* (I, 4).

Ma, di nuovo, sia adesso il caso in cui sono uguali i lati opposti agli angoli uguali, cioè sia *AB* uguale a *DE* [b]; dico

a. Nel testo abbiamo: « ... non è disuguale rispetto a *DE*. Quindi è uguale ». Traduciamo con *e perciò, e dunque*, od espressioni vicine, in questo e nei casi più o meno simili.

b. Letteralmente: come [nel caso di] *AB* rispetto a *DE*.

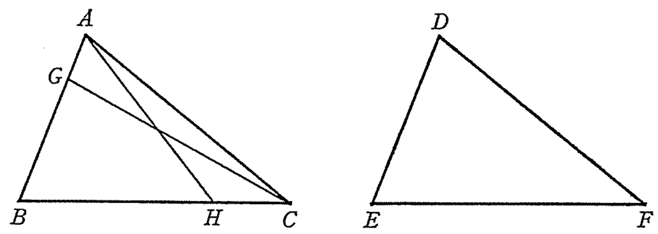
delle I, 16 (teorema dell'angolo esterno maggiore) che permette di mostrare che anche il secondo caso del nostro secondo criterio di uguaglianza dei triangoli è indipendente dal quinto postulato.

Si osservi infine che nell'enunciato della I, 26 (come in quello della I, 8) la *tesi* è ridotta al minimo: non è in essa compresa, ad esempio, l'uguaglianza dei due triangoli (equivalenza) che segue soltanto dalla I, 4 (primo criterio) la quale esplicitamente la menziona.

nuovamente che pure i lati rimanenti [del primo triangolo] saranno uguali ai lati rimanenti [del secondo], cioè *AC* uguale a *DF* e *BC* uguale ad *EF*, e che infine l'angolo rimanente *BAC* del primo è uguale all'angolo rimanente *EDF* del secondo.

Infatti, se *BC* fosse disuguale rispetto ad *EF*, uno dei lati stessi sarebbe maggiore. Sia maggiore *BC*, se possibile, si ponga *BH* uguale ad *EF* (I, 3), e si tracci la congiungente *AH*. Ora, poiché *BH* è uguale ad *EF* ed *AB* a *DE*, i due lati *AB*, *BH* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, per cui la base *AH* è uguale in tal caso alla base *DF*, il triangolo *ABH* è uguale al triangolo *DEF*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); quindi l'angolo *BHA* è uguale all'angolo *EFD*. Ma l'angolo *EFD* è uguale all'angolo *BCA*; perciò nel triangolo *AHC* l'angolo esterno *BHA* sarebbe uguale a quello interno ed opposto *BCA* (noz. com. I): il che è impossibile (I, 16). Quindi *BC* non è disuguale rispetto ad *EF*, e dunque è uguale. Ma anche *AB*, *DE* sono uguali fra loro. I due lati *AB*, *BC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, per cui la base *AC* è uguale alla base *DF*, il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *DEF*, e l'angolo rimanente *BAC* del primo è uguale all'angolo rimanente *EDF* del secondo (I, 4).

Dunque, se due triangoli hanno due angoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 3, 4, 16.

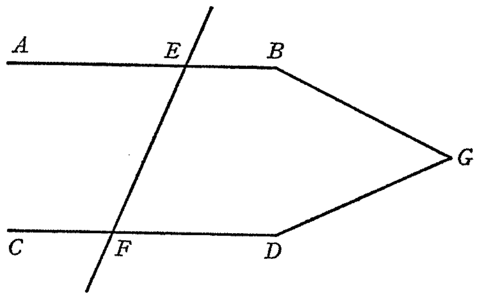
È APPLICATA IN: I, 34; III, 3; IV, 4, 12, 13; XI, 4, 35, 38; XII, 7; XIII, 10.

PROPOSIZIONE 27.

Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, le due rette saranno fra loro parallele[23].

Infatti, la retta EF, cadendo sulle due rette AB, CD, formi gli angoli alterni AEF, EFD uguali fra loro; dico che AB è parallela a CD.

Se difatti non lo fosse, le rette AB, CD, prolungate, si incontrerebbero dalla parte di B, D, o da quella di A, C. Si prolunghino e vengano ad incontrarsi dalla parte di B, D nel punto G. Dunque, nel triangolo GEF l'angolo esterno AEF è in tal caso uguale all'angolo interno ed opposto EFG: il che è impossibile (I, 16); quindi AB, CD, prolungate, non potranno incontrarsi dalla parte di B, D. Similmente si potrà dimostrare che non verranno ad incontrarsi neppure dalla parte di A, C; ma rette che non si incontrano da nessuna delle due parti sono parallele (def. XXIII), per cui AB è parallela a CD.



Dunque, se una retta che venga a cadere... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 16.

È APPLICATA IN: I, 28, 30, 31, 33.

[23] Questa proposizione, insieme alla seguente I, 28, che si riferisce (anziché agli angoli alterni) agli angoli corrispondenti ed agli angoli coniugati interni, costituisce il cosiddetto *teorema diretto sulle parallele*, il quale, da determinate relazioni tra certe coppie di angoli formati da due rette quando son tagliate da una trasversale, deduce il parallelismo delle due rette stesse. Se ci si riferisce agli angoli corrispondenti, allora la I, 27-28 viene a costituire la contronominale della I, 16, cioè del teorema dell'angolo esterno maggiore. Infatti in quest'ultima proposizione l'ipotesi è che due rette s'incontrino, cioè che non siano parallele, e la tesi è che (a prescindere dal senso della disuguaglianza) gli angoli corrispondenti sono disuguali.
Quindi la I, 27-28 assume come ipotesi la negazione della tesi della I, 16 ed assume come tesi la negazione dell'ipotesi di quella. Le due proposizioni sono quindi contronominali, e pertanto logicamente equivalenti.

PROPOSIZIONE 28.

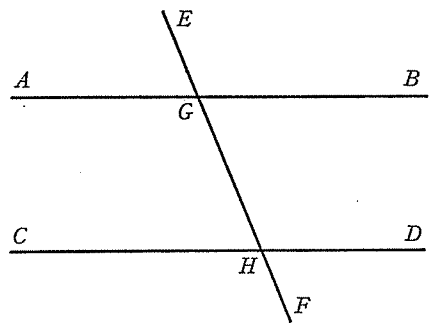
Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

Infatti, la retta EF venendo a cadere sulle due rette AB, CD formi l'angolo esterno EGB uguale all'angolo interno ed opposto GHD, oppure gli angoli interni BGH, GHD, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti; dico che AB è parallela a CD.

Poiché l'angolo EGB è difatti uguale all'angolo GHD, ma l'angolo EGB è uguale a quello AGH (I, 15), pure gli angoli AGH, GHD sono uguali (noz. com. I); ed essi sono angoli alterni: quindi AB è parallela a CD (I, 27).

Di nuovo, supponiamo che la somma degli angoli BGH, GHD sia uguale a due retti: poiché[a] anche la somma degli angoli AGH, BGH è uguale a due retti (I, 13), la somma di AGH, BGH è uguale a quella di BGH, GHD (noz. com. I); si sottragga da ambedue le somme l'angolo BGH; l'angolo AGH che rimane della prima è perciò uguale all'altro angolo rimanente GHD (noz. com. III); ed essi sono angoli alterni: quindi AB è parallela a CD (I, 27).

Dunque, se una retta che cada su due rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 13, 15, 27.

È APPLICATA IN: IV, 7; VI, 4; XI, 6, 18.

a. Letteralmente: di nuovo, poiché gli angoli BGH, GHD sono uguali a due retti, ma anche gli angoli...

PROPOSIZIONE 29.

Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti [24].

Infatti, la retta *EF* venga a cadere sulle rette parallele *AB*, *CD*; dico che essa forma gli angoli alterni *AGH*, *GHD* uguali, l'angolo esterno *EGB* uguale all'angolo interno ed opposto *GHD*, e gli angoli interni *BGH*, *GHD*, dalla stessa parte, la cui somma è uguale a due retti.

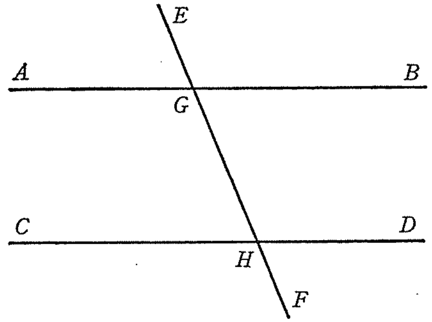
Se l'angolo *AGH* fosse difatti disuguale rispetto all'angolo *GHD*, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore l'angolo *AGH*; si aggiunga in comune l'angolo *BGH*; la somma degli angoli *AGH*, *BGH* è quindi maggiore della somma degli angoli *BGH*, *GHD* (noz. com. IV). Ma la somma di *AGH*, *BGH* è uguale a due retti (I, 13). La somma di *BGH*, *GHD* è perciò minore di due retti. Ma rette che vengano prolungate illimitatamente a partire da angoli la cui somma sia minore di due retti, si incontrano (post. V); quindi *AB*, *CD*, prolungate illimitatamente, si incontreranno; ma non si incontrano invece, poiché per ipotesi sono parallele; l'angolo *AGH* non è perciò disuguale rispetto all'angolo *GHD*, e dunque è uguale. Ma l'angolo *AGH* è uguale all'angolo *EGB* (I, 15); quindi sono uguali pure gli angoli *EGB*, *GHD* (noz. com. I). Si aggiunga in

[24] È, questo, il cosiddetto *teorema inverso* delle parallele (inverso della prop. 27-28. Qui dall'ipotesi del parallelismo si deducono le note relazioni angolari. In verità il teorema non viene *dimostrato*, ma viene introdotto come postulato. Si tratta per l'appunto del famoso postulato quinto, contronominale di questa prop. 29. Sicché la *dimostrazione* della prop. 29 si riduce a questo: se le rette sono parallele gli angoli coniugati interni sono supplementari: infatti, se non lo fossero, da una delle due parti la somma di detti angoli sarebbe minore di due retti, e quindi, per il quinto postulato, le due rette s'incontrerebbero, contro l'ipotesi del loro parallelismo.

