Serie di Fourier e di Fourier - Walsh

Alessandro Figà Talamanca   Enrico Rogora

15 gennaio 2005

Introduzione

Lo scopo di questi appunti è di fornire una trattazione il più possibile rigorosa della serie di Fourier e delle serie di Fourier-Walsh, diretta principalmente a studenti la cui preparazione in Analisi Matematica non va oltre quanto è possibile apprendere in due moduli semestrali di "calcolo". L'occasione per la redazione di questi appunti è stata l'insegnamento del modulo semestrale di Analisi Matematica II a studenti del corso di laurea in Informatica (ordinamento quinquennale). La materia trattata in questi appunti copriva oltre la metà dell'insegnamento, essendo la restante parte del modulo semestrale dedicata all'analisi matematica in più variabili.

Per chiarire il contesto ed i prerequisiti richiesti per la lettura di questi appunti dobbiamo precisare che nei due moduli semestrali di Analisi Matematica I che precedevano l'insegnamento oggetto di questi appunti, solo ad una minoranza di studenti (quelli che aspiravano ad un voto superiore a 27) era stato chiesto di approfondire concetti quali l'uniforme continuità o anche semplicemente, la condizione di Cauchy per le successioni di numeri reali.

Tra i teoremi fondamentali sulle funzioni continue era stato scelto il solo teorema degli zeri come paradigma di dimostrazione basata sul concetto di estremo superiore e sul concetto di limite. Questo ci ha portato a sviluppare una trattazione autosufficiente delle serie di Fourier che evita la nozione di convergenza uniforme. La relazione tra una funzione e la sua serie di Fourier, o serie di Fourier-Walsh è trattata in termini di convergenza punto per punto. A questo proposito abbiamo utilizzato però le recenti (1980 e 1984) dimostrazioni innovative di P. Chernoff, [C] e R. Redheffer, [Re],che consentono una notevole semplificazione rispetto alle dimostrazioni classiche basate su stime di integrali che coinvolgono il nucleo di Dirichlet.

Gli appunti riservano tre capitoli agli studenti desiderosi di affrontare una trattazione più approfondita (cioè, operativamente, gli studenti che aspiravano ad un voto superiore a 27). Viene introdotta nel capitolo 7 la nozione di convergenza uniforme delle successioni e serie di funzioni e nei capitoli 8 e 9 si tratta, rispettivamente, di convergenza uniforme delle serie di Fourie e delle serie di Fourier - Walsh. Per trattare la convergenza uniforme per queste ultime è necessario introdurre, in una forma appropriata, la nozione di uniforme continuità che è evitata invece nella trattazione generale.

L'ultimo capitolo è dedicato ad una trattazione molto sommaria dell'integrale di Fourier.

Può sembrare strano che in questo contesto così elementare si sia scelto di dare spazio ad una esposizione riguardante le serie di Fourier - Walsh. La nostra motivazione è stata duplice. Da un lato si è preso atto che sono proprio le serie di Fourier - Walsh, nella forma di "ondine", a svolgere un ruolo importante nelle applicazioni a problemi di immagazzinamento e trasmissione dei dati, che dovrebbero essere vicini agli informatici. Dall'altro si è ritenuto che l'introduzione di un sistema ortonormale diverso da quello trigonometrico potesse contribuire ad evidenziare il ruolo paradigmatico delle serie trigonometriche e delle stesse funzioni trigonometriche e e di giustificarne in tal modo l'importanza anche concettuale.

Ma l'innovazione che vogliamo proporre all'attenzione e alle critiche dei colleghi è quella di riservare, non tanto una parte del programma, quanto piuttosto gli approfondimenti del programma in termini di rigore e completezza ad una (esigua) minoranza degli studenti.

Questi appunti forniscono un esempio di applicazione di questo approccio anche a studenti che ne erano stati, per così dire, "vittime" l'anno precedente. La parte "difficile" degli appunti si rivolge infatti anche agli studenti che nell'anno precedente avevano preferito seguire il programma "ordinario", ed accontentarsi di un voto non superiore a 27.

Osserviamo infine che nella nostra trattazione abbiamo sistematicamente utilizzato la forma complessa delle serie di Fourier. Per questo è stato necessario premettere, per completezza, un capitolo sui numeri complessi, che erano stati trattati nel secondo modulo di Analisi I.

Nel testo sono inseriti numerosi esercizi che costituiscono parte integrante dell'esposizione. Gli esercizi sono di tipologie diverse: alcuni sono immediate applicazioni della teoria esposta, altri sviluppano alcuni argomenti complementari, altri infine hanno lo scopo di indurre il lettore ad approfondire aspetti sottili della teoria, facilmente trascurati in prima lettura. In appendice abbiamo anche inserito il testo e le soluzioni commentate degli esoneri che riguardano la parte del corso cui si riferiscono questi appunti. Abbiamo basato le prove di esonero su domande a risposta multipla perché ci è sembrato un buon modo per guidare gli studenti all'apprendimento della teoria. Risulta infatti che la domanda a risposta multipla stimola nello studente una riflessione sull'argomento cui si riferisce la domanda anche quando la sua preparazione non è ancora soddisfacente. Infatti la possibilità di confrontare le alternative, cercare la soluzione per esclusione, cercare appigli alla soluzione nel testo delle risposte è stimolante anche per lo studente che non sarebbe in grado di affrontare un esercizio ordinario e reagirebbe "lasciando perdere". Poiché la partecipazione degli studenti agli esoneri è stata molto elevata per tutta la durata del corso, ci sembra di aver aumentato il numero di studenti che hanno seguito il corso in maniera attiva, studiando lezione per lezione e non limitandosi a prendere appunti da leggere alla fine del corso. Non riteniamo comunque che la preparazione necessaria per superare i vari test a risposta multipla sia sufficiente per il superamento dell'esame e abbiamo chiesto ad ogni studente di sostenere anche una prova orale in cui mostrasse la piena conoscenza della teoria e dei procedimenti necessari per risolvere correttamente le domande poste negli esoneri (40 in totale), che a nostro avviso coprivano interamente la parte fondamentale del corso. Un ulteriore esame orale sulla teoria esposta nei capitoli 7-9 è stato richiesto a chi, avendo ottenuto una votazione compresa nel decile più alto della distribuzione, intendeva ottenere un voto superiore a 27.

Questi appunti non includono nessuna delle tante applicazioni delle serie e dell'integrale di Fourier. Suggeriamo il lettore interessato di consultare [EP] che fornisce anche un'interessante esposizione storica sugli sviluppi dell'analisi di Fourier e [DM] che comprende una lucida esposizione elementare della teoria delle armoniche sferiche.

Indice

Capitolo 1

I numeri complessi

Numeri complessi e loro operazioni

Una trattazione abbastanza completa delle funzioni dal punto di vista del calcolo infinitesimale (limiti, continuità, derivazione, integrazione)può essere svolta a partire dai numeri reali, senza introdurre altri "numeri". Eppure sappiamo che l'introduzione in qualche forma di altri numeri (i cosiddetti *numeri immaginari* o più precisamente i *numeri complessi*) è necessaria, o almeno opportuna, per trattare compiutamente le equazioni algebriche, anche solamente di secondo grado. In generale infatti, l'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a, b, c numeri reali ha soluzioni reali se e solo se $b^2 - 4ac \geq 0$. In particolare non esiste alcun numero reale x tale che $x^2 + 1 = 0$. Questa è una delle ragioni che ha portato all'introduzione prima di tutto di una soluzione *immaginaria*, indicata con i dell'equazione $x^2 + 1 = 0$, cioè di un numero i tale che $i^2 = -1$, e poi di un sistema numerico, formato da *combinazioni* dell'unità immaginaria i con i numeri reali. Si introducono perciò le espressioni $a + ib$, denominate *numeri complessi* sulle quali si opera come se si trattasse di polinomi di primo grado nellla variabile i, ponendo però $i^2 = -1$. Più precisamente definiamo quindi la somma ponendo

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \tag{1.1}$$

e il prodotto ponendo

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)^1 \tag{1.2}$$

[1] Infatti $(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + i^2 bd$, ed avendo convenuto di porre $i^2 = -1$ l'ultima espressione diventa $(ac - bd) + i(ad + bc)$.

Si verifica immediatamente che la somma gode delle stesse proprietà algebriche di cui gode la somma di numeri reali, e quindi l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un gruppo abeliano rispetto alla somma.

