IL PRINCIPIO DI MINIMA AZIONE E IL ‘FINALISMO’ IN MECCANICA

GIORGIO ISRAEL

Il termine ‘meccanica classica’ denota la scienza del moto dei corpi e della materia che si è sviluppata dal Seicento fino ad oggi, e l'aggettivo ‘classica’ la distingue dagli sviluppi più recenti come la teoria della relatività e la meccanica quantistica. Prima, e per circa duemila anni, la meccanica fu dominata dalle concezioni di Aristotele, basate su un approccio non matematico e su una visione molto complessa e articolata dei rapporti di causa-effetto fra i fenomeni.

Cerchiamo di descrivere come uno scienziato aristotelico concepiva il moto di una pietra scagliata dalla sua mano. Dapprima vi è la pietra, con la sua massa e le sue proprietà fisiche che formano un complesso di aspetti che influirà sulle caratteristiche del moto: egli la chiama la *causa materiale*. La pietra va poi considerata per la sua forma, per la configurazione che essa ha qui e ora e che muta istante per istante e luogo per luogo nel moto: è la *causa formale*. Nell'atto di scagliarla egli le imprime una ‘virtù’ di muoversi — la *causa efficiente* — che, trasmessa alla pietra dagli strati adiacenti dell'aria, determina il suo movimento. Questa virtù perde man mano la sua efficacia, fino a che la pietra resta abbandonata a sé stessa e cade verso il basso: questa caduta è determinata dalla tendenza di ogni corpo pesante a scendere verso il basso, ovvero verso il suo ‘luogo naturale’, e quindi a obbedire alla *causa finale*. Si noti che questa tendenza non ha nulla a che fare con l'attrazione gravitazionale con cui, da Newton in poi, viene spiegata la caduta dei gravi: si tratta soltanto della conformità ad un *fine*, per cui il destino del grave è di scendere verso il basso — o meglio, verso il centro del mondo — mentre un corpo leggero (un ‘leve’) come l'aria, tende verso l'alto, che è il suo luogo naturale.

La meccanica classica, con Galileo, Descartes e Newton, ridusse questa complessa visione della causalità ad una concezione molto più semplice in cui sopravviveva soltanto la nozione di *causalità efficiente*. La causalità materiale era dissolta nella visione dei corpi come figure geometriche dotate di massa, ovvero come aggregati di ‘punti materiali’. Analogamente, la causalità formale era dissolta nella visione matematica del moto: la variazione ‘formale’ del corpo in moto si riduceva all'insieme delle sue posizioni geometriche istante per istante. La dinamica dei corpi materiali era espressa così mediante *traiettorie* percorse da oggetti geometrici dotati della sola proprietà fisica di possedere una massa e animati da un unico tipo di cause determinanti: le *forze*, che si trattasse di quelle prodotte dalle braccia o dagli urti o dall'attrazione fra i corpi. Quel che cambiava era soltanto la forma quantitativa (l'espressione matematica) di queste forze che animavano l'intero universo. In particolare, l'attrazione gravitazionale evitava il ricorso alla nozione di *causa finale* per spiegare la caduta dei gravi verso il basso.

Restava così soltanto l'idea di *causalità efficiente*, la quale da Descartes in poi diviene il centro concettuale della meccanica. Essa assume una veste meno vaga della primitiva formulazione filosofica — non esiste effetto senza causa — con l'asserzione che ogni evento determina in modo unico l'evento seguente: lo stato meccanico di un sistema ad un determinato istante determina in modo unico il suo stato in un ogni istante successivo. Così, noto l'agente del moto — la forza — le proprietà essenziali dell'Universo sono racchiuse nella formula che esprime la legge della dinamica di Newton, secondo cui l'accelerazione del corpo è proporzionale alla forza impressa. Secondo le parole di Leibniz, essa permette di "leggere quali saranno gli stati successivi di tutte le sue parti, in tutti i tempi assegnati."

Questa visione del ruolo della causalità efficiente nella meccanica trovò la sua espressione definitiva nella famosa Introduzione alla *Teoria analitica delle probabilità* di Pierre Simon Laplace (1749-1827) (vedi riquadro).

Tutti gli eventi, anche quelli che, per la loro piccolezza, sembrano non dipendere dalle grandi leggi della natura, ne sono una conseguenza altrettanto necessaria delle rivoluzioni del sole. Per l'ignoranza dei legami che li uniscono al sistema intero dell'Universo, li si è fatti dipendere dalle cause finali o dal caso, secondoché si producevano e si susseguivano con regolarità, o senza ordine apparente; ma queste cause immaginarie sono state successivamente allontanate assieme ai confini delle nostre conoscenze, e scompaiono completamente di fronte alla sana filosofia che non vede in esse altro che l'espressione della nostra ignoranza delle cause vere. Gli eventi attuali hanno un legame con quelli che li precedono, il quale è fondato sul principio evidente che una cosa non può cominciare ad essere, senza una causa che la produca. Questo assioma, noto col nome di *principio di ragion sufficiente,* si applica anche a quelle azioni considerate come indifferenti. La volontà più libera non può produrle senza un motivo determinante; difatti, se tutte le circostanze di due posizioni fossero esattamente simili, ed essa agisse nell'una e non nell'altra, la sua scelta sarebbe un effetto senza causa: essa sarebbe allora, dice Leibniz, il caso cieco degli epicurei. L'opinione contraria è un'illusione dello spirito, il quale, perdendo di vista le ragioni nascoste della scelta della volontà nelle cose indifferenti, si persuade che essa si è determinata da sé e senza motivi.