È con questa prop. 29 che ha inizio la geometria euclidea vera e propria, cioè la geometria che si fonda sul quinto postulato, o postulato di Euclide propriamente detto.

comune [ad essi] l'angolo *BGH*; la somma di *EGB*, *BGH* risulta allora uguale alla somma di *BGH*, *GHD*. E poiché la somma degli angoli *EGB*, *BGH* è uguale a due retti (I, 13), anche la somma degli angoli *BGH*, *GHD* è uguale a due retti (noz. com. I).

Dunque, una retta che cada su rette parallele... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 13, 15 e il post. V.

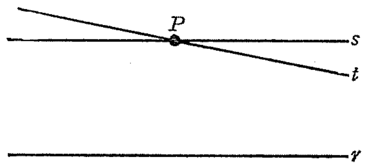
È APPLICATA IN: I, 30, 32, 33, 34, 35, 44, 45, 46; II, 4, 9, 10; VI, 3, 24, 25, 32; XI, 8, 15, 38; XII, 3, 4.

PROPOSIZIONE 30.

Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche fra loro [25].

Ciascuna delle due rette *AB*, *CD* sia parallela ad *EF*; dico che anche *AB*, *CD* sono parallele.

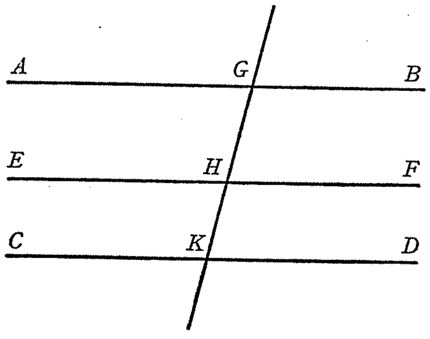
[25] La proprietà transitiva del parallelismo, di cui tratta questa proposizione 30, viene dimostrata per mezzo della proposizione immediatamente precedente I, 29, ossia per mezzo del postulato quinto. Anzi la suddetta proprietà transitiva può ritenersi equivalente a detto postulato.



Da essa si ricava l'unicità della parallela ad una retta *r* condotta per un punto *P* esterno ad essa. Infatti se per il punto *P* passassero due rette *s*, *t* ambedue parallele ad *r*, tali due rette, essendo parallele alla stessa, sarebbero (appunto per la I, 30) parallele tra loro: ciò che è assurdo, dato che le due rette si incontrano nel punto *P*. Del resto, l'unicità della parallela alla retta *r* per un punto *P* ad essa esterno segue anche dalla considerazione che una seconda parallela *t* si andrebbe avvicinando sempre di più ad *r*, ma senza raggiungerla, comunque prolungata: le rette *t*, *r* sarebbero cioè *asintòtiche*. E l'enunciato euclideo del postulato quinto equivale appunto alla negazione della possibilità di esistenza di rette asintotiche.

Infatti, venga a cadere su esse la retta GK.

Ora, poiché la retta GK cade sulle rette parallele AB, EF, l'angolo AGK è uguale all'angolo GHF (I, 29). Di nuovo, poiché la retta GK cade sulle rette parallele EF, CD, l'angolo GHF è uguale all'angolo GKD (id.). Ma fu dimostrato che pure l'angolo AGK è uguale all'angolo GHF; sono quindi uguali anche gli angoli AGK, GKD (noz. com. I), e sono angoli alterni. Perciò AB è parallela a CD (I, 27).



Dunque, rette parallele ad una stessa retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 27, 29, implicitamente il post. V.

È APPLICATA IN: I, 45, 47; II, 4, 5, 6, 7, 8; IV, 7, 8; VI, 26; XII, 17.

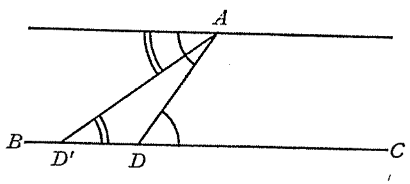
PROPOSIZIONE 31.

Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data[26].

Siano A il punto dato, e BC la retta data; si deve dunque condurre per il punto A una linea retta parallela alla retta BC.

Si prenda su BC un punto a piacere D, si tracci la congiungente AD, sulla retta DA e con vertice nel suo punto A

[26] Questa costruzione contiene un elemento arbitrario: la scelta del punto D. Ma la costruzione stessa è univoca, cioè indipendente dalla



scelta di D, per il fatto che, in base alla precedente proposizione I, 30, si è già stabilita l'unicità della parallela alla BC per il punto A.

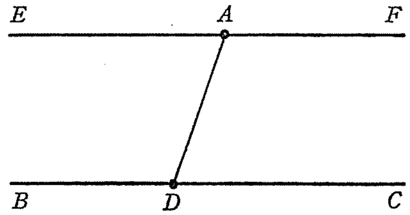
si costruisca l'angolo DAE uguale all'angolo ADC (I, 23), e si prolunghi EA mediante la retta AF[a].

E poiché la retta AD, cadendo sulle due rette BC, EF, è venuta a formare gli angoli alterni EAD, ADC uguali fra loro, EAF è parallela a BC (I, 27).

Dunque, per il punto dato A è stata condotta la linea retta EAF parallela alla retta data BC. – C.D.F.

APPLICA: I, 23, 27: l'unicità risulta dalla I, 30.

È APPLICATA IN: I, 32, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 46, 47; II, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; IV, 8; VI, 3, 9, 10, 11, 12, 26; X, 60, 91, 97; XI, 11, 12.



PROPOSIZIONE 32.

In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti[27].

Sia ABC un triangolo, ed un suo lato BC sia prolungato oltre C sino a D; dico che l'angolo esterno ACD è uguale

a. Letteralmente, al solito: « e si prolunghi la retta AF per diritto a quella EA ».

[27] L'Enriques (*op. cit.*, vol. I, p. 108) scrive, commentando questa proposizione: « Si osservi che essa esprime uno dei due teoremi veramente significativi del libro primo (l'altro è la prop. 47, cioè il teorema di Pitagora), ed anzi i due teoremi di cui si parla sembrano costituire i due fuochi rispetto a cui viene ordinata la trattazione euclidea ».

È stato già osservato che il doppio risultato di questa proposizione (cioè il teorema dell'angolo esterno somma dei due angoli interni non adiacenti, e l'immediata conseguenza che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti) contiene come casi particolari la I, 16 (teorema dell'angolo esterno maggiore) e la I, 17 (somma di *due* angoli di un triangolo minore di due retti). Ma mentre la I, 16 e la I, 17 non richiedono l'uso del quinto postulato, la I, 32 richiede invece detto uso.

È notevole il fatto che si sia cercato di raggiungere il risultato della I, 32 (o almeno di avvicinarsi ad esso quanto possibile) senza far ricorso alla somma dei due angoli interni ed opposti CAB, ABC, e che la somma dei tre angoli interni del triangolo, ABC, BCA, CAB, è uguale a due retti.

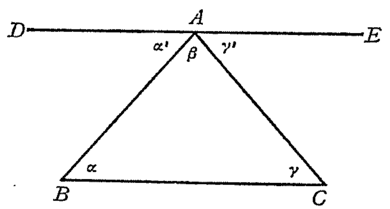
Infatti, per il punto C si conduca la parallela CE alla retta AB (I, 31).

E poiché AB è parallela a CE, e su esse cade AC, gli angoli alterni BAC, ACE sono uguali fra loro (I, 29). Di nuovo, poiché AB è parallela a CE, e su esse cade la retta BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'angolo interno ed opposto ABC (I, 29). Ma fu dimostrato che pure gli angoli ACE, BAC sono uguali; quindi tutto quanto l'angolo ACD

al quinto postulato, sicché può dirsi che la I, 16 e la I, 17 costituiscano in certo senso il *trampolino di lancio* della geometria non euclidea. Così A. M. Legendre (1752-1833), reiterando indefinitamente il procedimento costruttivo della I, 16, ed applicando poi la proposizione prima del libro decimo degli *Elementi* (la quale ultima è sostanzialmente equivalente al cosiddetto postulato di Archimede: libro V, def. IV), e usando infine la I, 17, riesce a dimostrare che in ogni triangolo la somma di tutt'e tre gli angoli non può superare i due retti. Ciò, come si vede, nell'atmosfera stessa degli *Elementi* di Euclide, *respirata* qui da Legendre a pieni polmoni, e prescindendo, naturalmente, dal postulato quinto.

Sempre nello stesso ordine di idee, Legendre riesce pure a dimostrare che se esistesse *un solo* triangolo nel quale la somma dei tre angoli fosse uguale a due retti, lo stesso fatto si verificherebbe per *qualunque* triangolo.

Prima di Legendre, Gerolamo Saccheri, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), tenta di dimostrare il quinto postulato, cercando contraddizioni logiche in una geometria fondata sulle prime ventotto proposizioni di Euclide e sulla negazione del quinto postulato. Che egli abbia erroneamente creduto di aver trovato tali contraddizioni e quindi di aver dimostrato detto postulato è cosa di poco conto: l'essenziale è la sua idea-base, che è poi quella stessa che condurrà più tardi alle geometrie non euclidee.