Per verificare che anche il prodotto gode delle stesse proprietà algebriche del prodotto tra numeri reali l'unica difficoltà consiste nel dimostrare che è possibile fare la divisione di numeri complessi, ovvero che per ogni coppia di numeri complessi $z = (a+ib)$ e $w = (c+id)$ tale che $w \neq 0$ è sempre possibile determinare un numero complesso $u = x + iy$ tale che $z = uw$. Questo porta alla ricerca delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} cx - dy &= a \\ dx + cy &= b \end{cases}$$

Il sistema è risolubile se e solo se il determinate della matrice dei coefficienti è non nullo, ovvero se e solo se $c^2 + d^2 \neq 0$. Pertanto, l'unico numero complesso non invertibile è lo zero. Risolvendo il sistema si ottengono le formule

$$\begin{cases} x &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \\ \\ y &= \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \tag{1.3}$$

A questa formula si poteva arrivare più semplicemente (presupponendo l'esistenza degli inversi) moltiplicando il numeratore e il denominatore della frazione al primo membro per $(c - id)$ e semplificando l'espressione che si ottiene.

Un caso speciale ma importante è la formula

$$\frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{c^2+d^2} \tag{1.4}$$

Con le operazioni di somma e prodotto che abbiamo introdotto l'insieme dei numeri complessi è un campo. Le operazioni estendono le ordinarie operazioni sui numeri reali, che si possono identificare con l'insieme dei numeri complessi aventi parte reale nulla. Si osservi però che a differenza del caso reale non è possibile definire sul campo dei numeri complessi un ordinamento che sia compatibile con le operazioni[2].

[2]Ad esempio non può essere definito un insieme di numeri complessi positivi che abbia la proprietà di essere chiuso rispetto alla somma e al prodotto e tale che per ogni numero complesso $z \neq 0$, uno solo dei due, z o $-z$ deve essere positivo. Infatti né i né $-i$ potrebbero appartenere ad un tale insieme.

Dato un numero complesso $z = a + ib$ il numero reale a si dice *parte reale* di z (e si denota $\mathbf{Re}(z)$) e il numero reale b si dice *parte immaginaria* di z (e si denota $\mathbf{Im}(z)$). Si definiscono due funzioni reali di variabile complessa ponendo $a = \mathbf{Re}(z)$ e $b = \mathbf{Re}(z)$. Due numeri complessi sono *uguali* se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria.

La definizione di un numero complesso come espressione della forma $a+ib$ suggerisce la sua rappresentazione come punto del piano reale. Questa rappresentazione si ottiene associando al numero complesso $a+ib$ il punto di coordinate (a, b) in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali che si suppone fissato. Le operazioni di somma e prodotto hanno un'interpretazione naturale in termini geometrici come vedremo nella sezione sulla rappresentazione geometrica dei numeri complessi.

In effetti si può dire che l'introduzione dei numeri complessi equivale a definire per i punti del piano le quattro operazioni somma, prodotto, differenza e divisione (per numeri diversi da zero) in modo tale che queste operazioni abbiano le stesse proprietà che hanno per i numeri reali[3].

Esercizio 1 *Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $x + ib$*

$$(-1 + 3i)^{-1}; \quad (i - 1)(i + 2)(i - 3); \quad \tfrac{i}{1+i};$$

Esercizio 2 *Si dimostri che*

$$\left(\frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 1$$

Coniugato e valore assoluto

Un'operazione importante che si può definire sui numeri complessi è quella di *coniugazione*, che consiste nel cambiare il segno alla parte immaginaria. Quindi, il *coniugato* del numero complesso $z = a + ib$ è il numero complesso $\overline{z} = a - ib$. La coniugazione lascia invariato un numero complesso se e solo se la sua parte immaginaria è nulla, ovvero se e solo se è reale. Inoltre rispetta le operazioni, nel senso che

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

[3] In linguaggio matematico, questo significa che i punti del piano cartesiano sono dotati di una struttura di campo. Si potrebbe anche dimostrare che nulla di analogo è possibile per i punti dello spazio tridimensionale.

Si osservi inoltre che se $z = a + ib$ allora $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Se identifichiamo un numero complesso con un punto del piano, come abbiamo dette brevemente nella sezione precedente, e come vedremo più diffusamente nella sezione successiva, $z\overline{z}$ rappresenta il quadrato della lunghezza del vettore che congiunge l'origine con il punto z. La sua radice quadrata si chiama *modulo* di z e si denota $|z|$, quindi abbiamo

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Il modulo di un prodotto è semplicemente il prodotto dei moduli mentre l'espressione per il modulo della somma e della differenza è più complicata.

Esercizio 3 *Si dimostri che*

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\boldsymbol{Re}(z \cdot \overline{w})$$

Dall'interpretazione geometrica dei numeri complessi segue che per i loro moduli deve valere la disuguaglianza triangolare, ovvero valgono le classiche disuguaglianze

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Esercizio 4 *Si verifichi che i valori di*

$$\frac{z}{z^2 + 1}$$

per $z = x + iy$ e $z = x - iy$ sono coniugati

La rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali il numero complesso $a + ib$ si può rappresentare come il punto di coordinate (a, b), o meglio come il vettore che congiunge l'origine con il punto di coordinate (a, b). L'addizione di due numeri complessi corrisponde all'addizione di vettori, fatta tramite la regola del parallelogramma.

Per dare un'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi introduciamo le coordinate polari. Nel piano con un riferimento cartesiano ortogonale fissato è completamente determinato anche un riferimento polare, ottenuto scegliendo il cerchio Γ di centro O e raggio OU, orientato in accordo con l'orientazione del piano[4]. È possibile, utilizzando questo sistema

[4] O rappresenta il punto origine e U rappresenta il punto unità del sistema di riferimento cartesiano.

di riferimento polare, associare ad ogni punto P del piano complesso diverso dall'origine una coppia (ρ, T) con ρ numero reale positivo e T punto del cerchio Γ nel modo seguente. Il numero ρ esprime il rapporto tra la lunghezza del segmento OP e la lunghezza del segmento OU. Per definire T, sia s_{OP} la semiretta che congiunge O con P. Tale semiretta interseca Γ nel punto T. Al punto T possiamo sostituire un numero che rappresenta la lunghezza θ di uno degli archi UT, e possiamo sempre limitarci a considerare $\theta \in [0, 2\pi)$[5].

Nel sistema di riferimento polare fissato, ad ogni punto P diverso dall'origine sono associate le sue *coordinate polari* (ρ, θ), dove ρ si dice il *modulo* e θ si dice l'*argomento* di P. Per ogni punto P diverso dall'origine le coordinate cartesiane (a, b) sono legate alle coordinate polari (ρ, θ) dalle formule

$$\begin{cases} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{cases}$$

Quindi per ogni numero complesso possiamo scrivere

$$a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.5}$$

con a, b, ρ, θ legate come nelle formule di trasformazione di cui sopra.

Siano dati due numeri complessi $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $z' = a' + ib' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$. Allora

$$z \cdot z' = \rho \cdot \rho'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'))$$

e quindi, usando le formule per il seno e il coseno di una somma, possiamo scrivere

$$z \cdot z' = \rho \cdot \rho'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) \tag{1.6}$$

abbiamo quindi dimostrato il seguente fatto.

Proposizione 1 *L'argomento di un prodotto di numeri complessi è uguale alla somma degli argomenti dei fattori e il modulo di un prodotto di numeri complessi è uguale al prodotto dei moduli dei fattori.*

Esercizio 5 *Si dimostri che i punti u, w, z sono vertici di un triangolo equilatero se e solo se $u^2 + w^2 + z^2 = uw + wz + zu$*

[5]Per trattare la forma polare risulta più conveniente associare a T l'intero insieme $[\theta]$ delle lunghezze di tutti i possibili archi UT. Scelto un valore θ gli altri valori dell'insieme $[\theta]$ sono tutti e soli i numeri della forma $\theta + 2k\pi$, al variare di k nell'insieme degli interi. L'insieme $[\theta]$ è una *classe di equivalenza* di numeri reali modulo la relazione di equivalenza che identifica due numeri se e solo se la loro differenza è un multiplo intero di 2π. Sull'insieme di queste classi di equivalenza si può definire una somma ponendo $[\theta] + [\theta'] = [\theta + \theta']$. Si dimostri per esercizio che la definizione data è ben posta, ovvero non dipende dai rappresentati scelti per rappresentare le classi.