Noi dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'Universo, come l'effetto del suo stato precedente, e come la causa del seguente. Una intelligenza che, in un istante dato, conoscesse tutte le forze che animano la natura, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se fosse così elevata da sottoporre questi dati all'analisi, racchiuderebbe nella stessa formula, i moti dei più grandi corpi dell'Universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, con la perfezione che ha saputo dare all'Astronomia, un pallido abbozzo di questa intelligenza. Le sue scoperte nella Meccanica e nella Geometria, unitamente a quelle della gravità universale, l'hanno messo in condizione di cogliere entro le stesse espressioni analitiche, gli stati passati e futuri del sistema del mondo.

(Pierre Simon Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1825 (1ª vers. 1795); in ital. nelle *Opere*, a cura di O. Pesenti Cambursano, Torino, UTET, 1967).

L'espressione della legge di Newton nella veste di un'equazione differenziale (vedi riquadro) e le modalità della sua risoluzione sembravano riflettere, anche nell'ambito del linguaggio matematico, il principio della causalità o del determinismo, come venne chiamato nell'Ottocento.

La **legge della dinamica di Newton** asserisce che l'accelerazione a di un corpo è proporzionale alla forza impressa f secondo la massa m: $f = ma$. Nel linguaggio del calcolo differenziale la velocità v di un corpo è rappresentata dalla ‘derivata’ dello spazio percorso s rispetto al tempo t. In simboli: $\frac{ds}{dt}$. A sua volta, l'accelerazione a è data dalla derivata della velocità rispetto al tempo: $\frac{dv}{dt}$, ovvero dalla derivata seconda dello spazio rispetto al tempo: $\frac{d^2s}{dt^2}$. La legge di Newton si esprime allora mediante l'equazione differenziale: $f = m \frac{d^2s}{dt^2}$. Essa equivale al sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{f}{m} \end{cases}$$

Risolvere una siffatta equazione differenziale significa determinare lo spazio e la velocità (funzioni del tempo t:) istante per istante, ovvero: $s = s(t)$ e $v = v(t)$. Il teorema di esistenza ed unicità per le equazioni differenziali dimostra (sotto opportune ipotesi per la f) che tali soluzioni esistono e sono uniche, se sono noti i valori della posizione spaziale s e della velocità v ad un dato istante. Il che è quanto dire che lo stato iniziale del corpo determina in modo unico la sua evoluzione meccanica futura (e passata): si tratta quindi della traduzione matematica del principio di causalità.

Eppure, l'idea delle ‘cause finali’ non era stata espulsa definitivamente dalla meccanica. Difatti, persisteva la convinzione che il mondo dei fenomeni meccanici non potesse essere ridotto agli effetti di cause esterne cieche e puramente materiali. Il corso dei processi naturali è la manifestazione della volontà e dei fini di Dio, il quale ha ordinato il mondo secondo principi saggi e razionali: quindi ogni corpo, nel suo moto, non fa che adempiere agli *scopi* prescritti da Dio ed espressi da questi principi. Ma qual'è la loro natura? Difatti, se il *fine* che dirige il moto dei corpi non può essere identificato con la tendenza verso il luogo naturale occorrerà ricercarne altrove l'intima essenza.

Il *finalismo* in meccanica era già riemerso nel Settecento con la formulazione del *principio di minima azione* da parte del fisico-matematico francese Pierre-Louis de Maupertuis (1698-1759). La vicenda di questo principio è però legata allo studio della propagazione della luce che ha una storia molto antica, ma che conobbe importanti sviluppi a partire dal Seicento.

La prima legge della propagazione della luce era nota fin dall'antichità: essa consiste nell'asserzione che la luce si muove in linea retta in un mezzo omogeneo. Anche la teoria della luce riflessa, o *catottrica*, era stata ampiamente studiata nell'antichità e, nel Medioevo, se ne conosceva la seconda legge (*legge di riflessione*). Essa asserisce che la luce, quando incontra la superficie di un corpo impenetrabile, come uno specchio, si riflette e l'angolo di riflessione α è uguale all'angolo di incidenza β (Fig. 1).

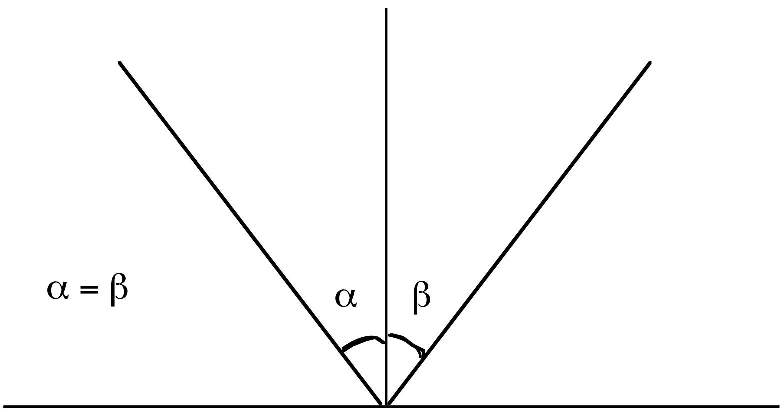


Fig. 1

Di ben maggiore difficoltà erano i problemi della *diottrica*, ovvero della diffusione della luce da un mezzo ‘diafano’ a un altro, come nel caso in cui la luce passa dall'aria all'acqua attraversando la superficie che le separa e ivi cambiando di direzione. Gli scienziati greci e arabi (in particolare Tolomeo e Ibn al-Haitham) avevano studiato le relazioni fra gli angoli di incidenza e di rifrazione, ma non avevano i mezzi per determinare una legge generale di correlazione.