Va infine avvertito, a proposito sempre della I, 32, che Proclo, nel suo *Commento* già più volte citato, informa che secondo Eudemo l'*invenzione* del teorema risale ai Pitagorici, e che questi l'avrebbero dimostrato conducendo per il vertice A del triangolo la parallela DE al lato BC, e osservando poi che la somma $\alpha' + \beta + \gamma'$ è uguale a due retti, ed è anche uguale alla somma dei tre angoli del triangolo ABC, data l'uguaglianza degli angoli alterni interni α, α' e $\gamma\gamma'$.

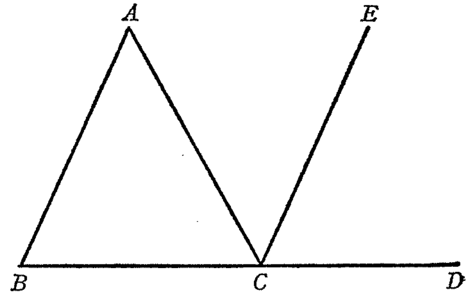
è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti BAC, ABC (noz. com. II).

Si aggiunga in comune l'angolo ACB [all'angolo ACD e alla somma degli altri due]; la somma degli angoli ACD, ACB è perciò uguale alla somma dei tre angoli ABC, BCA, CAB (noz. com. II). Ma la somma degli angoli ACD, ACB è uguale a due retti (I, 13); quindi anche la somma degli angoli ACB, CBA, CAB è uguale a due retti (noz. com. I).

Dunque, in ogni triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13, 29, 31.

È APPLICATA IN: II, 9, 10; III, 20, 22, 31, 32; IV, 2, 3, 10, 15; VI, 5, 6, 7, 8, 18, 20, 24, 32; XI, 21; XIII, 8, 9, 10, 11, 18 lemma.



PROPOSIZIONE 33.

Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele[a] *sono anch'esse uguali e parallele*[28].

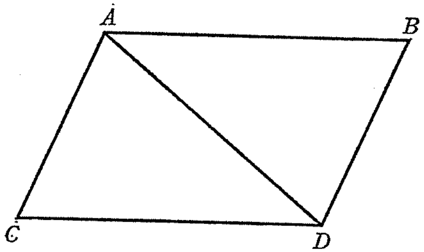
Siano AB, CD rette uguali e parallele, e le rette AC, BD le congiungano dalla stessa parte; dico che anche AC, BD sono uguali e parallele.

a. Vale a dire, rette che congiungano gli estremi di rette uguali e parallele che siano dalla stessa parte, o nella stessa direzione. Ad esempio, subito dopo, AC, BD fanno da congiungenti in quanto siano rispettivamente congiunti A, C e B, D, non invece B, C ed A, D che non sono dalla stessa parte o nella stessa direzione, in quanto estremi, i primi, delle rette BA, DC ed AB, CD, e non delle rette AB, DC e BA, CD.

[28] Euclide non ha dato, tra le definizioni, quella di parallelogrammo. Questa prop. 33 offre, in sostanza, un modo per costruire un parallelogrammo quando ne sia già data una coppia di lati opposti uguali e

Si tracci la congiungente BC. Ora, poiché AB è parallela a CD, e su esse cade BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali fra loro (I, 29). E poiché AB è uguale a CD e BC è comune, i due lati AB, BC sono uguali ai due lati BC, CD[a]; e l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD; la base AC è perciò uguale alla base BD, il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); quindi l'angolo ACB è uguale all'angolo CBD. Ma poiché la retta BC, venendo a cadere sulle due rette AC, BD, forma gli angoli alterni uguali fra loro, AC è parallela a BD (I, 27). E fu dimostrato che è pure ad essa uguale.

Dunque, rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 4, 27, 29.

È APPLICATA IN: I, 36, 45; XI, 10, 38; XII, 17; XIII, 16.

a. « ... BC, CD », e più tardi « (l'angolo) BCD »; noi diremmo piuttosto DC, CB e DCB, per porre in ordine corrispondente lettere che denotano punti corrispondenti in figure congruenti; Euclide preferisce in genere l'ordine alfabetico, quando poi magari non si distragga, ed è il motivo per cui, se proprio non ne resti danneggiata la migliore comprensione, conserviamo per adesso

paralleli: al tempo stesso ci dà uno dei criteri per riconoscere se un quadrilatero sia un parallelogrammo.

Nella dimostrazione viene utilizzato il primo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 4), che viene enunciato in modo completo, anche per la parte non strettamente necessaria in relazione al teorema da dimostrare (cioè anche per la parte riguardante l'uguaglianza dei due triangoli). Ma un uso ancora più caratteristico della I, 4 si ha nella proposizione seguente I, 34.

Vengono poi utilizzati i due teoremi sulle rette parallele: sia quello *diretto* (I, 27), sia quello inverso (I, 29) implicante il quinto postulato.

PROPOSIZIONE 34.

I parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali [a] [29].

Sia $ACDB$ un parallelogrammo, e BC sia una sua diagonale; dico che i lati e gli angoli opposti del parallelo-

tale disposizione letterale. Da notare che fino ad ora il greco ha sempre detto, di due lati uguali ad altri due, che essi lo erano rispettivamente (ἑκατέρα, cioè γωνία, angolo, ἑκατέρᾳ, ciascuno dei due a ciascuno dei due); qui dice soltanto due lati uguali a due lati: manterremo anche noi l'assenza del rispettivamente, quando si verifichi e non ne vada della comprensione.

a. Letteralmente: « Negli spazi parallelogrammi (o: Nelle aree parallelogramme) i lati e gli angoli opposti sono uguali fra loro, ed il diametro (cioè la linea diametrale, la retta diametrale) li (o: le) divide per metà (oppure, in due parti uguali) »; infatti, in greco la parola χωρίον (παραλληλόγραμμον χωρίον) è un qualunque « spazio », o « posto », o « area », ma in geometria è usualmente restrinto alle aree rettangolari o parallelogramme, quanto poi a ἡ διάμετρος, il diametro, noi preferiamo diagonale, l'uso greco invece preferisce diametro: Euclide usa « diagonale », διαγώνιος, una sola volta negli *Elementi*, in XI, 28. Cfr. su questo anche nota 29 seguente.

[29] Viene in questa proposizione introdotto il termine « parallelogrammo », termine che, come si ricava dal contesto, significa « quadrilatero avente i lati opposti paralleli ». La diagonale, che viene tracciata, viene chiamata διάμετρος (diametro), secondo l'uso che troviamo anche in Platone, il quale, nel celebre passo del *Menone* sul raddoppiamento del quadrato (85 *b*) spiega che i *sapienti* (σοφισταί) chiamano diametro (διάμετρον) la linea retta congiungente due vertici opposti del quadrato.

La dimostrazione di questa proposizione I, 34 si fonda sul teorema inverso delle parallele (I, 29) e quindi sul quinto postulato.

Viene usato il nostro secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 26) poiché i due triangoli nei quali la diagonale divide il parallelogrammo hanno un lato e due angoli uguali: il lato è quello comune, cioè la diagonale, mentre gli angoli uguali a due a due sono alterni interni formati da rette parallele. Ma dalla I, 26 Euclide (conformemente all'enunciato della I, 26 stessa) ricava soltanto l'uguaglianza rispettiva dei restanti lati ed angoli. Per dimostrare invece che la diagonale divide il parallelogrammo in due parti (triangoli) uguali, Euclide torna, per dir così, indietro nel processo dimostrativo, e considera di nuovo i due stessi triangoli prima considerati, ma applicando ad essi, questa volta, il primo criterio (I, 4). Questo procedimento, che appare strano a prima vista, conferma l'impresgrammo $ACDB$ sono uguali fra loro, e che la diagonale BC lo divide in due parti uguali.

Infatti, poiché AB è parallela a CD, e su esse cade la retta BC, gli angoli alterni ABC, BCD sono uguali fra loro (I, 29). Di nuovo, poiché AC è parallela a BD, e BC cade su esse, gli angoli alterni ACB, CBD sono uguali fra loro (id.). Dunque, ABC, BCD sono due triangoli che hanno i due angoli ABC, BCA uguali rispettivamente ai due angoli BCD, CBD, ed un lato uguale a un lato, ossia quello adiacente agli angoli uguali e che è loro comune, cioè BC: avranno quindi uguali rispettivamente anche i lati rimanenti ai lati rimanenti e l'angolo rimanente all'angolo rimanente (I, 26), per cui il lato AB è uguale al lato CD, il lato AC è uguale al lato BD, ed infine l'angolo BAC è uguale all'angolo CDB. Ora, poiché l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD, e l'angolo CBD all'angolo ACB, tutto quanto l'angolo ABD è uguale a tutto quanto l'angolo ACD (noz. com. II). E fu dimostrato che pure gli angoli BAC, CDB sono uguali.

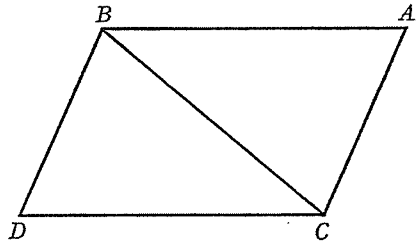
Dunque, i parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro.