Radici di numeri complessi

Abbiamo visto nella sezione precedente come l'espressione per il prodotto di numeri complessi assuma la sua forma più semplice e geometricamente significativa utilizzando le coordinate polari. In particolare, se $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ la formula per le potenze intere di w è

$$w^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

Si osservi che la formula vale per tutti i valori interi di n, anche negativi. In particolare, per $r = 1$ otteniamo

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = (\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

Per trovare le radici complesse di un numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ dobbiamo risolvere l'equazione

$$w^n = z$$

Se poniamo $w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, l'equazione assume la forma

$$r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

da cui si ottiene immediatamente la soluzione

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

dove la radice che appare è la radice positiva n-esima del numero positivo ρ. *Ma questa non è l'unica soluzione!* Infatti l'equazione per le radici è soddisfatta anche (e solo) se $n\phi$ differisce da θ per un multiplo di 2π, e quindi se e solo se

$$\phi = \frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}$$

dove k è un intero. Si ottengono valori distinti di w per $k = 0, 1, \ldots, n-1$ e quindi l'insieme completo delle radici del numero z è[6]

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (1.7)$$

Il caso $z = 1$ è particolarmente importante. Le radici dell'equazione $w^n = 1$ si chiamano *radici n-esime dell'unità*. Posto

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

[6] Questa è la *formula di de Moivre.*

le radici n-esime dell'unità sono quindi

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

Si noti che dalla formula segue che i punti del piano corrsipondenti alle varie radici n-esime dell'unità si trovano sulla circonferenza unitaria e determinano i vertici di un poligono regolare di n lati. Uno dei vertici di questo poligono è sempre il punto unità.

Esercizio 6 *Applicare quanto è stato detto in questa sezione per calcolare* $\cos 3\phi$*, cos*4ϕ *e* $\sin 5\phi$ *in funzione di* $\cos\phi$ *e* $\sin\phi$

Capitolo 2

Funzioni periodiche

Sia f una funzione definita sulla retta reale $\mathbb{R}$, e $T > 0$ un numero reale. Si dice che f è *periodica di periodo* T se per ogni $x \in \mathbb{R}$ risulta,

$$f(x+T) = f(x).$$

Si osservi che se f è periodica di periodo T, allora f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Esempi importanti di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$, che hanno periodo 2π. Osserviamo anche che $\sin 2\pi x$ e $\cos 2\pi x$ sono periodiche di periodo 1. In effetti, se $T > 0$ è un numero positivo qualsiasi le funzioni $\cos(\frac{2\pi}{T}x)$ e $\sin(\frac{2\pi}{T}x)$ sono periodiche di periodo T. Più in generale se f è una funzione periodica di periodo $S > 0$ e $T > 0$ allora la funzione $g(x) = f(\frac{S}{T}x)$ è periodica di periodo T. Viceversa ogni funzione g, periodica di periodo T può essere ottenuta dalla funzione $f(x) = g(\frac{T}{S}x)$. In altre parole tutte le funzioni periodiche di periodo T possono essere facilmente ottenute con un semplice cambiamento di scala dalle funzioni periodiche di periodo S, con S fissato. Questo fatto, e l'importanza delle funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ giustifica la scelta di studiare prevalentemente le funzioni periodiche di periodo 2π. È opportuno intanto rivedere le proprietà speciali delle funzioni $\cos x$ e $\sin x$, che danno luogo alle cosiddette formule trigonometriche. Il modo più semplice di ricordare le formule trigonometriche è quello di considerare la funzione di variabile reale e a valori nel piano complesso definita dalla formula:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{2.1}$$

ed osservare che

$$e^{i(x+t)} = e^{ix}e^{it}. \tag{2.2}$$

Dalla (2.1) segue, in particolare, che

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

e

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Le formule di addizione e tutte le altre formule trigonometriche seguono allora direttamente dalla (2.2).

Esercizio 7 *Sia $P(X,Y)$ un polinomio a coefficienti reali nelle due variabili X ed Y. Sia $f(x) = P(\cos x, \sin x)$. Dimostrare che $f(x)$ è una combinazione lineare, a coefficienti reali, di funzioni del tipo $\cos kx$ e $\sin kx$, con k intero positivo. In altre parole dimostrare che*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx. \tag{2.3}$$

Dimostrare anche che il grado del polinomio P coincide con l'indice massimo dei coefficienti a_k o b_k diversi da zero.

Una espressione come la precedente si dice *polinomio trigonometrico.*

Esercizio 8 *Mostrare che ogni polinomio trigonometrico della forma (2.3) può anche essere scritto nella forma*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{2.4}$$

con c_k numeri complessi, con la proprietà che c_k e c_{-k} sono tra loro coniugati. Viceversa, ogni espressione del tipo (2.4) può essere scritta nella forma (2.3) purché $c_k = \overline{c_{-k}}$. Trovare l'espressione di c_k in termini di a_k e b_k, quando la (2.3) coincide con la (2.4)

Ovviamente ogni polinomio trigonometrico è una funzione periodica di periodo 2π. Possiamo chiederci se è vero il viceversa, cioè se possiamo trovare funzioni periodiche di periodo 2π che non siano polinomi trigonometrici. Osserviamo che se f è una qualsiasi funzione, definita nell'intervallo $[0, T]$, con la proprietà che $f(0) = f(T)$, allora si può definire una funzione periodica di periodo T che coincide con f nell'intervallo $[0, T]$. Infatti ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ si può scrivere come $x = t + kT$, con $t \in [0, T]$ e $k \in \mathbb{Z}$. Questa scrittura è unica per tutti i punti che non sono multipli interi di T. Possiamo allora definire $F(x) = f(t)$, dove t è un numero reale $0 \leq t \leq T$, tale che esista un numero intero k per il quale $x = t + kT$. La definizione non è ambigua perché $F(kT) = f(0) = f(T)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. La funzione F è periodica di periodo T e coincide con f nell'intervallo $[0, T]$.

Esercizio 9 *Dimostrare che nell'ipotesi che $f(0) = f(T)$ la definizione appena data della funzione F non è ambigua. Dimostrare anche che la definizione non è una vera definizione se $f(0) \neq f(T)$.*

Queste considerazioni si applicano in particolare al caso $T = 2\pi$. Ne segue, che, ad esempio, a partire dalla funzione $f(x) = x(x - 2\pi)$, definita (e non positiva) nell'intervallo $[0, 2\pi]$, ed avente uguali valori agli estremi dell'intervallo, si può costruire una funzione periodica di periodo 2π che non è un polinomio trigonometrico.

Esercizio 10 *Sia $f(x) = x(x - 2\pi)$. Osservare che $f(0) = f(2\pi)$. Sia F la funzione definita su tutta la retta reale e periodica, di periodo 2π che coincide con f sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Dimostrare che F non è un polinomio trigonometrico.*

Abbiamo visto nell'Esercizio 9 che una funzione che abbia valori diversi agli estremi dell'intervallo $[0, T]$ non è la restrizione a questo intervallo di una funzione periodica di periodo T, semplicemente perché una funzione periodica di periodo T assume gli stessi valori agli estremi di ogni intervallo di lunghezza T. Tuttavia, se partiamo da una funzione f definita sull'intervallo *semiaperto* $[0, T)$, allora è sempre possibile definire una funzione periodica di periodo T che coincida con f nell'intervallo $[0, T)$. Infatti ogni numero reale x può scriversi, *in un solo modo*, come $x = t + kT$ con $0 \leq t < T$ e $k \in \mathbb{Z}$. In altre parole la funzione f, definita nell'intervallo $[0, T]$, potrà essere estesa ad una funzione periodica di periodo T a patto di cambiare il suo valore in T, ponendolo uguale al suo valore in 0. È evidente che lo stesso risultato potrà ottenersi restringendo f all'intervallo *semiaperto* $(0, T]$, ovvero, cambiando il suo valore in 0, per renderlo uguale al suo valore in T.

Ad esempio la funzione $f(x) = x$, definita nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$, può essere estesa ad una funzione periodica T che vale zero in tutti i punti del tipo $2k\pi$. Si deve osservare però che la funzione periodica di periodo T così ottenuta non è più continua. Essa ha discontinuità di prima specie in tutti i multipli interi di 2π, e infatti $\lim_{x \to 2k\pi^-} = 2\pi \neq F(2k\pi) = 0$.

Esercizio 11 *Sia f una funzione continua nell'intervallo semiaperto $[0, T)$. Dimostrare che f è la restrizione di una funzione continua F periodica di periodo T se e solo se $lim_{x \to T} f(x) = f(0)$. Dimostrare anche che se $lim_{x \to T} f(x)$ esiste ma è $\neq 0$, allora la sua estensione periodica F ha solo discontinuità di prima specie nei multipli interi di T.*

L'ultimo esercizio chiarisce anche che una funzione continua f definita sull'intervallo $[0, T]$ può essere estesa ad una funzione periodica e *continua* se $f(0) = f(T)$, mentre se non si verifica questa uguaglianza, nessuna ridefinizione di f nel punto 0 o nel punto T consentirà di estendere f ad una funzione periodica senza perdere la continuità.