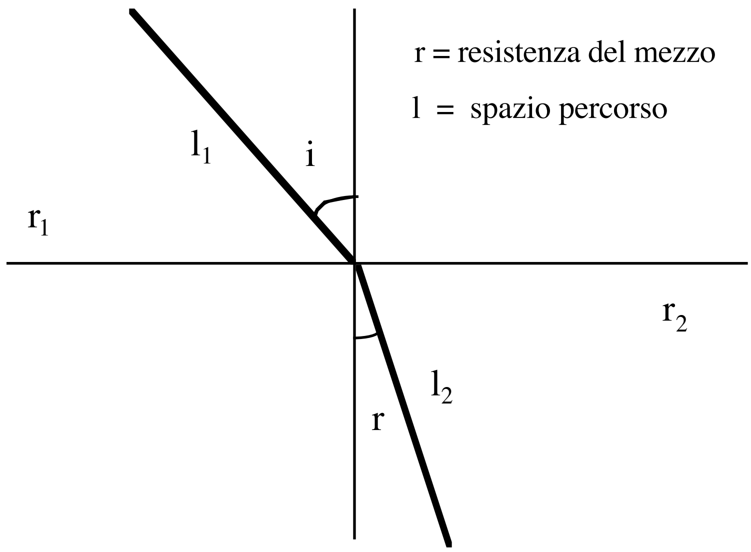


Fig. 2

Nel Seicento era tuttavia ormai nota la terza legge (*legge di riflessione*) secondo cui, quando la luce passa da un mezzo diafano a un altro, segue una via che, attraversando la superficie di separazione dei mezzi, deflette in modo tale che il seno dell'angolo di incidenza sia sempre in un rapporto fisso con il seno dell'angolo di rifrazione (Fig. 2), ovvero $\frac{sin i}{sin r} = costante$.

Di grande interesse per il nostro tema sono i tentativi che vennero fatti per trasformare in una legge fisica quella che era soltanto la constatazione di una relazione geometrica. Al riguardo, occorre sottolineare un fatto alquanto bizzarro: e cioè che quasi tutti i grandi scienziati del Seicento e del Settecento erano fermamente convinti che la luce viaggiasse più velocemente nei mezzi più densi, e ciò li condusse a spiegazioni errate.

Tale fu il caso di Descartes, che, per spiegare la rifrazione, ricorse ai principi della meccanica dell'urto, concependo il moto della luce come quello di una palla. Nel caso della riflessione, la luce rimbalzava sulla superficie riflettente, come una palla rimbalza su una superficie dura, mentre, nel caso della riflessione, la luce si comportava come una palla che, invece di rimbalzare, affondi in una superficie cedevole e avanzi in essa cambiando direzione. La conclusione cui egli pervenne era che i seni degli angoli di incidenza e di rifrazione erano in rapporto inverso alle velocità nei due mezzi. Ovvero, se v_1 è la velocità della luce nel primo mezzo e v_2 quella nel secondo mezzo:

$$\frac{sin i}{sin r} = \frac{v_2}{v_1}$$

Non possiamo descrivere il ragionamento con cui Descartes tentò di giustificare questo risultato errato. Egli insisteva sull'idea che la velocità della luce è maggiore nei mezzi più densi sostenendo che la luce si comporta come una palla che “perde molto più della sua agitazione dando contro un corpo molle che contro un corpo duro, e che rotola meno agevolmente su un tappeto che non su una tavola tutta nuda”: quindi l'azione della luce è “molto più impedita dalle parti dell'aria che essendo come molli e mal riunite non gli fanno molta resistenza, che non da quelle dell'acqua e da quelle del vetro o del cristallo”. Insomma, la luce si perde negli spazi vuoti e sconnessi dell'aria e rallenta la sua marcia, mentre in quelle dure e compatte di un mezzo più denso si fa strada senza disperdersi e perdere tempo. Newton fece invece ricorso all'attrazione gravitazionale, ritenendo che la maggiore densità del secondo mezzo implicasse una maggior presenza di materia e quindi una più forte attrazione che accelerava il moto della luce e ne modificava la traiettoria. Egli ricavò una conclusione uguale a quella di Descartes e parimenti errata.

Del tutto diverso fu l'approccio seguito dal matematico francese Pierre de Fermat (1601-1665) che ricercò una spiegazione del fenomeno della riflessione in un principio metafisico finalistico secondo cui la Natura agisce sempre scegliendo i mezzi più semplici. Secondo Fermat, un raggio di luce segue il cammino più corto oppure il più rapido. Pertanto, se la luce viaggia con diverse velocità in diversi mezzi essa sceglierà la via più breve per passare da un punto all'altro: questa non coinciderà con una retta, ma sarà tale che la luce compia il massimo percorso nel mezzo in cui procede più velocemente, e il minimo percorso in quello in cui procede più lentamente. Pertanto, per Fermat, la legge di rifrazione deve essere ricavata dal principio che la luce rende minimo il tempo di percorrenza (a sua volta, riflesso del principio per cui la Natura sceglie le vie più semplici). In definitiva, Fermat determinava il cammino della luce come quello in cui è minima la somma dei tempi impiegati a percorrere i due mezzi: tali tempi sono dati dai rapporti fra gli spazi percorsi, l_1 e l_2, e le rispettive velocità di percorrenza v_1 e v_2, e la somma è data da $\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}$ (si veda la Fig. 2). In tal modo, Fermat ottenne la legge corretta della rifrazione:

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}$$

Al contrario di Fermat, Leibniz si attenne al vecchio paradosso, offrendone una giustificazione ingegnosa e ispirata a un'analogia idrodinamica: come, quando il corso di un fiume si restringe, la corrente dell'acqua diventa più veloce, così la luce pressata da ogni lato dalla maggior densità di materia vede ristretti gli spazi in cui può scorrere e accresce la propria velocità. Ma al pari di Fermat, Leibniz adottò un punto di vista metafisico-finalistico e cioè che la

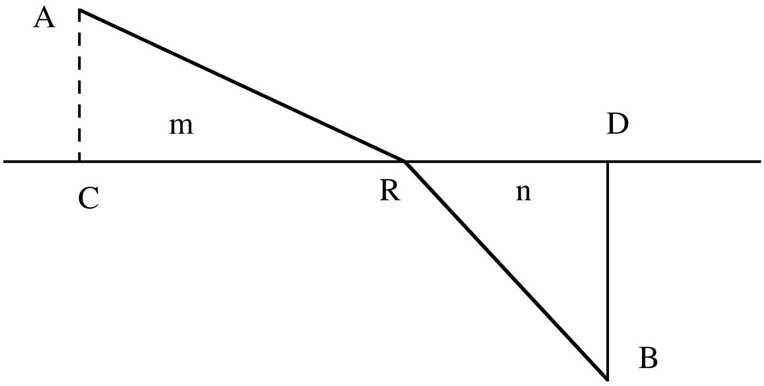
Natura si attiene a ciò che è più determinato, il quale è la cosa più semplice. Leibniz sosteneva tuttavia che questo principio di "semplicità delle vie" non implicava necessariamente che la natura renda minima una certa quantità (come il tempo, secondo Fermat). Egli asseriva che ciò che è più determinato (e quindi più semplice) può anche essere la quantità più grande. Quindi, mentre il fine della Natura è, per Fermat, l'*economia*, per Leibniz esso è la *semplicità e la determinazione*: Facendo ricorso alla nozione ambigua di 'resistenza' del mezzo, Leibniz sostenne che la quantità da 'ottimizzare' (ovvero da rendere massima o minima e non necessariamente minima) era la somma dei prodotti delle resistenze nei due mezzi per le velocità, ovvero $r_1l_1 + r_2l_1$. Ottenne così lo stesso risultato (sbagliato) di Descartes e Newton.

Maupertuis era un mediocre matematico ma un uomo brillante (fu anche moschettiere), e apprezzato per le sue doti intellettuali al punto di essere nominato Presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino. Egli intervenne in questa intricata situazione presentando una memoria all'Accademia delle Scienze di Parigi il 15 Aprile 1744. Iniziò sbeffeggiando la pretesa di Fermat di asserire che la luce corra più velocemente nei mezzi meno densi, osservando che "tutti i sistemi che danno qualche spiegazione plausibile dei fenomeni della rifrazione, suppongono il paradosso o lo confermano", per cui "tutto l'edificio che Fermat aveva costruito è distrutto". Egli manifestò invece la massima attenzione per l'approccio finalistico, asserendo che le soluzioni precedenti erano viziate dal fatto di non aver individuato la corretta quantità che la Natura rende minima. Questa non è, secondo Maupertuis, né il tempo né la quantità proposta da Leibniz: "in effetti, quale preferenza dovrebbe esservi del tempo sullo spazio?" Di fatto, osservava Maupertuis, la luce sceglie "una via che ha un vantaggio più reale: il cammino che essa segue è quello per il quale la quantità d'azione è la minima." Cosa intendeva egli per *quantità d'azione*? "Quando un corpo passa da un punto a un altro, gli occorre una certa 'azione' che dipende sia dalla sua velocità che dallo spazio percorso, ma che non è nessuno dei due presi separatamente, bensì è proporzionale ad entrambi, o, più precisamente, alla somma degli spazi moltiplicati ciascuno per la velocità con cui il corpo li percorre." Pertanto, la quantità che Maupertuis sceglie di minimizzare è $v_1l_1 + v_2l_2$.

La legge di rifrazione della luce ricavata dal principio di minima azione secondo Maupertuis

Consideriamo due mezzi diversi separati dalla linea *CD*. Siano m e n le velocità della luce rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo. Supponiamo che un raggio luminoso parta dal punto *A* e debba raggiungere il punto *B*. Maupertuis vuole determinare il punto *R* su *CD* in cui il raggio si spezza e, allo scopo, cerca il punto in cui la quantità d'azione $mAR + nRB$

è minima. Si traccino le perpendicolari AC e BD alla retta CD, allora $AR = \sqrt{AC^2+CR^2}$ e $RB = \sqrt{BD^2+DR^2}$, per cui la quantità da minimizzare è $\mathcal{A} = m\sqrt{AC^2+CR^2} + n\sqrt{BD^2+DR^2}$.