Dico adesso che la diagonale divide il parallelogrammo in due parti uguali. Infatti, poiché AB è uguale a CD, e BC è comune, i due lati AB, BC sono uguali rispettivamente ai due lati CD, BC; e l'angolo ABC è uguale all'angolo BCD (I, 29). Quindi anche la base AC è uguale alla base DB, ed il triangolo ABC è uguale al triangolo BCD (I, 4)[a].

a. Letteralmente sarebbe: «... alla base DB. Anche il triangolo ABC è perciò..., ecc.».

sione che Euclide considerasse il primo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 4) come una specie di postulato, per la giustificazione del quale aveva introdotto, in linea eccezionale, il movimento ingenuamente inteso, in senso extra-geometrico. La *coincidenza* che è conseguenza del movimento, e che quindi, in base alla nozione comune VII, conduce all'uguaglianza, è considerata nel primo (I, 4) e non nel secondo (I, 26) criterio: è pertanto al primo che Euclide ricorre, nonostante la già avvenuta applicazione del secondo.

Dunque, la diagonale BC divide il parallelogrammo $ABCD$ in due parti uguali. – C.D.D.



APPLICA: I, 4, 26, 29.

È APPLICATA IN: I, 35, 37, 38, 41, 43, 45, 46; II, 1, 4, 7, 8, 9, 10; IV, 7, 8; VI, 4, 10; X, 52 lemma; XI, 24, 28, 29, 39; XII, 2, 7, 9.

PROPOSIZIONE 35.

Parallelogrammi[a] *che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali*[b] *fra loro*[30].

Siano $ABCD$, $EBCF$ parallelogrammi posti sulla stessa base BC e fra le stesse parallele AF, BC; dico che il parallelogrammo $ABCD$ è uguale al parallelogrammo $EBCF$.

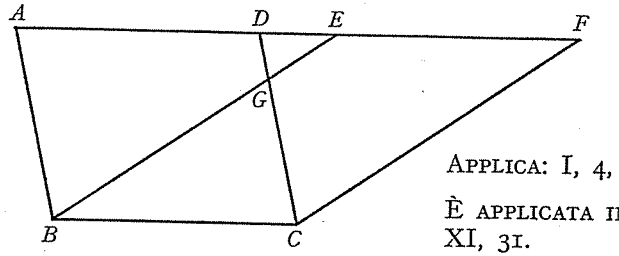
Infatti, poiché $ABCD$ è un parallelogrammo, AD è uguale a BC (I, 34). Per la stessa ragione, pure EF è uguale a BC (id.); cosicché sono uguali anche i lati AD, EF (noz. com. I). Aggiungiamo ad ambedue DE[c]: tutta quanta la retta AE è perciò uguale a tutta quanta la retta DF (noz. com. II). Ma anche AB, DC sono uguali (I, 34); i due lati EA, AB sono così uguali rispettivamente ai due lati FD, DC; e l'angolo FDC è uguale all'angolo EAB, cioè l'angolo esterno a quello interno [ed opposto] (I, 29), per cui la base EB

a. Al posto della più lunga espressione «area parallelogramma» si adopera qui solo l'espressione «parallelogrammo» (τὸ παραλληλόγραμμον).
b. Uguali = equivalenti.
c. Letteralmente: ... sono uguali anche AD, EF; e DE è comune...

[30] Scrive l'Enriques, a proposito di questa proposizione e della seguente (*op. cit.*, vol. I, p. 115, libro primo, per cura di Federigo Enriques e di Maria Teresa Zapelloni): «Nelle proposizioni 35 e 36 per la prima volta Euclide considera un'uguaglianza di superficie (equivalenza) che non s'accompagna ad un'uguaglianza di forma».

è uguale alla base *FC*, ed il triangolo *EAB* sarà uguale al triangolo *DFC* (I, 4); si sottragga da ambedue[a] il triangolo *DGE*; il trapezio *ABGD* che rimane del primo è perciò uguale al trapezio rimanente *EGCF* del secondo (noz. com. III); si aggiunga in comune [ai due trapezi] il triangolo *GBC*: tutto quanto il parallelogrammo *ABCD* è quindi uguale a tutto quanto il parallelogrammo *EBCF*.

Dunque, parallelogrammi che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 4, 29, 34.

È APPLICATA IN: I, 36, 37; XI, 31.

PROPOSIZIONE 36.

Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Siano *ABCD*, *EFGH* parallelogrammi posti sulle basi uguali *BC*, *FG* e fra le stesse parallele *AH*, *BG*; dico che il parallelogrammo *ABCD* è uguale al parallelogrammo *EFGH*.

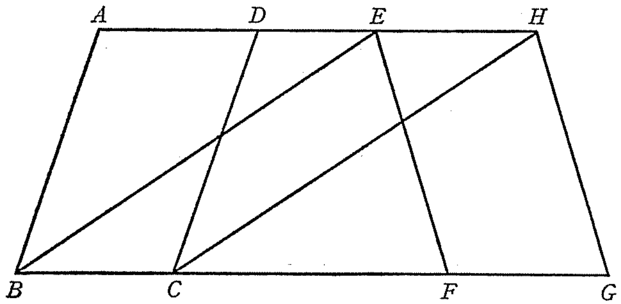
Infatti, si traccino le congiungenti *BE*, *CH*. Ora, poiché *BC* è uguale a *FG*, ma *FG* è uguale ad *EH*, anche *BC*, *EH* sono rette uguali (noz. com. I). Ma sono pure parallele, ed *EB*, *HC* le vengono a congiungere; ma rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono uguali e parallele (I, 33), per cui *EBCH* è un parallelogrammo[b]. Ed esso è uguale al parallelogrammo *ABCD*: ha come base difatti la stessa base *BC*, ed è posto fra le stesse parallele *BC*, *AH*

a. Al solito, letteralmente, *in comune* [dai due triangoli].

b. Abbiamo modificato un po' la punteggiatura; nel testo, dopo «sono anche rette parallele» vi è un punto, come vi è punto prima di «Quindi *EBCH* è un parallelogrammo».

(I, 35). Per la stessa ragione, pure *EFGH* è uguale al medesimo parallelogrammo *EBCH* (id.); cosicché anche i parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* sono uguali (noz. com. I).

Dunque, parallelogrammi che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 33, 35.

È APPLICATA IN: I, 38; II, 5, 8; VI, 28, 29; XI, 25, 29.

PROPOSIZIONE 37.

Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

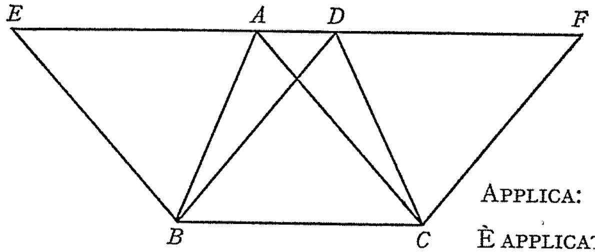
Siano *ABC*, *DBC* triangoli posti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *AD*, *BC*; dico che il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *DBC*.

Si prolunghi da ambedue le parti la retta *AD* oltre *A*, *D* sino ad *E*, *F*, per *B* si conduca *BE* parallela a *CA*, e per *C* si conduca *CF* parallela a *BD* (I, 31). Quindi i due quadrilateri[a] *EBCA*, *DBCF* sono parallelogrammi, e sono uguali fra loro: sono posti infatti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *BC*, *EF* (I, 35). Ma il triangolo *ABC* è metà del parallelogrammo *EBCA* – difatti la diagonale *AB* divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34) –, ed il trian-

a. Letteralmente, sarebbe piuttosto *ciascuna delle due figure* e si ha: «Quindi ciascuna delle due figure *EBCA*, *DBCF* è un parallelogrammo, e sono uguali – sono infatti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *BC*, *EF* –, il triangolo *ABC* è..., ecc.».

golo DBC è metà del parallelogrammo $DBCF$ – difatti la diagonale DC divide il parallelogrammo in due parti uguali (id.). [Ma metà di cose uguali sono uguali fra loro][a]. Il triangolo ABC è perciò uguale al triangolo DBC.

Dunque, triangoli che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato)[b]. – C.D.D.



APPLICA: I, 31, 34, 35.

È APPLICATA IN: I, 39, 41.

a. È la nozione comune VI, da espungere; per questo, cfr. alle nozioni comuni.

b. A questo punto ci piace ricordare, per chi volesse seguire la fortuna di Euclide pure nelle cosiddette epoche di decadenza (ma in realtà il mondo latino raggiunse, proprio negli ultimi secoli dell'Impero d'Occidente, un alto livello scientifico), che parte di questa dimostrazione, così come l'inizio di quella della prop. 38, si trovano insieme alla fine della dimostrazione di II, 8 ed a parte dell'enunciato di II, 9 in due frammenti di un codice matematico dell'inizio del IX sec. (ma la loro stesura è senz'altro anteriore) della Bibliot. Univers. di Monaco, sebbene con gravi errori di latino e di matematica e nell'ediz. teonina, come ovvio; su essi è da vedersi l'articolo, che li legge e valuta storicamente, di M. Geymonat nella *Scriptorium International Review of Manuscript Studies*, Bruxelles, XXI, 1, 1967; dello stesso autore è da vedersi ugualmente: *Euclidis latine facti fragmenta Veronensia*, Istituto Cisalpino, Milano, 1964, con dimostrazioni presumibilmente boeziane conservateci dai frammenti medesimi (cioè, parti dei libri XI, XII, XIII). Ricordiamo infatti che il circolo di Boezio, e ad un suo collaboratore vanno forse attribuiti i frammenti di Monaco, ha lavorato alla preparazione di quella traduzione latina di Boezio dell'Euclide intero, ed almeno per gli ultimi libri anche di rielaborazione latina, eseguita intorno all'anno 500 e per noi andata perduta. La cosiddetta *Geometria boeziana*, o meglio l'*Ars geometrica* dello Pseudo-Boezio (cfr. ed. Friedlein) è solo un riassunto, una *summa* della geometria latina allora presente (VII-VIII sec.).