Teorema 1 . *Sia f una funzione periodica, di periodo T, integrabile nell'intervallo $[0, T]$, allora, per ogni $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^T f(x)dx = \int_0^T f(x+a)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Ponendo $x + a = u$ si ottiene:

$$\int_0^T f(x+a)dx = \int_a^{a+T} f(u)du =$$

$$\int_a^T f(u)du + \int_T^{T+a} f(u)du =$$

$$\int_a^T f(u)du + \int_T^{T+a} f(u-T)du =$$

$$\int_a^T f(u)du + \int_0^a f(u)du =$$

$$\int_0^T f(u)du = \int_0^T f(x)dx.$$

Osserviamo che il teorema appena dimostrato implica che l'integrale su qualsiasi intervallo di lunghezza T di una funzione periodica di periodo T ha un valore indipendente dall'intervallo. In altre parole per ogni $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Esercizio 12 *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo T. Qual è la condizione perché la funzione $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ sia a sua volta periodica di periodo T?*

Capitolo 3

Coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione periodica

Sappiamo dall'Esercizio 10 del capitolo 1, che non tutte le funzioni continue e periodiche di periodo 2π sono polinomi trigonometrici. Esistono quindi funzioni continue e periodiche che non sono della forma

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Mostreremo tuttavia che le funzioni continue e periodiche che hanno derivata prima continua sono esprimibili attraverso una *serie trigonometrica*, cioè una serie del tipo

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{3.1}$$

In altre parole, se f è una funzione periodica con derivata prima continua, allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Risulterà che i coefficienti c_k sono dati dalla successiva formula (3.2).

Se la funzione f è a valori reali, allora i coefficienti c_k hanno la proprietà che $c_k = \overline{c_{-k}}$ e pertanto le somme parziali $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ possono anche essere scritte come:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Questo significa che una funzione a valori reali f può essere espressa come la serie:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

In questi appunti siamo interessati prevalentemente, se non unicamente, a funzioni a valori reali. Tuttavia è conveniene lasciare aperta la possibilità che le funzioni considerate siano a valori complessi. In molti casi questo ci consentirà una semplificazione dei calcoli e delle scritture, proprio come l'introduzione della funzione a valori complessi $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, ci consente di riassumere nell'unica formula $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ tutte le formule trigonometriche relative alle funzioni $\cos x$ e $\sin x$. Una funzione a valori complessi può sempre essere trattata come una coppia di funzioni a valori reali. La coppia è costituita dalla parte reale e dalla parte immaginaria della funzione data. Le operazioni di derivazione ed integrazione si applicano separatamente a parte reale e parte immaginaria, cioè alle due componenti della coppia. Per arrivare ai risultati qui anticipati, cominciamo con l'identificazione dei coefficienti c_k della serie (3.1). La definizione che segue si applica a funzioni molto più generali di quelle derivabili con continuità. E infatti perché questa definizione abbia senso basterà supporre che f sia una funzione periodica integrabile sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

Definizione 1 *Sia f una funzione periodica di periodo 2π, integrabile sull'intervallo $[0, 2\pi]$. I coefficienti di Fourier di f sono i numeri complessi definiti da*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{3.2}$$

Esercizio 13 *Dimostrare che se f è reale, allora $\hat{f}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$.*

Esercizio 14 *Dimostrare che se f è integrabile in un intervallo chiuso e limitato e g è continua nello stesso intervallo, allora il prodotto fg è integrabile.*

L'esercizio precedente chiarisce che l'ipotesi di integrabilità della funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è sufficiente a garantire che la definizione abbia senso. Osserviamo però che nell'esercizio si parla di funzioni a valori reali, mentre la funzione e^{-inx} e quindi la funzione $f(x)e^{-inx}$ sono a valori complessi. E' sufficiente tuttavia scrivere $f(x)e^{-inx} = f(x)\cos nx - if(x)\sin nx$ ed integrare separatamente le parti reale ed immaginaria di $f(x)e^{-inx}$ per poter applicare l'esercizio a questo caso. Questo ci consente di considerare i coefficienti di Fourier e la serie (3.1) anche per funzioni che non sono derivabili con continuità e che magari non sono nemmeno continue. E infatti la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}.$$

rappresenta, in qualche modo, la funzione f in condizioni ancora più generali e certamente più generali di quelle che saranno trattate in questi appunti. Per una trattazione moderna abbastanza completa, e rivolta alle applicazioni, si può consultare la monografia [DM].

In pratica ci limiteremo a considerare funzioni che sono continue eccetto al più in un numero finito di punti contenuti nell'intervallo $[0, 2\pi]$, e supporremo anche che questi punti siano *discontinuità di prima specie*, cioè in corrispondenza dei punti di discontinuità esistano i limiti a destra e a sinistra. Ovviamente, poiché si tratta di funzioni periodiche, le discontinuità, se esistono, si ripeteranno in ogni intervallo del tipo $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$. Il caso tipico è quello di una funzione periodica ottenuta da una funzione continua sull'intervallo $[0, 2\pi]$, cambiandone il valore in uno dei due estremi in modo che i valori ai due estremi risultino uguali. In questo modo si introduce una discontinuità che si ripete infinite volte sulla retta reale. Ad esempio è interessante considerare i coefficienti ottenuti dalla (3.2) e la corrispondente serie (3.1) quando f è la funzione periodica, di periodo 2π che vale $f(x) = x$ nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$ e che pertanto vale zero su tutti i multipli interi di 2π. Consideriamo ora alcune proprietà dei coefficienti di Fourier.

Teorema 2 *Sia f continua e periodica di periodo 2π, per $y \in \mathbb{R}$, sia $f_y(x) = f(x-y)$, allora*

$$\hat{f}_y(n) = e^{-iny}\hat{f}(n). \tag{3.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema alla fine del capitolo precedente

$$\hat{f}_y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-in(x+y)}dx = e^{-iny}\hat{f}(n).$$

Teorema 3 *Sia f una funzione continua, periodica e differenziabile con derivata continua. Sia Df la derivata di f, allora,*

$$\widehat{Df}(n) = in\hat{f}(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Integrando per parti, e sfruttando la periodicità della funzione $f(x)e^{inx}$, si ottiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Df(x)e^{-inx}dx = \frac{f(x)e^{-inx}}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} - \frac{(-in)}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = in\hat{f}(n).$$

Il Teorema che segue, noto come *disuguaglianza di Bessel*, stabilisce una importante relazione tra i coefficienti di Fourier di una funzione e l'integrale del quadrato della funzione stessa. Vale la pena di osservare che la disuguaglianza di Bessel è in realtà un'uguaglianza. In questi appunti si darà una dimostrazione di questo fatto (Teorema 18) con ipotesi che non sono le più generali possibili.

Teorema 4 *Sia f una funzione periodica ed integrabile nell'intervallo* $[0, 2\pi]$, *allora*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo prima che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Questo risultato segue scrivendo $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ e calcolando direttamente l'integrale di $\cos nx$ e di $\sin nx$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Consideriamo allora la somma parziale

$$S(f, n) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

e osserviamo che:

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x) - S(f, n))^2 dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f(x)^2 - 2f(x)S(f, n) + S(f, n)^2)dx.$$

Tuttavia,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)S(f, n)dx = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}dx =$$

$$\sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)\hat{f}(-k) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)} = \sum_{-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Osserviamo anche che per le relazioni (3.4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(f,n)^2 = \sum_{h,k=-n}^{n} \hat{f}(h)\hat{f}(k)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(h+k)x}dx = \sum_{-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2.$$

Questo significa che la disuguaglianza precedente si riduce a

$$0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx - \sum_{-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2,$$

o, equivalentemente, a

$$\sum_{-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx.$$

Da quest'ultima disuguaglianza segue la tesi del teorema considerando il limite per $n \to \infty$.

Corollario 5 *Se f è una funzione periodica, integrabile nell'intervallo* $[0, 2\pi]$,

$$\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La serie $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ converge e pertanto

$$\lim_{|n|\to\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 0,$$

da cui segue direttamente la tesi.

Esercizio 15 *Dimostrare l'uguaglianza di Bessel per i polinomi trigonometrici.*

Capitolo 4

Convergenza puntuale delle serie di Fourier

In questo capitolo e nel successivo dimostreremo i risultati di convergenza preannunciati nel precedente capitolo.