Maupertuis calcola ora il 'differenziale' $d\mathcal{A}$ di questa quantità, ovvero una sua variazione 'infinitamente piccola' e impone che esso sia nullo, in modo da ottenere la condizione di minimo (in realtà questa condizione garantisce soltanto l'esistenza di un massimo o di un minimo). Chi conosca le regole elementari della derivazione (in senso moderno), può verificare facilmente che questo differenziale è dato dall'espressione seguente (tenendo conto del fatto AC e BD sono costanti):

$$\frac{mCRdCR}{\sqrt{AC^2+CR^2}} + \frac{nDRdDR}{\sqrt{BD^2+DR^2}} = 0$$

Ma, siccome CD è costante, si ha che $dCR = -\, dDR$. Sostituendo, si ottiene

$$\frac{mCR}{AR} - \frac{nDR}{BR} = 0 \quad ovvero \quad \frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} = n : m$$

e quindi, osserva Maupertuis, il seno dell'angolo di incidenza sta al seno dell'angolo di rifrazione in ragione inversa della velocità della luce nei due mezzi.

Il lettore può eventualmente seguire nel riquadro i dettagli del calcolo con cui Maupertuis riottenne la versione errata della legge di rifrazione. Egli riteneva di aver così dimostrato la validità del principio metafisico delle vie più semplici (che assume però qui la forma di un principio di economia) e riaffermava l'importanza di collocare accanto a una meccanica che segue 'ciecamente' le leggi della necessità — quella basata sull'equazione di Newton — un'altra meccanica che svela i 'disegni' del Creatore. La conclusione della sua memoria merita di essere citata:

> « questa quantità d'azione è la vera spesa della Natura; e quel che essa risparmia il più possibile nel moto della luce. […]
>
> Tutti i fenomeni della rifrazione si accordano ora con il grande principio, che *la Natura, nella produzione dei suoi effetti, agisce sempre per le vie più semplici*. […]
>
> Conosco la ripugnanza che molti Matematici hanno per le *cause finali* applicate alla Fisica, e fino a un certo punto l'approvo; confesso che non è senza pericolo che le si introduce: l'errore in cui sono caduti degli uomini come Fermat seguendole, dimostra ampiamente quanto il loro uso sia pericoloso. […]

Non si può dubitare che tutte le cose non sia regolate da un Essere supremo, che, mentre ha impresso alla materia delle forze che denotano la sua potenza, l'ha destinata a eseguire degli effetti che contrassegnano la sua saggezza: e l'armonia di questi due attributi è così perfetta, che senza dubbio tutti gli effetti della Natura potrebbero essere dedotti da ciascuno preso separatamente. Una Meccanica cieca e necessaria segue i disegni dell'Intelligenza più illuminata; e se la nostra mente fosse abbastanza vasta, vedrebbe ugualmente le cause degli effetti fisici, sia calcolando le proprietà dei corpi, sia cercando ciò che vi sarebbe di più conveniente per farli eseguire.

Il primo di questi mezzi è più alla nostra portata, ma non conduce lontano. Il secondo talvolta ci smarrisce, perché non conosciamo abbastanza lo scopo della Natura e possiamo ingannarci circa *la quantità*, che dobbiamo considerare come *la sua spesa* nella produzione dei suoi effetti.

Per coniugare ampiezza e certezza nelle nostre ricerche, occorre impiegare l'uno e l'altro di questi mezzi. Calcoliamo i moti dei corpi, ma consultiamo anche i disegni dell'Intelligenza che li fa muovere.»

Fin qui, quel che abbiamo descritto potrebbe sembrare un altro modesto tentativo di ricavare la solita forma errata della legge di rifrazione da un principio metafisico di economia. Ma in un successivo lavoro (presentato all'Accademia delle Scienze di Berlino nel 1746) Maupertuis propose un'estensione del suo principio alla meccanica. Qui l'azione era definita come il prodotto della massa per la velocità e per la distanza percorsa dal mobile. La sua definizione, non essendo specificato l'intervallo di tempo in cui occorreva considerare tale prodotto *mvl*, era vaga. L'analogia era quindi arbitraria e suggerita soltanto dalle convinzioni finalistiche di Maupertuis. Eppure, anche se egli aveva ragionato da metafisico, fu quantomeno un metafisico 'fortunato', perché il fatto tanto bizzarro quanto clamoroso fu che quel che non funzionava nell'ottica funzionava invece egregiamente nella meccanica: nella sua memoria, Maupertuis riusciva ad applicare con successo il suo principio alla determinazione del moto dei corpi duri e dei corpi elastici.

Il principio di minima azione di Maupertuis in meccanica

Il principio asserisce che "quando accade qualche cambiamento in Natura, la quantità di azione necessaria per questo cambiamento è la più piccola possibile", dove la quantità d'azione è il prodotto della massa dei corpi per la loro velocità e lo spazio che percorrono.

Consideriamo il caso di due corpi 'duri' (ovvero tali che "le loro parti siano inseparabili e inflessibili e quindi la cui figura sia inalterabile") le cui masse A e B si muovano dallo stesso lato con velocità rispettive a e b, ma con $a > b$, di modo che A raggiungerà B urtandolo.

Sia x la velocità comune dei due corpi dopo l'urto. Chiaramente $x < a$ e $x > b$. Seguiamo il ragionamento di Maupertuis: «Il cambiamento avvenuto nell'Universo consiste nel fatto che il corpo A che si muoveva con la velocità a e che in un certo tempo percorreva uno spazio a, si muove con la velocità x e percorre uno spazio x, e il corpo B che si muoveva con la velocità b e percorreva uno spazio b si muove con la velocità x e percorre uno spazio x. Questo cambiamento è quindi lo stesso che sarebbe successo se, mentre il corpo si muoveva con la velocità a e percorreva lo spazio a, fosse stato trasportato indietro su un piano immateriale che si fosse mosso con la velocità $a - x$ di uno spazio $a - x$; e che, mentre il corpo B si muoveva con la velocità b e percorreva lo spazio b, fosse stato trasportato in avanti su un piano immateriale, che si fosse mosso con una velocità $x - b$ di uno spazio $x - b$.»