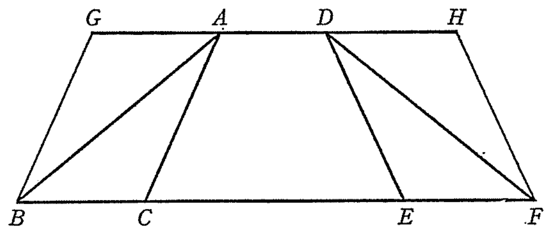
PROPOSIZIONE 38.

Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Siano ABC, DEF triangoli posti sulle basi uguali BC, EF e fra le stesse parallele BF, AD; dico che il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF.

Infatti, si prolunghi la retta AD da ambedue le parti oltre A, D sino a G, H, per B si conduca BG parallela a CA, e per E si conduca FH parallela a DE (I, 31). Quindi i due quadrilateri $GBCA$, $DEFH$ sono parallelogrammi, e $GBCA$ è uguale a $DEFH$: sono difatti posti sulle basi uguali BC, EF e fra le stesse parallele BF, GH (I, 36). Ma il triangolo ABC è metà del parallelogrammo $GBCA$ – la diagonale AB difatti divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34) –, mentre il triangolo FED è metà del parallelogrammo $DEFH$ – difatti la diagonale DF divide il parallogrammo in due parti uguali (id.). [Ma metà di cose uguali sono uguali fra loro][a]. Il triangolo ABC è perciò uguale al triangolo DEF.

Dunque, triangoli che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 31, 34, 36.

È APPLICATA IN: I, 40, 42; VI, 1, 2.

a. La solita nozione comune VI, non di Euclide.

PROPOSIZIONE 39.

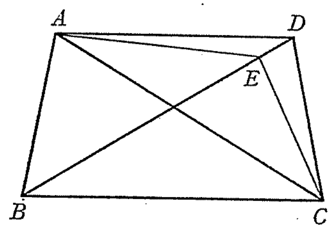
Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele.

Siano ABC, DBC triangoli uguali, posti sulla stessa base BC e dalla stessa parte rispetto ad essa; dico che sono anche compresi fra le stesse parallele [a].

Infatti, si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BC.

Se difatti non lo fosse, si conduca per il punto A la parallela AE alla retta BC (I, 31), e si tracci la congiungente EC. Quindi, in tal caso, il triangolo ABC è uguale al triangolo EBC – è posto difatti sulla stessa base BC e fra le stesse parallele (I, 37). Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC, per cui anche DBC sarebbe uguale ad EBC (noz. com. I), il triangolo maggiore al minore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Perciò AE non è parallela a BC. Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto AD; quindi AD è parallela a BC.

Dunque, triangoli uguali che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 31, 37.

È APPLICATA IN: VI, 2.

a. Come Heiberg ha provato (*Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 50), le parole « dico che sono anche compresi fra le stesse parallele » sono una interpolazione: vale a dire, il testo autentico diceva: « ... dalla stessa parte rispetto ad essa, e si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BC ». Insomma, « e si tracci la congiungente AD » faceva parte dell'*esposizione*, ma prendendo invece le parole come appartenenti alla *costruzione*, si premise un « dico che sono anche compresi fra le stesse parallele », e si alterò *e* in *infatti*, pensando che una « definizione » della cosa da essere dimostrata dovesse in ogni caso precedere.

PROPOSIZIONE 40 [a].

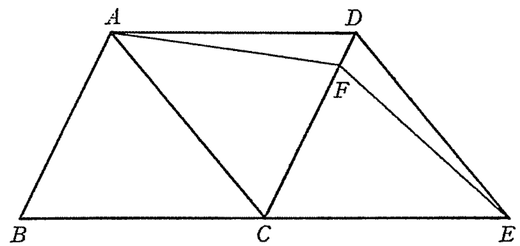
Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele.

Siano ABC, CDE triangoli uguali, posti sulle basi uguali BC, CE e dalla stessa parte. Dico che essi sono anche compresi fra le stesse parallele.

Infatti, si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BE.

Se difatti non lo fosse, si conduca per A la parallela AF a BE (I, 31), e si tracci la congiungente FE. Quindi, in tal caso, il triangolo ABC è uguale al triangolo FCE – sono posti difatti sulle basi uguali BC, CE, e fra le stesse parallele BE, AF (I, 38). Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE, per cui anche il triangolo DCE sarebbe uguale al triangolo FCE (noz. com. I), il maggiore al minore: il che è impossibile (noz. com. VIII); AF non è perciò parallela a BE. Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto AD; quindi AD è parallela a BE.

Dunque, triangoli uguali che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 31, 38.

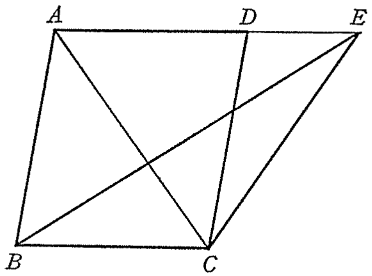
a. L'intera proposizione, secondo dimostrazione di Heiberg, fu interpolata per stabilire una proposizione che seguisse alla I, 39 e ad essa si riferisse, così come I, 38 si riferisce a I, 37 e I, 36 si rapporta a I, 35.

PROPOSIZIONE 41.

Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

Infatti, il parallelogrammo $ABCD$ abbia la stessa base BC e sia compreso fra le stesse parallele BC, AE da cui è compreso il triangolo EBC[a]; dico che il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio del triangolo BEC.

Si tracci difatti la congiungente AC. Il triangolo ABC è così uguale al triangolo EBC – è posto difatti sulla stessa base BC e fra le stesse parallele BC, AE (I, 37). Ma il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio del triangolo ABC – difatti la diagonale AC divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34); cosicché il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio pure del triangolo EBC.



Dunque, se un parallelogrammo ha la stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 34, 37.

È APPLICATA IN: I, 42, 47; VI, 1; XII, 3.

PROPOSIZIONE 42.

Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato[b].

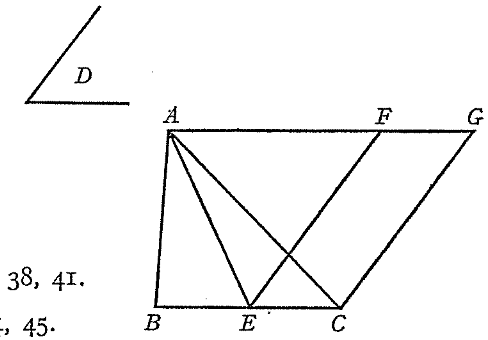
Sia ABC il triangolo dato, e D sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire nell'angolo rettilineo D un parallelogrammo uguale al triangolo ABC.

a. Letteralmente: « e sia nelle, o fra le stesse parallele BC, AE del triangolo EBD »; così come nell'enunciato diceva « fra le stesse parallele di un triangolo ».

b. Un parallelogrammo, cioè, avente uno dei propri angoli uguale ad un angolo rettilineo dato (e difatti, allora, si può pensare il parallelogrammo come *posto* in quell'angolo, poiché provvisto di un angolo che potrebbe coincidere con l'angolo rettilineo dato).

Si divida BC per metà in E (I, 10), si tracci la congiungente AE, e si costruisca sulla retta EC, con vertice nel punto E di essa, l'angolo CEF uguale all'angolo D (I, 23), per A si conduca AG parallela ad EC (I, 31), e per C si conduca CG parallela ad EF (id.); quindi $FECG$ è un parallelogrammo. E poiché BE è uguale ad EC, anche il triangolo ABE è uguale al triangolo AEC – sono posti difatti sulle basi uguali BE, EC e fra le stesse parallele BC, AG (I, 38) –, per cui il triangolo ABC è il doppio del triangolo AEG. Ma pure il parallelogrammo $FECG$ è il doppio del triangolo AEC – difatti ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele (I, 41); quindi il parallelogrammo $FECG$ è uguale al triangolo ABC (noz. com. V). Ed esso ha l'angolo CEF uguale all'angolo dato D.

Dunque, è stato costruito nell'angolo CEF, che è uguale all'angolo D, un parallelogrammo $FECG$ uguale al triangolo dato ABC. – C.D.F.



APPLICA: I, 10, 23, 31, 38, 41.

È APPLICATA IN: I, 44, 45.

PROPOSIZIONE 43.

In ogni parallelogrammo i complementi[a] *dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro*[31].

Sia $ABCD$ un parallelogrammo, AC sia una sua diagonale, ed EH, FG siano parallelogrammi posti intorno ad AC,

a. I complementi (τὰ παραπληρώματα) dei parallelogrammi « intorno al diametro » (com'è in greco), cioè posti intorno alla diagonale, sono le figure che riempiono gli interstizi (παρά, *presso*, e πλήρης, *pieno*, appunto, ossia le figure che aggiunte, poste presso ai parallelogrammi intorno alla diagonale, completano il parallelogrammo originario). Euclide parlando di « cosiddetti complementi » fa intendere di rivolgersi ad un termine tecnico che non doveva essere d'uso nuovo; da notare che Proclo, a p. 418, 15, *op. cit.*, osserva che una formale definizione di *complemento* non era del resto a Euclide necessaria: posti due parallelogrammi intorno alla diagonale, le aree che rimangono al di sopra di ciascun lato della diagonale non possono che completare il parallelogrammo originario, e dunque il fatto stesso propone il nome; del resto ancora (pp. 417, 1 segg.), non è detto che i complementi debbano essere parallelogrammi, poiché, solo quando i due parallelogrammi intorno alla diagonale sono formati da linee rette condotte per un punto della diagonale parallelamente ai lati del parallelogrammo originario, vale l'argomento, altrimenti essi possono anche avere figura diversa. Ad ogni modo, e in ogni caso, è facile mostrare, come fa appunto Proclo, che i complementi sono sempre uguali.