Teorema 6 *Sia f una funzione continua e periodica di periodo 2π. Supponiamo che esista la derivata di f in un punto $y \in \mathbb{R}$. Allora la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{iny}$ converge al valore $f(y)$.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo prima che $y = 0$. Dimostriamo cioè che se f è derivabile nel punto 0 allora,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = f(0).$$

Consideriamo, per $x \neq 2k\pi$, la funzione

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{e^{ix} - 1}.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x - 1 + i \sin x} = \frac{Df(0)}{i} = -iDf(0).$$

Pertanto la funzione g può essere definita in 0 e in tutti i multipli interi di 2π in modo che risulti continua. Basta assegnarle in questi punti il valore $-iDf(0)$. Osserviamo ora che

$$f(x) = f(0) + e^{ix}g(x) - g(x). \tag{4.1}$$

Se calcoliamo i coefficienti di Fourier dei due lati della (4.1), otteniamo:

$$\hat{f}(n) = f(0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-i(n-1)x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}dx.$$

Nel caso $n \neq 0$, si ottiene quindi

$$\hat{f}(n) = \hat{g}(n-1) - \hat{g}(n). \tag{4.2}$$

Mentre nel caso $n = 0$ si ottiene invece

$$\hat{f}(0) = f(0) + \hat{g}(-1) - \hat{g}(0). \tag{4.3}$$

Combinando la (4.2) e la (4.3) e sommando da $-N$ ad N, si ottiene

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = f(0) + \sum_{n=-N}^{N} (\hat{g}(n-1) - \hat{g}(n)) = f(0) + \hat{g}(-N-1) - \hat{g}(N).$$

Sappiamo però che g è una funzione continua, vale quindi per i coefficienti di Fourier di g la disuguaglianza di Bessel e pertanto

$$\lim_{N\to\infty} \hat{g}(N) = \lim_{N\to\infty} \hat{g}(-N-1) = 0.$$

Ne segue che

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = f(0).$$

Abbiamo quindi dimostrato la tesi nel caso $y = 0$. Se $y \neq 0$, consideriamo la funzione $f_{-y}(x) = f(x+y)$. Se f è differenziabile in y, allora f_{-y} è differenziabile in zero. Si applica quindi la prima parte della dimostrazione. Osserviamo però che $\hat{f}_{-y}(n) = e^{iny}\hat{f}(n)$. Pertanto quanto dimostrato nella prima parte della dimostrazione fornisce direttamente

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{iny} = f(y).$$

Esercizio 16 . *Dimostrare la seguente versione del teorema precedente: Sia f è una funzione integrabile, supponiamo che $y \in \mathbb{R}$ e che la funzione*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

come funzione di x, risulti integrabile. Allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{iny} = f(y).$$

[Suggerimento: seguire la dimostrazione del teorema utilizzando il fatto che se g è una funzione integrabile nell'intervallo $[0, 2\pi]$, allora i coefficienti di Fourier di g tendono a zero all'infinito.]

Esercizio 17 . *Supponiamo che f sia una funzione periodica e che esista $K > 0$ tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, allora f è continua in ogni punto e, in ogni punto la serie di Fourier di f converge al valore di f.*

Esercizio 18 . *Supponiamo che f sia una funzione continua e derivabile eccetto in un numero finito di punti dell'intervallo $[0, 2\pi]$, e supponiamo la derivata di f sia limitata. Dimostrare che la serie di Fourier di f converge al valore di f in ogni punto in cui f è continua.*

Esercizio 19 *Trovare i coefficienti di Fourier della funzione f che coincide con la funzione $f(x) = x$ nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$ ed è periodica di periodo 2π.*

Esercizio 20 *Sia $[a, b]$ un intervallo contenuto nell'intervallo semiaperto $[0, 2\pi)$, e sia f la funzione periodica che sull'intervallo $[0, 2\pi)$ coincide con la funzione caratteristica dell'intervallo $[a, b]$. Calcolare i coefficienti di Fourier di f.*

Esercizio 21 *Siano f e g funzioni continue e periodiche, di periodo 2π. Definiamo la funzione*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)dt. \tag{4.4}$$

Dimostrare che $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$. Dimostrare che se $f(x) = e^{inx}$ allora $f * g(x) = \hat{g}(n)e^{inx}$.

Esercizio 22 *Sia $\mathbb{D}_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$, e sia f una funzione continua e periodica. Dimostrare che*

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx} = \mathbb{D}_n * f(x)$$

Dimostrare anche che $\mathbb{D}_n(0) = 2n + 1$ *e che, per* $x \neq 0$,

$$\mathbb{D}_n(x) = \frac{\sin\,(n + \frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

La funzione $\mathbb{D}_n(x)$ si chiama *nucleo di Dirichlet* e riveste un ruolo importante nelle trattazioni classiche delle serie di Fourier.

Capitolo 5

Convergenza delle serie di Fourier nelle discontinuità di prima specie

Utilizzeremo in questo capitolo la forma seguente del teorema 6 dimostrato nel capitolo precedente, che era stata proposta come esercizio (esercizio 16).

Teorema 7 . *Sia f una funzione periodica di periodo 2π, integrabile sull'intervallo $[0, 2\pi]$. Supponiamo che per $y \in \mathbb{R}$, la funzione*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

risulti integrabile. Allora

$$f(y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{iny}.$$

Si osservi che quando, in queste note, si parla di integrabilità, si tratta di integrabilità secondo Riemann, che, per definizione, implica la limitatezza sull'intervallo considerato. Ricordiamo anche che una funzione limitata e continua eccetto che in un numero finito di punti in un intervallo, risulta integrabile secondo Riemann, e che una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[0, 2\pi]$ può essere estesa ad una funzione periodica su tutto $\mathbb{R}$ purché, eventualmente ne si ridefinisca il valore in uno degli estremi dell'intervallo. Ma poiché i coefficienti di Fourier di una funzione non dipendono dal valore di una funzione in un punto, si può legittimamente parlare di coefficienti di Fourier e serie di Fourier di una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Lemma 1 *Siano a e b due numeri reali qulsiasi e sia $f_{(a,b)}$ una funzione periodica che vale a nell'intervallo $(-\pi, 0)$ e vale b nell'intervallo $(0, \pi)$, (il suo valore nei multipli interi di π non influisce sulla conclusione del teorema e può essere un valore qualsiasi). Allora*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{(a,b)}(n) = \frac{a+b}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la funzione $h(x) = f_{(a,b)}(x) - \frac{a+b}{2}$. Osserviamo che $h(-x) = f_{(b,a)}(x) - \frac{a+b}{2}$, dove $f_{(b,a)}$ è la funzione che si ottiene da $f_{(a,b)}$ invertendo il ruolo di a e b. Ma

$$a - \frac{a+b}{2} = -(b - \frac{a+b}{2}).$$

Pertanto $h(-x) = -h(x)$. Cioè h è una funzione dispari. Questo significa che nella serie di Fourier di h compaiono solo seni e che le somme parziali della serie di Fourier si annullano in zero. In altre parole, per $n > 1$,

$$0 = \sum_{k=-n}^{n} \hat{h}(n) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_{(a,b)}(n) - \frac{a+b}{2}.$$

Questo prova la tesi.

Teorema 8 *Supponiamo che f sia una funzione periodica, integrabile nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Supponiamo che in un punto $y \in [0, 2\pi]$ la funzione f abbia una discontinuità di prima specie, esistano cioè i limiti*

$$\lim_{x \to y+} f(x) = f^+(y)$$

e

$$\lim_{x \to y-} f(x) = f^-(y).$$

Supponiamo inoltre che esistano i limiti

$$\lim_{x \to y^+} \frac{f(x) - f^+(y)}{x - y}$$

e

$$\lim_{x \to y^-} \frac{f(x) - f^-(y)}{x - y}.$$

Allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{iny} = \frac{f^+(y) + f^-(y)}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che $y = 0$. Dobbiamo allora dimostrare che, nelle ipotesi del teorema,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) = \frac{f^{+}(0) + f^{-}(0)}{2}.$$

Poniamo $a = f^{-}(0)$ e $b = f^{+}(0)$. Consideriamo la funzione $f_{(a,b)}$, definita nell'enunciato del Lemma precedente. Osserviamo che la funzione definita come $g(x) = f(x) - f_{(a,b)}$, per $x \neq 0$, e $g(0) = 0$ soddifa alle ipotesi del Teorema 7, cioè la funzione

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0},$$

è integrabile. Pertanto si applica il Teorema 7, con $y = 0$ e risulta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) = 0.$$

D'altra parte

$$f = g + f_{(a,b)}.$$

Ne segue che

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{(a,b)}(n) = \frac{f^{+}(0) + f^{-}(0)}{2}.$$

Il caso $y \neq 0$ viene trattato, come nella dimostrazione del 7, considerando la funzione $f_{-y}(x) = f(x + y)$. I coefficienti di Fourier di f_{-y} sono $\hat{f}_{-y}(n) = e^{iny}\hat{f}(n)$. E pertanto, tenuto conto che il comportamento di f in un intorno di y è esattamente il comportamento di f_{-y} in un intorno di 0, si ottiene:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{iny} = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-y}(n) = \frac{f_{-y}^{+}(0) + f_{-y}^{-}(0)}{2} = \frac{f^{+}(y) + f^{-}(y)}{2}.$$

La dimostrazione data in questi appunti dei teoremi di convergenza, Teorema 6 e Teorema 7, è stata trovata da Paul Chernoff, che l'ha pubblicata nel lavoro [C]

La dimostrazione del Teorema 8 è dovuta a Ray Redheffer ed è pubblicata nel lavoro [Re]

Capitolo 6

Funzioni di Rademacher e funzioni di Walsh

Nella trattazione delle serie di Fourier abbiamo tacitamente utilizzato due proprietà importanti delle funzioni e^{inx}. La prima proprietà è che il prodotto di due funzioni di questo tipo è una funzione dello stesso tipo: $e^{ikx}e^{ihx} = e^{i(k+h)x}$. Questa proprietà fa sì che queste funzioni formino un *gruppo* rispetto alla moltiplicazione punto per punto.