Le quantità d'azione "prodotte nella Natura" saranno $A(a-x)^2$ e $B(x-b)^2$ e la loro somma $\mathcal{A} = Aaa - 2Aax + Axx + Bxx - 2Bbx + Bbb$ dovrà essere minima. Imponendo la condizione che il differenziale di $\mathcal{A}$, $d\mathcal{A}$, sia nullo, si ottiene:

$$- 2Aadx + 2Axdx + 2Bxdx - 2Bbdx = 0$$

In conclusione, la velocità comune x dopo l'urto è:

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}$$

Maupertuis tratta in modo analogo il caso di due corpi duri che si muovano l'uno contro l'altro, nonché il caso dei corpi perfettamente elastici ("quelli le cui parti, dopo essere state piegate, si raddrizzano, riprendono la loro situazione primitiva e rendono ai corpi la loro figura primitiva").

Così il principio di minimo *mvl = minimo*, detto poi *principio di minima azione* di Maupertuis — secondo cui "quando si verifica in Natura qualche cambiamento, la quantità d'azione necessaria per questo cambiamento è la più piccola possibile" — divenne il punto di partenza di una trattazione della meccanica basata su una metodologia matematica nuova e che è all'origine di quella branca dell'analisi matematica chiamata *calcolo delle variazioni*. Questo metodo — detto da Euler dei 'massimi e dei minimi' — non consisteva nel tentare di risolvere direttamente l'equazione differenziale del moto di Newton, bensì nel determinare globalmente la traiettoria del moto, scegliendo fra tutte le traiettorie possibili che un corpo potrebbe percorrere da un dato punto ad un altro (Fig. 3) quella che rende minima l'azione.

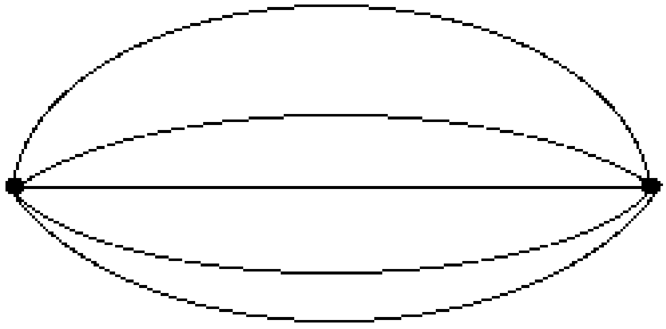


Fig. 3

La locuzione successiva di ‘calcolo delle variazioni’ fu giustificata dal fatto che si pensava ad una traiettoria generica fra due punti, la si faceva ‘variare’ e quindi si imponeva la condizione che in questa variazione l'azione assumesse un valore minimo: questa procedura che, dal punto di vista matematico, conduceva ad un'estensione delle tecniche del calcolo differenziale, permetteva in molti casi di determinare efficacemente la traiettoria ‘effettivamente’ seguita dal corpo mobile.

Non è possibile qui ripercorrere le tappe della storia del calcolo delle variazioni dal Settecento fino ad oggi. Se a Maupertuis va riconosciuto il merito dell'idea originaria, formulata però in termini matematici rozzi e ingenui, fondamentale fu il contributo di Leonhard Euler (1707-1783) che perfezionò e applicò il metodo dei massimi e dei minimi a numerose questioni di meccanica e di fisica-matematica e di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) che trasformò l'idea di Maupertuis e le tecniche messe in opera da Euler in un metodo di calcolo sistematico e generale: di fatto, la *Meccanica analitica* di Lagrange segna l'inizio del ‘calcolo delle variazioni’. In seguito, il matematico inglese William R. Hamilton (1805-1865) pervenne ad una formulazione più generale delle leggi della meccanica, tutta imperniata su una forma generalizzata del principio di Maupertuis, poi detta *principio di Hamilton*.

L'importanza dei metodi variazionali non ha cessato di crescere fino ad oggi, nella matematica, nella fisica-matematica e nella matematica applicata. Questo successo è stato certamente dovuto al fatto che in molti casi in cui il metodo ‘diretto’ — ovvero la ricerca diretta delle soluzioni delle equazioni del moto — falliva, il metodo ‘indiretto’ — e cioè la risoluzione delle equazioni mediante l'uso di principi come quello di Maupertuis o di Hamilton — si rivelava efficace e permetteva di ottenere risultati ricchi di contenuto matematico e di significato fisico. I metodi del calcolo delle variazioni (in particolare nella veste assunta all'interno di quella branca dell'analisi matematica moderna che va sotto il nome di *analisi funzionale*) si sono rivelati utili non soltanto nella meccanica classica, ma anche in molti rami della fisica matematica e, più di recente, nella formulazione matematica generale dei principi della meccanica quantistica. Di grande importanza nell'introduzione dei metodi variazionali in meccanica quantistica fu l'opera di uno dei più grandi matematici del nostro secolo, David Hilbert (1862-1943): un altro grande matematico tedesco del Novecento, Felix Klein (1849-1925), diceva di lui che “era posseduto da una credenza fanatica nei principi variazionali e dall'opinione che è possibile spiegare l'essenza della natura mediante riflessioni puramente matematiche.”