[31] Un enunciato più completo di questa proposizione sarebbe il seguente: « Se per un punto di una diagonale di un parallelogrammo si conducono due rette parallele ai lati, dei quattro parallelogrammi nei quali il parallelogrammo dato risulta diviso, sono uguali (= equivalenti) i due non attraversati dalla diagonale ».

Questo teorema è comunemente noto sotto la denominazione di « teorema dello *gnomone* » (per il significato di quest'ultimo termine si veda la nota alle definizioni del libro secondo). La dimostrazione si fonda sulla nozione comune III (criterio di uguaglianza per sottrazione).

Questo teorema dello gnomone permette (come si vede dalla proposizione seguente I, 44) di risolvere il problema di trasformare un parallelogrammo dato in un altro uguale (= equivalente) avente un lato assegnato ed avente gli stessi angoli. E poiché nella I, 42 Euclide ha già inse-

mentre siano BK, KD i cosiddetti complementi; dico che il complemento BK è uguale al complemento KD.

Infatti, poiché $ABCD$ è un parallelogrammo, ed AC è una sua diagonale, il triangolo ABC è uguale al triangolo ACD (I, 34). Di nuovo, poiché EH è un parallelogrammo, ed AK è una sua diagonale, il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK (id.). E per la stessa ragione, pure il triangolo KFC è uguale al triangolo KGC (id.). Poiché dunque il triangolo AEK è uguale al triangolo AHK, ed il triangolo KFC al triangolo KGC, il triangolo AEK insieme col[a] triangolo KGC è uguale al triangolo AHK insieme col triangolo KFC (noz. com. II); ma anche tutto quanto il triangolo ABC è uguale a tutto quanto il triangolo ADC: il complemento BK che [così] rimane è quindi uguale al rimanente complemento KD (noz. com. III).

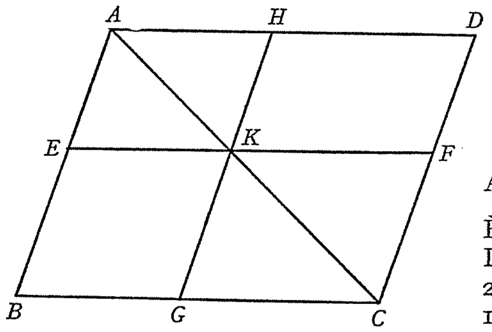
a. Letterale in greco.

gnato a trasformare un triangolo in un parallelogrammo avente angoli dati (« in un dato angolo »), a questo punto egli sa trasformare un triangolo in un parallelogrammo uguale (= equivalente) avente: 1) data base, 2) dati angoli. Egli risolve così quel problema che porta il nome di *applicazione parabolica delle aree*. Per detto problema, e per quelli di applicazione ellittica ed iperbolica, si veda la nota alla II, 5.

Come caso particolare, se gli angoli assegnati sono retti, la I, 42 insegna a trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente, mentre la I, 44 impone una condizione ulteriore: quella che il rettangolo abbia una base data. Le considerazioni ed i procedimenti costruttivi del libro secondo degli *Elementi* si riferiscono appunto esclusivamente al caso dell'angolo retto, e alla fine di detto libro secondo s'insegna a costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo dato (II, 14). Sicché il libro secondo appare come una specie di breve complemento del libro primo, nel senso che in esso si porta a termine la risoluzione del problema fondamentale consistente nella *quadratura* di un qualunque poligono, cioè nella costruzione di un quadrato ad esso equivalente.

Va osservato, a questo proposito, che la I, 45 (v.), mediante la scomposizione di un qualunque poligono in triangoli, generalizza la I, 42, e che per la *quadratura* del rettangolo viene applicato nel libro II il teorema di Pitagora, che viene appunto inserito alla fine del libro primo, sia come coronamento finale di detto libro (cfr. la nota alla I, 32) sia come strumento, nel modo or ora indicato, per la risoluzione del problema della quadratura di un poligono qualunque.

Dunque, in ogni parallelogrammo i complementi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.



APPLICA: I, 34.

È APPLICATA IN: I, 44; II, 4, 5, 6, 7, 8; VI, 27, 28, 29; X, 54, 91; XIII, 1, 2, 3, 4, 5.

PROPOSIZIONE 44.

Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato [32].

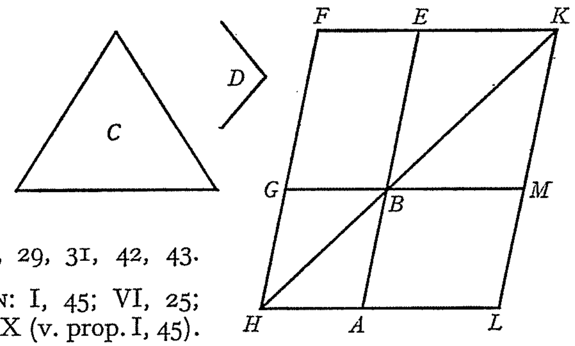
Siano AB la retta data, C il triangolo dato, e D l'angolo rettilineo dato; si deve dunque applicare alla retta data AB, in un angolo uguale all'angolo D, un parallelogrammo uguale al triangolo dato C.

Si costruisca nell'angolo EBG, che sia uguale all'angolo D, il parallelogrammo $BEFG$ uguale al triangolo C (I, 42), e lo si ponga in modo da essere BE in linea retta con AB, si prolunghi FG oltre G sino a H, per A si conduca AH parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette BG, EF (I, 31 e I, 30), e si tracci la congiungente HB. Ora, poiché la retta HF cade sulle parallele AH, EF, la somma degli angoli AHF, HFE è uguale a due retti (I, 29). La somma degli angoli BHG, GFE è perciò minore di due retti; ma rette che vengano prolungate illimitatamente, a partire da angoli minori di due retti, si incontrano (post. V), per cui HB, FE, se prolungate, si incontreranno. Si prolunghino esse e si incontrino in K, per il punto K si conduca KL parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette EA,

[32] Come s'è detto, per notizie riguardanti questo problema, che viene detto di *applicazione parabolica delle aree*, si veda la nota alla prop. II, 5.

FH (I, 31 e I, 30), e si prolunghino HA, GB oltre A, B rispettivamente[a] sino ai punti L, M. Quindi $HLKF$ è un parallelogrammo, HK è una sua diagonale, ed AG, ME sono parallelogrammi posti intorno a HK, mentre LB, BF sono i cosiddetti complementi; LB è perciò uguale a BF (I, 43). Ma BF è uguale al triangolo C; quindi anche LB è uguale a C (noz. com. I). E poiché l'angolo GBE è uguale all'angolo ABM (I, 15), ma l'angolo GBE è uguale all'angolo D, anche l'angolo ABM è uguale all'angolo D (noz. com. I).

Dunque, è stato applicato alla retta data AB nell'angolo ABM, che è uguale all'angolo D, il parallelogrammo LB uguale al triangolo dato C. – C.D.F.



APPLICA: I, 15, 29, 31, 42, 43.

È APPLICATA IN: I, 45; VI, 25; inoltre nel libro X (v. prop. I, 45).

PROPOSIZIONE 45.

Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea[b] *data in un dato angolo rettilineo* [33].

Sia $ABCD$ la figura rettilinea data, ed E sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire nell'angolo dato E un parallelogrammo uguale alla figura rettilinea $ABCD$.

a. *Rispettivamente* è aggiunta nostra.