Esercizio 23 *Dimostrare che le funzioni del tipo e^{inx} formano un gruppo rispetto alla moltiplicazione punto per punto. Dimostrare che il gruppo è isomorfo al gruppo dei numeri interi $\mathbb{Z}$.*

La seconda importante proprietà è data dalle cosiddette *relazioni di ortogonalità*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m \end{cases}$$

In questo capitolo ci proponiamo di studiare un *sistema* di funzioni, definite sull'intervallo $[0, 1]$ (il cosiddetto *sistema di Walsh*) per il quale valgono queste due proprietà. Saranno quindi definite, con riferimento a questo sistema, serie analoghe a quelle di Fourier. Queste serie sono comunemente note come le *serie di Fourier-Walsh* (oppure *serie di Paley-Walsh*). Lo studio delle serie di Fourier-Walsh costituisce la base teorica per quelle particolari espansioni in serie di funzioni che si utilizzano per l'immagazzinamento e la trasmissione dei dati.

Esercizio 24 *Dimostrare le relazioni di ortogonalità.*

Definizione 2 *Un sistema ortogonormale nell'intervallo* $[a,b]$ *è un insieme di funzioni* $\{u_n\}$ *(che possono prendere valori complessi) che soddisfa alle relazioni di ortogonalità:*

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b u_n(x)\overline{u_m(x)}dx = \begin{cases} 0 & se\ n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Esercizio 25 *Dimostrare che l'insieme costituito da tutte le funzioni del tipo* $\sqrt{2}\cos kx$ *e* $\sqrt{2}\sin kx$, *al variare di* k *tra gli interi non negativi, è un sistema ortonormale nell'intervallo* $[0,2\pi]$.

Esercizio 26 *Sia* $\{u_n\}$ *un sistema ortonormale nell'intervallo* $[a,b]$. *Sia* f *una funzione integrabile su* $[a,b]$ *(non necessariamente una funzione reale). Sia*

$$a_n = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\overline{u_n(x)}dx.$$

Dimostrare la disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_n |a_n|^2 \leq \frac{1}{(b-a)}\int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

(Osservare che la dimostrazione fornita per il sistena $\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$, *non si applica direttamente, perché riguardava solo le funzioni a valori reali e sfruttava il fatto che* $\hat{f}(k) = \overline{\hat{f}(-k)}$.*)*

Esercizio 27 *Un insieme finito di funzioni a valori reali,* $f_1 \ldots f_n$, *definite su un intervallo* $[a,b]$ *si dice linearmente indipendente se la condizione*

$$\lambda_1 f_1(x) + \ldots \lambda_n f_n(x) \equiv 0,$$

con $\lambda_j \in \mathbb{R}$, *implica che, per ogni* $j = 1, \ldots n$, $\lambda_j = 0$. *Dimostrare che ogni sottoinsieme finito di un sistema ortonormale di funzioni reali è linearmente indipendente*

Esercizio 28 *Definire la nozione di indipendenza lineare per funzioni a valori complessi e dimostrare per sistemi ortonormali a valori complessi l'analogo dell'esercizio precedente.*

Passiamo ora alla definizione del sistema ortonormale di Walsh, sull'intervallo $[0,1]$, per questo cominceremo a definire le cosiddette funzioni di Rademacher.

La funzione di Rademacher di indice zero $r_0(x)$ è la funzione identicamente uno su tutto l'intervallo. La funzione $r_1(x)$, per definizione, vale 1 nell'intervallo $[0, \frac{1}{2})$, e vale -1 nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$. La funzione di Rademacher, $r_2(x)$ vale 1 nell'intervallo $[0, \frac{1}{4})$, vale -1 nel successivo intervallo semiaperto $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, vale ancora 1 nell'intervallo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ed infine vale -1 nell'intervallo $[\frac{3}{4}, 1]$. In generale la k-esima funzione di Rademacher è definita come la funzione che assume alternativamente i valori 1 e -1 sugli intervalli aperti della partizione dell'intervallo $[0, 1]$ in 2^k intervalli di uguale lunghezza, e che negli estremi di questi intervalli risulta continua a destra, ma non a sinistra (con la singola eccezione del punto estremo 1). Osserviamo che $r_k^2(x) \equiv 1$, ed anche che $r_k(x)$ può essere definita, come il segno dell'espressione $\sin 2^k \pi x$, nei punti dove quest'ultima espressione è definita (cioè nei punti in cui $\sin 2^k \pi x$ non si annulla.)

Definizione 3 . *Fissato un intero positivo n, sia $n = 2^{k_1 - 1} + \cdots + 2^{k_h - 1}$ l'espressione in forma diadica di n. La n-esima funzione di Walsh è il prodotto $w_n = r_{k_1} \ldots r_{k_h}$. Per completare la definizione del sistema si definisce $w_0(x) = r_0$, cioè come la funzione identicamente uno.*

Osserviamo che, secondo la definizione precedente, e per $k \geq 1$, la funzione di Walsh $w_{2^{k-1}}$, coincide con la funzione di Rademacher r_k, che assume alternativamente valori $+1$ e -1 sulla partizione dell'intervallo $[0, 1]$ in k intervalli di uguale lunghezza.

Esercizio 29 *Dimostrare che l'espressione di una funzione di Walsh, $w_n = r_{k_1} \ldots r_{k_h}$, come prodotto di funzioni di Rademacher, è unica.*

Esercizio 30 *Dimostrare che per le funzioni di Walsh valgono le relazioni di ortogonalità:*

$$\int_0^1 w_n(x) w_m(x) dx = \begin{cases} 0 & se\ n \neq m \\ 1 & se\ n = m. \end{cases}$$

Esercizio 31 *Dimostrare che le funzioni di Walsh formano un gruppo di funzioni rispetto alla moltiplicazione punto per punto.*

Definizione 4 *Sia f una funzione a valori reali definita ed integrabile sull'intervallo $[0, 1]$. I coefficienti di Fourier-Walsh di f sono i numeri*

$$\hat{f}(w_n) = \int_0^1 f(x) w_n(x) dx,$$

e la serie di Fourier-Walsh di f è la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(w_n) w_n(x).$$

Come nel caso delle serie di Fourier la questione centrale che sarà affrontata in questi appunti è quella della convergenza delle serie di Fourier-Walsh. In altre parole ci si chiede per quali funzioni definite su $[0,1]$ succede che

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\hat{f}(w_n)w_n(x)=f(x).$$

Si osservi però che, contrariamente a quanto avviene per le serie di Fourier, la somma parziale di una serie di Fourier-Walsh non è mai una funzione continua, anche se la funzione f dalla quale si parte è una funzione continua, o magari derivabile. E infatti la somma parziale di una serie di Fourier-Walsh assume un numero finito di valori. Questo fatto non diminuisce l'importanza delle serie di Fourier-Walsh, perché, in molti casi concreti, ad esempio nella trasmissione di dati, funzioni continue (rappresentanti, ad esempio, segnali) devono necessariamente essere ridotte a funzioni che assumono un numero finito di valori e che pertanto risultano discontinue.

Il principale risultato sulla convergenza delle serie di Fourier-Walsh che sarà presentato in questi appunti, riguarderà tuttavia le funzioni continue. In questo caso non dimostreremo propriamente la convergenza della successione delle somme parziali della serie di Fourier Walsh di una funzione continua, ma piuttosto la convergenza di una sottosuccessione. Più precisamente dimostreremo che, se f è una funzione continua,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\hat{f}(w_k)w_k(x)=f(x).$$

Esercizio 32 *Calcolare la somma parziale* $\sum_{n=0}^{N}\hat{f}(w_n)w_n(x)$ *nei seguenti casi: 1)* $f(x)=x$ *con* $N=2$ *e* $N=4$ *; 2)* $f(x)=1-2x$*, con* $N=2$*; 3)* $f(x)=\sin 2\pi x$ *con* $N=2$*; 4)* $f(x)=x(1-x)$ *con* $N=2$.