Questa propensione ad attribuire ai principi variazionali la virtù di esprimere i segreti meccanismi della natura e di rappresentarne l'intima essenza ci riconduce alla loro origine metafisica. È spontaneo chiedersi che cosa ne è stato del tentativo di Maupertuis di reintrodurre il finalismo nella fisica matematica e dei rapporti fra questo approccio finalistico e quello causale. La testimonianza più evidente di quanto fosse radicato l'attaccamento al finalismo è data dalla completa adesione alle tesi metafisiche di Maupertuis da parte di Euler, che può ben essere considerato come il massimo matematico e fisico-matematico del Settecento. In una memoria del 1744 egli dichiarava di aver intravisto la via verso l'indagine delle cause finali che guidano i comportamenti della natura:

> «Poiché tutti gli effetti della natura seguono qualche legge di *massimo* o di *minimo*, non vi è dubbio che, nelle curve che descrivono i corpi lanciati sollecitati da forze qualsiasi, si trova qualche proprietà di *massimo* o di *minimo*. Tuttavia, sembra meno facile definire *a priori*, partendo da principi metafisici, quale sia questa proprietà; ma, poiché è possibile determinare queste curve mediante il metodo diretto, si potrà, con la voluta attenzione, dedurne ciò che, nelle curve considerate, è *massimo* o *minimo*. Ma occorre soprattutto considerare l'effetto che deve derivare dalle forze sollecitanti; e poiché questo consiste nel moto generato nel corpo, sembra conforme al vero che questo stesso moto, o piuttosto l'insieme di tutti i moti che risiedono nel corpo lanciato debba essere un *minimo*. Sebbene questa conclusione non sembri sufficientemente confermata, tuttavia, se mostro che essa è in accordo con la verità già nota *a priori*, essa ne trarrà così grande forza che tutti i dubbi al riguardo svaniranno completamente. Inoltre, quando la sua verità sarà stata dimostrata, sarà più facile spingere le ricerche nell'ambito delle leggi profonde della natura e nelle cause finali, e di corroborare questa asserzioni con ragioni molto solide.»

In uno scritto del 1748, quando riteneva di aver perfezionato sufficientemente il suo metodo, Euler ne metteva in luce i legami con il principio di Maupertuis e definiva chiaramente il duplice indirizzo che avrebbe assunto lo studio della meccanica:

> «E' dunque questo principio della minima quantità d'azione, al quale il Signor de Maupertuis riduce tutti i *massimi* e i *minimi*, quello che la Natura osserva in tutte le sue produzioni. […] si apre dunque una duplice via per conoscere gli effetti della natura: una mediante le cause efficienti, che si ha l'abitudine di chiamare metodo diretto, l'altra mediante le cause finali, e il matematico fa uso dell'una e dell'altra con eguale successo. […] Poiché la costruzione dell'insieme del mondo è la più perfetta, ed è stata compiuta da un creatore molto saggio, non succede assolutamente nulla nel mondo in cui non risplenda qualche ragione di *massimo* o di *minimo*; ed è per questo che non vi è assolutamente alcun dubbio che tutti gli effetti del mondo non possano essere determinati partendo dalle cause finali, mediante il metodo dei *massimi* e *minimi*, con altrettanto successo che partendo dalle cause efficienti stesse. […] Ecco dunque una grande scienza, che ci manca ancora, e che procede dai principi generali che si

osservano in natura: e mi sembra che è qui che risiede la vera metafisica, in quanto racchiude i principi primi della fisica e della matematica.»

Ben diversa fu la posizione di Lagrange, il quale rigettò il finalismo di Maupertuis, osservando che il suo principio non doveva essere considerato come un principio metafisico, ma come un risultato semplice e generale delle leggi della Meccanica, tanto più che la pretesa ‘economia’ realizzata dalla Natura era in contraddizione col fatto che le traiettorie del moto non corrispondevano in generale a un minimo dell'azione, ma talora anche ad un massimo. Sulle orme di Lagrange, Hamilton scriveva che “sebbene la legge di minima azione avesse raggiunto una posizione al pari dei più elevati teoremi della fisica, le sue pretese di descrivere una necessità cosmologica sono ora generalmente respinte. E questo rifiuto è fondato, fra altre ragioni, su quella che la quantità che si pretende sia economizzata è di fatto spesso spesa senza risparmio.” E tuttavia, anche Hamilton non sembrava essersi completamente liberato della propensione verso il finalismo poiché aggiungeva: “Non possiamo quindi supporre che l'economia di questa quantità sia stata designata nell'idea divina dell'universo: sebbene una semplicità di qualche tipo elevato si può ritenere sia inclusa in quest'idea.”

Non dobbiamo difatti dimenticare che già Leibniz aveva introdotto l'idea di un principio teleologico di semplicità come principio di minimo e massimo, proprio nel senso della “semplicità di qualche tipo elevato” cui allude Hamilton e che tale interpretazione metafisica era stata ripresa in modo più preciso da Euler. Per cui, questa confutazione del carattere metafisico del principi variazionali poteva colpire l'interpretazione ‘economicistica’ di Maupertuis ma non quella di Leibniz o di Euler.