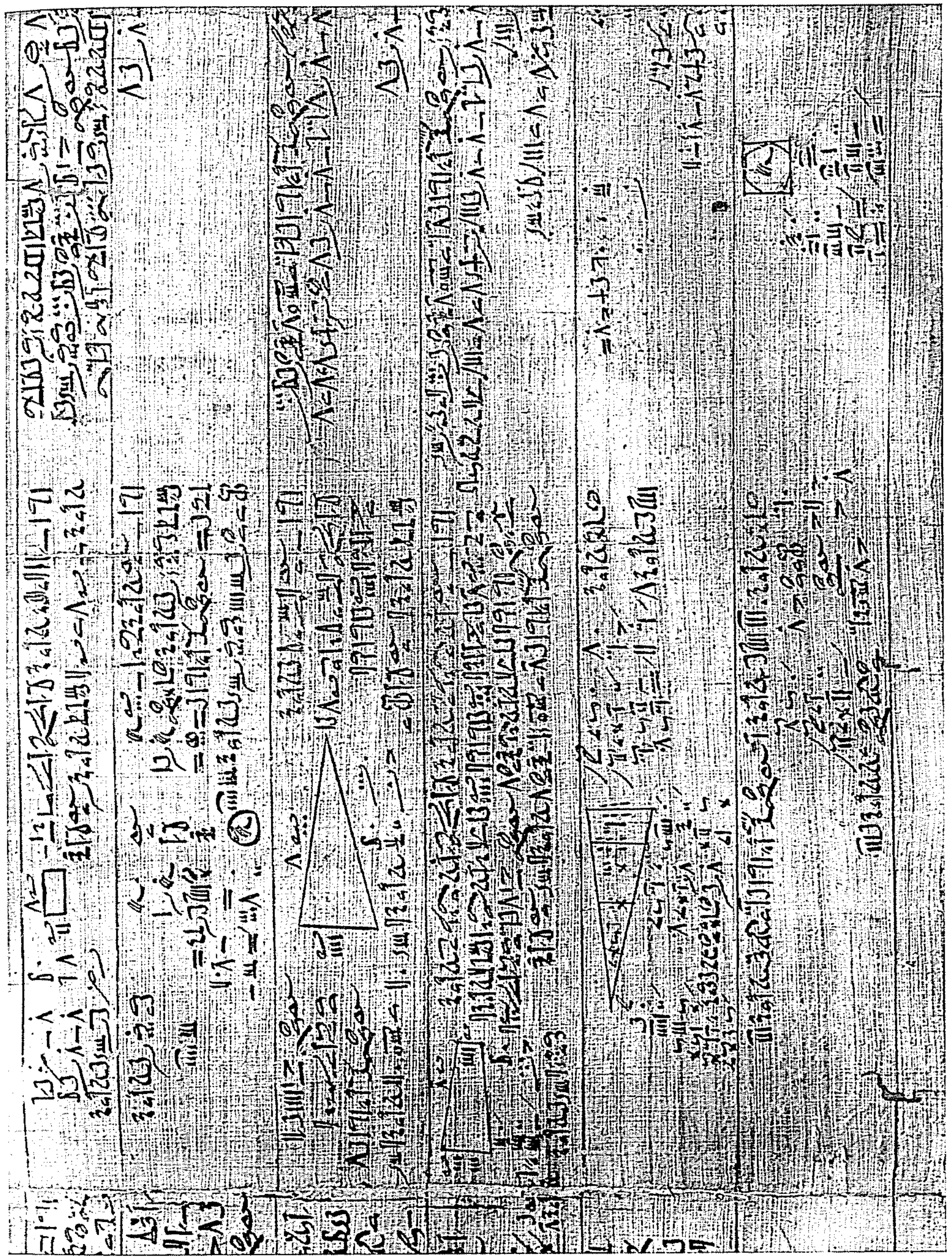
b. «figura rettilinea» è, alla lettera, «il rettilineo» (τὸ εὐθύγραμμον), cioè l'aggettivo *rettilineo* usato come sostantivo, allo stesso modo di τὸ παραλληλόγραμμον per figura parallelogramma, ossia parallelogrammo.

[33] Come si è già accennato nella nota alla I, 43, questa proposizione I, 45 costituisce una importante generalizzazione della I, 42: esso insegna

Si tracci la congiungente DB, si costruisca nell'angolo HKF, che sia uguale all'angolo E, il parallelogrammo FH uguale al triangolo ABD (I, 42), e si applichi alla retta GH nell'angolo GHM, che è uguale all'angolo E (I, 29), il parallelogrammo GM uguale al triangolo DBC (I, 44). Ora, poiché l'angolo E è uguale a ciascuno dei due angoli HKF, GHM, anche gli angoli HKF, GHM, sono uguali (noz. com. I). Si aggiunga in comune ad essi l'angolo KHG; la somma di FKH, KHG è quindi uguale alla somma di KHG, GHM. Ma la somma degli angoli FKH, KHG è uguale a due retti (I, 29), per cui pure la somma degli angoli KHG, GHM è uguale a due retti. Dunque, le due rette KH, HM, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta GH, formano con essa, e coi vertici nel punto H, angoli adiacenti [a] la cui somma è uguale a due retti; quindi KH è in linea retta con HM (I, 14). E poiché la retta HG cade sulle parallele KM, FG, gli angoli alterni MHG, HGF sono fra loro uguali (I, 29). Si aggiunga in comune ad essi l'angolo HGL; la somma di MHG, HGL è perciò uguale alla somma di HGF, HGL (noz. com. II). Ma la somma degli angoli MHG, HGL è uguale a due retti (I, 29), per cui anche la somma degli angoli HGF, HGL è uguale a due retti (noz. com. I); quindi FG è in linea retta con GL (I, 14). E poiché FK è uguale e parallela a HG (I, 34), ma pure HG lo è rispetto a ML (id.), anche KF, ML sono uguali e parallele (noz. com. I; I, 30); e le congiungono le rette KM, FL: quindi $KFLM$ è un parallelogrammo (I, 33). E poiché il triangolo ABD è uguale al parallelogrammo FH, ed il triangolo DBC al parallelogrammo GM, tutta quanta la figura rettilinea $ABCD$ è uguale a tutto quanto il parallelogrammo $KFLM$ (noz. com. II).

a. Letteralmente: con una retta GH e nel punto H su, cioè di, essa le due rette KH, HM, che non giacciono dalla stessa parte, producono, o formano, angoli adiacenti...

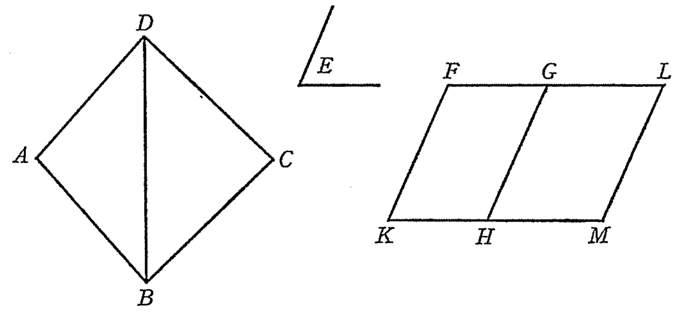
infatti a costruire in un dato angolo un parallelogrammo (in particolare un rettangolo) equivalente ad un qualunque poligono, e non già soltanto ad un qualunque triangolo.



Papiro matematico egiziano *Rhind*, copia di un testo del 1800 a. C. circa

(London, British Museum).

Dunque, è stato costruito nell'angolo *FKM*, che è uguale all'angolo dato *E*, il parallelogrammo *KFLM* uguale alla figura rettilinea data *ABCD*. – C.D.F.



Applica: I, 14, 29, 30, 33, 34, 42, 44.

È applicata in: II, 14; VI, 25; X, 20, 22, 23, 25, 26, 38, 41, 44, 47, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 71, 72, 75, 78, 81, 84, 97, 99, 100, 101, 108, 111.

Proposizione 46.

Descrivere un quadrato su una retta data [34].

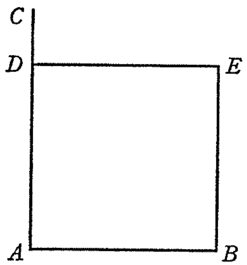
Sia *AB* la retta data; si deve dunque descrivere un quadrato sulla retta *AB*.

Si innalzi, dal punto *A* della retta *AB*, la retta *AC* perpendicolare ad *AB* (I, 11), si ponga *AD* uguale ad *AB* (I, 3 o post. III), e per il punto *D* si conduca *DE* parallela ad *AB*, mentre si conduca *BE* per il punto *B* parallela ad *AD* (I, 31). Quindi *ADEB* è un parallelogrammo, e perciò *AB* è uguale a *DE*, ed *AD* è uguale a *BE* (I, 34). Ma *AB* è uguale ad *AD*; quindi le quattro rette *BA*, *AD*, *DE*, *EB* sono uguali fra loro (noz. com. I): il parallelogrammo *ADEB* è perciò equi-

[34] Come si vede, la costruzione di un quadrato (e più in generale quella di un rettangolo, ossia di un quadrilatero avente quattro angoli retti) richiede il teorema inverso delle parallele I, 29, cioè l'applicazione del quinto postulato. Il tentativo di dimostrare l'esistenza, e la possibilità di costruzione, di un rettangolo senza ricorrere al quinto postulato si ricollega ai procedimenti di G. Saccheri e di A. M. Legendre (cfr. nota alla I, 16), che preludono alle geometrie non euclidee.

latero. Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poiché la retta AD cade sulle rette parallele AB, DE, la somma degli angoli BAD, ADE è uguale a due retti (I, 29). Ma l'angolo BAD è retto, per cui è retto anche l'angolo ADE. Ma i parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro (I, 34); pure ciascuno dei due angoli opposti ABE, BED è quindi retto; perciò $ADEB$ ha gli angoli retti. E fu dimostrato che è anche equilatero.

Dunque, esso è un quadrato; ed è stato descritto sulla retta AB. – C.D.F.



APPLICA: I, 3, 11, 29, 31, 34.

È APPLICATA IN: I, 47; II, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14; VI, 30; X, 19, 20, 21; lemma X, 22, 24, 25.

PROPOSIZIONE 47.

Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto[35].

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto; dico che il quadrato di BC è uguale alla somma dei quadrati di BA, AC.

[35] È di dubbio valore l'attribuzione effettiva a Pitagora di questo celebre teorema, che tradizionalmente porta il suo nome.

A parte la riserva fondamentale che già dai tempi di Platone non si aveva modo di distinguere l'opera personale di Pitagora da quella della scuola sorta attorno a lui, le attribuzioni a Pitagora sono tarde, trovandosi in Plutarco, Diogene Laerzio, Ateneo.

Vero è che Diogene Laerzio (*Vite dei filosofi*, libro VIII, cap. I, 12, trad. e note di Marcello Gigante, ed. Laterza, Bari, 1962) fa riferimento ad Apollodoro il calcolatore, secondo il quale Pitagora «sacrificò un'ecatombe, per avere scoperto che il quadrato dell'ipotenusa in un triangolo rettangolo è uguale ai quadrati dei suoi lati». E viene anche citato un

Infatti, si descrivano il quadrato $BDEC$ su BC, e su BA, AC i quadrati GB, HC (I, 46), per A si conduca AL parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette BD,

epigramma così composto: «Quando Pitagora scoprì la famosissima figura, allora per essa compì un famoso sacrificio di buoi».