Esercizio 33 *Dimostrare che una somma del tipo*

$$\sum_{n=0}^{N}a_n w_n(x)$$

assume un numero finito di valori. Dimostrare che se $N\leq 2^k-1$*, allora la somma non può assumere più di* 2^k *valori. Dedurne che una funzione non costante rappresentata da una somma di questo tipo non può essere continua.*

Per studiare la somma parziale della serie di Fourier-Walsh di ordine 2^n-1 introduciamo una funzione speciale, che chiameremo *nucleo di Paley* che, per certi versi, svolge, per le serie di Fourier-Walsh, il ruolo svolto dal nucleo di Dirichlet (introdotto alla fine del capitolo precedente) per le serie di Fourier.

Definizione 5 *Il nucleo di Paley è la funzione definita sul quadrato* $[0,1]\times[0,1]$ *come segue:*

$$\mathbb{P}_n(x,y)=\prod_{j=1}^{n}(1+r_j(y)r_j(x)).$$

Osserviamo che per y fissato, il nucleo di Paley, come funzione della sola x, assume solo due valori: vale 2^n se x appartiene allo stesso intervallo della partizione di $[0,1]$ in 2^n intervalli di pari lunghezza, cui appartiene y, mentre vale zero per tutti gli altri x. Infatti $\mathbb{P}_n$ è diverso da zero solo se tutti i fattori $1+r_j(y)r_j(x)$ sono diversi da zero. Questo accade se, e solo se, per tutti gli indici j, $r_j(y)$ ed $r_j(x)$ hanno lo stesso segno. È facile vedere che questa circostanza si verifica se e solo se x ed y appartengono alla stesso intervallo semiaperto della partizione di $[0,1]$ in 2^n intervalli di pari lunghezza. In questo caso, tutti i fattori $1+r_j(y)r_j(x)$ sono uguali a 2 ed il prodotto degli n fattori è 2^n. In particolare se $y=0$ o anche se $y\in[0,\frac{1}{2^n}]$, allora, $\mathbb{P}_n(x,y)=\mathbb{P}_n(x,0)=\prod_{j=1}^{n}(1+r_j(x))$ è diverso da zero solo se $x\in[0,\frac{1}{2^n}]$, e su questo intervallo vale 2^n.

Esercizio 34 *Dimostrare che*

$$\mathbb{P}_n(x,y)=\sum_{k=0}^{2^n-1}w_k(y)w_k(x).$$

Per svolgere l'esercizio precedente si può osservare che le prime 2^n funzioni di Walsh (quelle che hanno indice da 0 a 2^n-1) sono tutti i possibili prodotti delle funzioni di Rademacher di indice da 1 ad n, ed inoltre la funzione $r_0=w_0\equiv 1$. Ridurre il prodotto $\mathbb{P}_n(x,y)$ ad una somma di monomi significa scegliere per ognuno degli n fattori $(1+r_j(y)r_j(x))$ il termine 1 ovvero il termine $r_j(y)r_j(x)$. In altre parole ogni termine della somma che uguaglia il prodotto

$$\mathbb{P}_n(x,y)$$

corrisponde alla scelta di un sottoinsieme dell'insieme $\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$ (eventualmente il sottoinsieme vuoto). Il termine della somma è allora determinato dal prodotto delle funzioni di Rademacher che appartengono a questo sottoinsieme (il prodotto del sottoinsieme vuoto vale convenzionalmente uno). Da un altro punto di vista l'esercizio può essere svolto per induzione dopo aver osservato che

$$\prod_{j=1}^{n}(1+r_j(y)r_j(x))=\prod_{j=1}^{n-1}(1+r_j(y)r_j(x))+r_n(y)r_n(x)\prod_{j=1}^{n-1}(1+r_j(y)r_j(x)).$$

Il nucleo di Paley può essere utilizzato per calcolare la somma di ordine 2^n-1 di una funzione integrabile, come precisato dal teorema che segue.

Teorema 9 *Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0,1]$, allora,*

$$\int_0^1 \mathbb{P}_n(x,y)f(y)dy = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k)w_k(x)$$

DIMOSTRAZIONE. Sviluppando il prodotto, come indicato nell'esercizio precedente, si ottiene

$$\mathbb{P}_n(x,y) = \prod_{j=1}^{n}(1 - r_j(y)r_j(x)) = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(y)w_k(x).$$

Pertanto

$$\int_0^1 \mathbb{P}_n(x,y)f(y)dy = \sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(x)\int_0^1 f(y)w_k(y)dy = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k)w_k(x).$$

Le funzioni di Rademacher, e quindi quelle di Walsh, sono costanti negli intervalli (aperti a destra) di partizioni *diadiche*. Più precisamente la funzione di Rademacher r_k è costante sugli intervalli semiaperti (a destra) della partizione dell'intervallo $[0,1]$ in 2^k parti uguali. Ne segue che ogni funzione di Walsh, ottenuta come prodotto delle prime k funzioni di Rademacher, sarà costante sugli intervalli della stessa partizione. Per conseguenza ogni combinazione lineare di queste funzioni di Walsh avrà la stessa proprietà di essere costante sugli intervalli semiaperti della partizione dell'intervallo $[0,1]$ in 2^k parti uguali. Ma vale in effetti il seguente risultato.

Teorema 10 *L'insieme $\mathbb{W}_n$ delle funzioni che sono costanti sugli intervalli semiaperti della partizione dell'intervallo $[0,1]$ in 2^n parti uguali è uno spazio vettoriale di dimensione 2^n. Le funzioni di Walsh $\{w_0,\dots,w_{2^n-1}\}$ sono una base per $\mathbb{W}_n$.*

DIMOSTRAZIONE. Non è difficile verificare che la somma ed il prodotto di funzioni costanti sugli intervalli della partizione è ancora costante su ogni intervallo della partizione. Ne segue che $\mathbb{W}_n$ è uno spazio vettoriale. Tutti gli elementi di $\mathbb{W}_n$ possono essere scritti come combinazione lineare delle funzioni caratteristiche degli intervalli semiaperti della partizione, che sono esattamente 2^n . D'altra parte queste funzioni caratteristiche sono linearmente indipendenti. Ne segue che la dimensione di $\mathbb{W}_n$ è 2^n. Ogni funzione di Walsh di indice minore di 2^n è esprimibile come prodotto delle funzioni di Rademacher $\{r_1,\dots,r_n\}$, le quali sono tutte costanti su ogni intervallo della partizione dell'intervallo $[0,1]$ in 2^n intervalli di uguale lunghezza. Pertanto ogni funzione di Walsh di indice minore di 2^n appartiene a $\mathbb{W}_n$. Poiché le funzioni di Walsh sono linearmente indipendenti esse costituiscono una base per lo spazio $\mathbb{W}_n$.

Esercizio 35 *Verificare che ogni funzione caratteristica degli intervalli della partizione di* $[0,1]$ *in* 2^n *intervalli può essere scritta come combinazione lineare di funzioni di Walsh, e cioè verificare che se* I *è un tale intervallo e* $y \in I$ *è fissato, allora*

$$\frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}(1 + r_k(y)r_k(x)) = \chi_I(x).$$

Introduciamo ora una trasformazione che associa ad ogni funzione integrabile f definita su $[0,1]$ un elemento $\mathbb{P}_n f$ di $\mathbb{W}_n$ che chiameremo la proiezione di f su $\mathbb{W}_n$. L'uso di un simbolo $\mathbb{P}_n$ che richiama il nucleo di Paley è giustificato dal teorema che segue la definizione della trasformazione $\mathbb{P}_n$.

Definizione 6 *Sia* f *una funzione integrabile definita sull'intervallo* $[0,1]$. *La funzione* $\mathbb{P}_n f$ *è definita come la funzione costante su ogni intervallo della partizione di* $[0,1]$ *in* 2^n *intervalli semiaperti di uguale lunghezza, che in ogni intervallo della partizione assume il valore medio della funzione in quell'intervallo. In altre parole se* I *è un intervallo della partizione e* $x \in I$, *allora*

$$\mathbb{P}_n f(x) = 2^n \int_I f(y)dy.$$

Esercizio 36 *Sia* $f(x) = x - 1/2$. *Tracciare il grafico di* $\mathbb{P}_n f(x)$ *per* $n = 4$. *Svolgere lo stesso esercizio con* $f(x) = \sin 2\pi x$.