Di fatto, l'unica via plausibile per confutare il finalismo dei principi variazionali e di ridurre anche il principio di causalità finale a quello di causalità efficiente poteva consistere soltanto nella dimostrazione che l'approccio diretto e quello indiretto erano equivalenti sul piano matematico, ovvero conducevano, in linea di principio, alle stesse soluzioni, anche se il secondo era spesso *tecnicamente* più efficace nella determinazione concreta delle soluzioni. Gli sviluppi dell'analisi matematica fra la fine dell'Ottocento e gli inizi del Novecento condussero di fatto a questo risultato. Il fisico e filosofo della scienza Ernst Mach (1838-1916) non mancò di rilevarne le conseguenze. Egli osservò che in ogni moto, la traiettoria realmente percorsa appare sempre come nettamente distinta dall'infinità delle traiettorie immaginabili. Dal punto di vista analitico ciò equivaleva a dire che è sempre possibile trovare delle espressioni la cui variazione, uguagliata a zero, fornisce le equazioni differenziali del moto, perché la variazione può svanire soltanto quando la soluzione assume un valore determinato in un solo modo. Pertanto, concludeva Mach, i principi variazionali non sono altro che espressioni analitiche del fatto sperimentale che i fenomeni della natura sono determinati in modo unico. Il finalismo era così dissolto completamente nel causalismo meccanico.

Quest'argomentazione fu ripresa molti anni dopo da un altro grande protagonista della scienza del nostro secolo, John Von Neumann (1903-1957). Un approccio nella scienza — egli osservava — può essere quello secondo cui "ogni evento determina direttamente l'evento che lo segue immediatamente. Questo è il punto di vista causale." In alternativa, le leggi scientifiche "possono essere teleologiche, il che significa che un singolo evento non determina il successivo, ma che in qualche modo l'intero processo può essere visto come un'unità, subordinata a una legge generale, di modo che il tutto può essere compreso come un tutto. Se dico che quest'idea ha ossessionato i filosofi faccio soltanto un'affermazione attenuata. Essa ha giocato un gran ruolo, e gioca ancora un grande ruolo, ad esempio in biologia." "Non voglio dire — aggiungeva von Neumann — che si tratti di un problema falso o senza senso, ma [...] una buona dose di esperienza matematica mostra che, a meno che non si presti un'enorme attenzione, la questione è senza senso." Difatti, i due approcci sono equivalenti: "la storia dei moti che si ricava dall'uno è precisamente quella che si ricava dall'altro; e la questione se la meccanica sia causale o teleologica (che in ogni altro campo sarebbe considerata un'importante questione sostanziale richiedente un sì o un no) è manifestamente senza senso in meccanica, perché dipende soltanto da come si sceglie di scrivere le equazioni." Von Neumann non contestava l'importanza che il finalismo ha in biologia: in questo ambito è impossibile pensare a concetti come quelli di 'funzione' e di 'forma' senza pensare simultaneamente al 'fine' che orienta la loro attività o la loro formazione. E tuttavia egli non nascondeva la speranza che, analogamente a quanto era accaduto in meccanica, anche qui il finalismo potesse essere fatto sparire come il residuo di una metafisica del passato: "Non sto cercando di scherzare sull'importanza di tenere presenti i principi teleologici quando si ha a che fare con la biologia; ma penso che non si è neppure iniziato a capire il loro ruolo in biologia, finché non si è compreso che in meccanica, se si possiede un pò di capacità matematica, il problema sparisce e diviene senza senso. Ed è del tutto possibile che l'approfondimento di un'altra area possa produrre la stessa situazione."

Da buon allievo di Hilbert, von Neumann era posseduto dall'idea che fosse possibile spiegare l'essenza della natura mediante la matematica. Nel constatare l'equivalenza fra metodo 'diretto' e 'indiretto' egli sembrava assumere un atteggiamento più equanime di quello di Mach — chiaramente orientato verso la metafisica causalista — dichiarando priva di senso l'alternativa fra causalismo e finalismo in meccanica. In realtà, non è difficile dimostrare che anche von Neumann nutriva una marcata propensione per l'approccio causale. Ad ogni modo, l'equivalenza fra metodo diretto e indiretto non è bastata a sopprimere la tendenza ad attribuire un valore finalistico ai principi variazionali. Così, il famoso matematico italiano Vito Volterra, nel 1937, dopo aver trovato una formulazione variazionale della sua trattazione 'diretta' (per equazioni differenziali) della teoria matematica della lotta fra specie animali, proclamava:

> «Queste equazioni […] possiamo […] ricondurle a un principio generale unico che è quello che si ritrova in un gran numero di casi, come principio supremo della natura. E' il principio di minimo secondo cui la natura agisce in modo da risparmiare il più possibile. Fermat l'aveva intravisto come base della propagazione della luce, Maupertuis come fondamento della meccanica ed evolvendo, dopo Hamilton, Jacobi e altri scienziati, esso sta penetrando in tutti i campi della filosofia naturale.»

A ciascuno la sua metafisica, quindi… Più seriamente, possiamo osservare che questa vicenda ci insegna che la scienza non riesce ad accontentarsi di *descrivere* i fenomeni ma conserva intatta l'aspirazione profonda a *spiegarli*, ovvero a svelare i meccanismi che governano la natura.

RIFERIMENTI

P. BRUNET, *Étude historique sur le principe de la moindre action*, Paris, Hermann, 1936.

H. H. GOLDSTINE, *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*, New York, Springer, 1980.

G. ISRAEL, *La visione matematica della realtà*, Roma-Bari, Laterza, 1996.

G. ISRAEL, A. MILLÁN GASCA, *Il mondo come gioco matematico. John von Neumann, scienziato del Novecento*, Roma, La Nuova Italia Scientifica, 1995.

GIORGIO ISRAEL, professore di Storia delle Matematiche all'Università di Roma "La Sapienza", membro del Comitato Esecutivo della International Commission on the History of Mathematics.