Che il sacrificio abbia carattere assolutamente leggendario era già osservato da Cicerone (*De natura deorum*, III, 36, 88): «Si dice che Pitagora, avendo trovato in geometria qualcosa di nuovo (*quiddam novi*) avesse immolato un bove alle Muse; ma io non lo credo, poiché egli non volle immolare una vittima ad Apollo Delio, né volle aspergere di sangue l'altare».

Proclo, nel suo commento alla I, 47 scrive: «A sentire coloro che vogliono narrarci storie di antichi avvenimenti, troviamo che alcuni tra essi attribuiscono a Pitagora questo teorema, dicendo che egli sacrificò un bove in onore della sua scoperta. Per parte mia io ammiro coloro che per primi hanno stabilito la verità di questo teorema, e ancor di più ammiro l'autore degli *Elementi* (Euclide, lo στοιχειωτής), non solo per la dimostrazione assai chiara, ma anche, ecc. ecc.» (qui Proclo allude alla generalizzazione a poligoni simili costruiti sui lati del triangolo rettangolo, contenuta nella prop. VI, 31 degli *Elementi*: si veda la nota ivi).

Sembra, dunque, che sia proprio opera personale di Euclide questa dimostrazione che troviamo negli *Elementi* nella I, 47, e che è basata sulla teoria della equivalenza. Sarebbe, cioè, opera personale di Euclide l'indirizzo seguito nel libro primo ed ancor più nel secondo (ed anche nel terzo), che *svincola* la trattazione dalla teoria delle proporzioni (esposta soltanto nel libro quinto in forma generale, ed applicata soltanto nel libro sesto) e fonda le dimostrazioni sulla teoria dell'equivalenza (cfr. per questo anche la *Nota introduttiva* al libro secondo).

Del resto, appare certo che il *teorema di Pitagora* fu intuitivamente o sperimentalmente conosciuto, almeno in casi particolari, anche dalle matematiche preelleniche.

È poi particolarmente suggestiva l'ipotesi dello Zeuthen, secondo la quale fu proprio il desiderio di giustificare e *dimostrare* il teorema di Pitagora che condusse i geometri greci a *costruire* un complesso di proposizioni concatenate l'una all'altra, risalendo fino a quelle più semplici (procedimento di *analisi*), sicché poi con procedimento inverso (di *sintesi*) da dette semplici proposizioni iniziali (postulati) si potesse *discendere*, per gradi di complessità maggiore, fino al detto teorema di Pitagora. Sarebbe stato quindi proprio detto teorema (nella ricerca della sua giustificazione logica) a dare l'avvio alla geometria razionale. E la memorabile comunicazione di Zeuthen s'intitola appunto: *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique* (Congr. internazionale, Ginevra, 1904). Questo teorema, detto universalmente *di Pitagora*, ha ricevuto poi numerosissime dimostrazioni, sulle quali qui non ci fermiamo.

Non ci sembra che una dimostrazione del teorema, per il caso particolare del triangolo rettangolo isoscele, sia da ricercare nel noto passo del dialogo platonico *Menone* (82 *a* - 85 *b*): ciò nel senso che il procedimento

CE (I, 31 e I, 30), e si traccino le congiungenti *AD*, *FC*. Ora, poiché ciascuno dei due angoli *BAC*, *BAG* è retto, le due rette *AC*, *AG*, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta *BA*, formano con essa, e coi vertici nel punto *A*, angoli adiacenti la cui somma è uguale a due retti; quindi *CA* è in linea retta con *AG* (I, 14). Per la stessa ragione, pure *BA* è in linea retta con *AH* (id.). E poiché l'angolo *DBC* è uguale all'angolo *FBA* – difatti ciascuno dei due è retto –, si aggiunga in comune ad essi l'angolo *ABC*; tutto quanto l'angolo *DBA* è quindi uguale a tutto quanto l'angolo *FBC* (noz. com. II). Ora, poiché *DB* è uguale a *BC*, e *FB* a *BA* (def. XXII), i due lati *DB*, *BA* sono uguali rispettivamente ai due lati *FB*, *BC*; e l'angolo *DBA* è uguale all'angolo *FBC*, per cui la base *AD* è uguale alla base *FC*, ed il triangolo *ABD* è uguale al triangolo *FBC* (I, 4). Ma il parallelogrammo *BL* [a] è il doppio del triangolo *ABD* – essi hanno difatti la stessa base *BD* e sono compresi fra le stesse parallele *BD*, *AL* (I, 41) –, mentre il quadrato *GB* è il doppio del triangolo *FBC*: difatti essi hanno, di nuovo, la stessa base *FB* e sono compresi fra le stesse parallele *FB*, *GC* (I, 41). [Ma doppi di cose uguali sono uguali fra loro (noz. com. V)] [b]; è quindi uguale anche il parallelogrammo *BL*

a. Fermiamo con un punto e proseguiamo con *Ma* ciò che in greco è segnato con punto e virgola e proseguito da *ed*: « ... al triangolo *FBC*; ed il parallelogrammo... ».

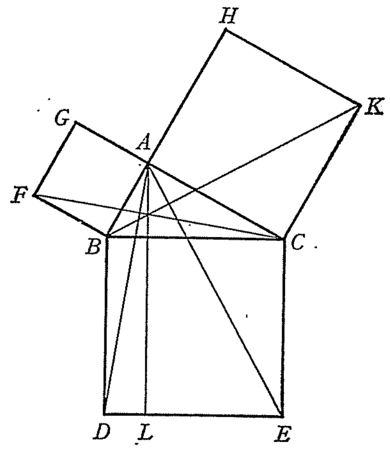
b. È fra le nozioni comuni non euclidee.

dimostrativo ivi offerto prescinde completamente dal teorema di Pitagora anche nella sua impostazione.

Per quanto riguarda, poi, le dimostrazioni vere e proprie del teorema, ci basti qui accennare a quella basata sul fatto che l'altezza sull'ipotenusa divide un triangolo rettangolo in due triangoli simili al dato (vedasi per questo la nota alla VI, 8).

Osserviamo, infine, che la dimostrazione di Euclide si compone di due metà simmetriche, relativamente al fatto che il quadrato dell'ipotenusa viene scomposto in due rettangoli, ciascuno dei quali è equivalente al quadrato di un cateto. A ciò è dovuto il fatto che tradizionalmente si chiami nelle nostre scuole *teorema di Euclide* quello riguardante l'equivalenza tra il quadrato di un cateto e il rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione del cateto sull'ipotenusa stessa.

al quadrato *GB*. Similmente, tracciate le congiungenti *AE*, *BK*, si potrà dimostrare che pure il parallelogrammo *CL* è uguale al quadrato *HC*; tutto quanto il quadrato *BDEC* è perciò uguale alla somma dei due quadrati *GB*, *HC* (noz. com. II). Ed il quadrato *BDEC* è descritto su *BC*, mentre i quadrati *GB*, *HC* sono descritti su *BA*, *AC*. Quindi il quadrato del lato *BC* è uguale alla somma dei quadrati dei lati *BA*, *AC*.



Dunque, nei triangoli rettangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 14, 31, 41, 46.

È APPLICATA IN: I, 48; II, 9, 10, 11, 12, 13, 14; III, 14, 35, 36; IV, 12; lemma a X, 14, 29, 30, 33, 34, 35; XI, 23, 23 scolio, 35; XII, 17; XIII, 12, 14, 15, 18.

PROPOSIZIONE 48.

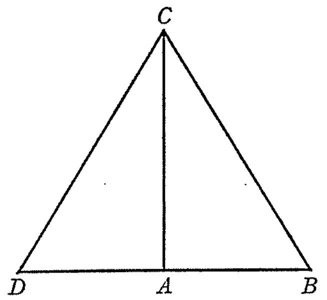
Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto [36]

Infatti, nel triangolo *ABC* il quadrato di uno dei lati, *BC*, sia uguale alla somma dei quadrati dei lati *BA*, *AC*; dico che l'angolo *BAC* è retto.

Si innalzi difatti, dal punto *A* della retta *AC*, la retta *AD* perpendicolare ad *AC* (I, 11), si ponga *AD* uguale a *BA* (I, 3 o post. III), e si tracci la congiungente *DC*. Poiché *DA* è uguale ad *AB*, anche il quadrato di *DA* è uguale al quadrato di *AB*. Si aggiunga in comune ad essi il quadrato

[36] Questa proposizione I, 48, con la quale ha termine il primo libro degli *Elementi*, costituisce l'inverso della I, 47, cioè del teorema detto di Pitagora.

di AC; la somma dei quadrati di DA, AC è perciò uguale alla somma dei quadrati di BA, AC (noz. com. II). Ma il quadrato di DC è uguale alla somma dei quadrati di DA, AC – difatti l'angolo DAC è retto (I, 47) –, mentre alla somma dei quadrati di BA, AC è uguale il quadrato di BC – lo è difatti per ipotesi; quindi il quadrato di DC è uguale al quadrato di BC (noz. com. I), cosicché pure il lato DC è uguale al lato BC. Ma poiché DA è uguale ad AB, ed AC è comune, i due lati DA, AC sono uguali ai due lati BA, AC; e la base DC è uguale alla base BC, per cui l'angolo DAC è uguale all'angolo BAC (I, 8). Ma l'angolo DAC è retto; quindi anche l'angolo BAC è retto.



Dunque, se in un triangolo il quadrato di uno dei lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 8, II, 47.

È APPLICATA IN: XI, 35.