Teorema 11 . *Se* f *è una funzione integrabile sull'intervallo* $[0,1]$, *allora*

$$\mathbb{P}_n f(x) = \int_0^1 \mathbb{P}_n(x,y)f(y)dy.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia I un intervallo della partizione di $[0,1]$ in 2^n intervalli disgiunti. Supponiamo che $x \in I$. Allora $\mathbb{P}_n(x,y)$, come funzione di y altro non è che la funzione caratteristica di I, moltiplicata per 2^n. Pertanto:

$$\mathbb{P}_n f(x) = 2^n \int_I f(y)dy = \int_0^1 \mathbb{P}_n(x,y)f(y)dy.$$

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare il risultato già anticipato sulla convergenza delle serie di Fourier-Walsh.

Teorema 12 . *Supponiamo che* f *sia una funzione continua definita sull'intervallo* $[0,1]$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}\hat{f}(w_n)w_n(x) = f(x),$$

per ogni $x \in [0,1]$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $x \in [0,1]$, allora per ogni n, x appartiene ad uno ed uno solo degli intervalli semiaperti della partizione di $[0,1]$ in 2^n intervalli di uguale lunghezza. Indichiamo con I_n l'intervallo della n-esima partizione cui appartiene x ed osserviamo che $I_n \supset I_{n+1}$. Siano M_n ed m_n, rispettivamente, il valore massimo ed il valore minimo, assunti da f nella chiusura dell'intervallo I_n. Osserviamo che, per definizione di $\mathbb{P}_n$,

$$m_n \leq \mathbb{P}_n f(x) \leq M_n,$$

mentre vale, ovviamente, anche la disuguaglianza

$$m_n \leq f(x) \leq M_n.$$

Sia ora $\epsilon > 0$. E sia $\delta > 0$ tale che se $|x-y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Sia n così grande che $\frac{1}{2^n} < \delta$. Poiché i valori M_n ed m_n sono assunti da f in un intervallo di lunghezza $\frac{1}{2^n} < \delta$, risulta $M_n - m_n < \epsilon$. I punti $f(x)$ e $\mathbb{P}_n f(x)$ appartengono quindi, ambedue, all'intervallo $[m_n, M_n]$, che ha lunghezza inferiore ad ϵ. Ne segue che, per n sufficientemente grande,

$$|f(x) - \mathbb{P}_n f(x)| < \epsilon.$$

D'altra parte, dal Teorema 11 e dal Teorema 9 segue che

$$\mathbb{P}_n f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k) w_k(x),$$

questo conclude la dimostrazione del teorema.

Esercizio 37 . *Nella dimostrazione precedente abbiamo fatto uso della continuità di f (esistenza del massimo e del minimo in un intervallo chiuso, continuità nel punto x). Cosa succede se f è una funzione integrabile (e quindi limitata) ma non continua in tutti i punti dell'intervallo $[0,1]$? Far vedere che se $f(x)$ è definita come la funzione che vale 1 nell'intervallo $[0,\frac{1}{2}]$ e -1 nell'intervallo $(\frac{1}{2},1]$, allora la serie di Fourier-Walsh di f non converge al suo valore nel punto $\frac{1}{2}$. (Attenzione! la funzione f di questo esercizio non è la funzione di Rademacher $r_1(x)$, perché ha un valore diverso nel punto $\frac{1}{2}$.) Dare un altro controesempio.*

Capitolo 7

Convergenza uniforme delle successioni e serie di funzioni

Nei capitoli precedenti, trattando le serie di Fourier e le serie di Fourier-Walsh, abbiamo considerato casi particolari di un problema che, in termini generali, può essere descritto come segue.

Sia $u_n(x)$ una successione di funzioni tutte definite sullo stesso intervallo $[a, b]$. Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo la successione numerica $u_n(x)$. Sotto quali condizioni esiste il $\lim_{n\to\infty} u_n(x)$? In realtà il problema che ci siamo posti è formalmente diverso. Anziché successioni di funzioni, abbiamo considerato serie di funzioni. Ma considerare una serie (numerica o di funzioni) equivale a considerare la successione delle sue somme parziali. E viceversa, ogni successione (numerica o di funzioni) può essere considerata come la successione delle somme parziali di una serie.

Esercizio 38 *Dimostrare che ogni successione di funzioni definite su un intervallo può essere considerata come la successione delle somme parziali di una serie di funzioni.*

Converrà pertanto, per semplicità, affrontare il problema generale in termini di successioni, anziché di serie (anche se le applicazioni dei nostri risultati concerneranno prevalentemente le serie di Fourier e le serie di Fourier-Walsh.)

Osserviamo intanto che se $u_n(x)$ è una successione di funzioni tutte definite sullo stesso intervallo $[a, b]$ e, per ogni $x \in [a, b]$, esiste il $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, ne risulta definita, sullo stesso intervallo $[a, b]$, una funzione $u(x)$. Tuttavia può ben succedere che alcune proprietà importanti, possedute da ogni funzione della successione u_n, non si trasmettano al loro limite u. Ad esempio le u_n potrebbero essere continue, e la u discontinua, oppure le u_n potrebbero risultare integrabili e la u non integrabile. Alcune di quese *patologie* sono descritte negli esercizi che seguono.

Esercizio 39 . *Consideriamo le funzioni* $u_n(x) = x^n$ *definite per* $n > 0$ *sull'intervallo* $[0, 1]$. *Dimostrare che, per ogni* $x \in [0, 1]$ *esiste il* $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$*, ma che la funzione* $u(x)$ *non è continua nel punto* 1.

Esercizio 40 . *Sia* $u_n(x)$ *la funzione che vale zero sui punti dell'intervallo* $[0, 1]$ *che sono del tipo* $\frac{k}{2^n}$ *con* $k = 0, \ldots 2^n$*, e vale uno in tutti gli altri punti dell'intervallo. Osservare che* u_n *è integrabile e che il suo integrale vale uno. Dimostrare che esiste il* $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$*, ma che la funzione* $u(x)$ *non è integrabile.*

Esercizio 41 . *Trovare una successione di funzioni continue definite sull'intervallo* $[0, 1]$*, che converge in ogni punto dell'intervallo ad una funzione limitata, ma non integrabile (secondo Riemann).*

Esercizio 42 . *Trovare una successione di funzioni continue* $u_n(x)$*, definite sull'intervallo* $[0, 1]$*, che converge in ogni punto dell'intervallo ad una funzione continua* $u(x)$*, ma tali che*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 u_n(x)dx \neq \int_0^1 u(x)dx.$$

Gli esempi descritti negli esercizi che precedono servono a motivare una definizione più stringente di convergenza, per le successioni di funzioni.

Definizione 7 *Sia* $u_n(x)$ *una successione di funzioni a valori reali (o complessi) tutte definite sullo stesso intervallo* $[a, b]$. *Si dice che* u_n *converge uniformemente alla funzione* u *pure definita su* $[a, b]$ *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* n_ε *tale che per ogni* $n > n_\varepsilon$ *risulti, per ogni* $x \in [a, b]$,

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

La somiglianza con l'ordinaria convergenza, per ogni x, della successione $u_n(x)$ ad $u(x)$ non deve trarre in inganno. Per la convergenza uniforme si richiede che n_ε non dipenda da x. Invece per la convergenza non uniforme, o *punto per punto*, come si chiama in generale, n_ε, può dipendere dal punto x considerato. Per capire bene il concetto di *uniforme convergenza* bisogna prima di tutto prendere in esame esempi di successioni di funzioni che convergono, ma non convergono uniformemente. Questo esercizio mentale può essere fatto utilizzando gli esempi tratti dai precedenti esercizi. Ad esempio dovrebbe essere chiaro che le funzioni $u_n(x) = x^n$ convergono per ogni

$x \in [0,1]$, ma non convergono uniformemente, su questo intervallo. Per valori di x positivi e minori di uno, ma sempre più vicini ad uno, l'intero positivo n_ε tale che, per $n > n_\varepsilon$ risulti $x^n < \varepsilon$ deve essere scelto sempre più grande. Per avere un esempio di successione di funzioni che converge uniformemente, basta cambiare l'intervallo di definizione. Le stesse funzioni $u_n(x) = x^n$ convergono uniformemente a zero nell'intervallo $[0, \frac{3}{4}]$, o in ogni intervallo $[0, \lambda]$, con $0 < \lambda < 1$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, basta scegliere n_ε in modo che sia $\lambda^{n_\varepsilon} < \varepsilon$ per ottenere $|u_n(x)| < \varepsilon$ non appena $n > n_\varepsilon$.

La convergenza uniforme, per le funzioni continue, può essere descritta introducendo una forma di *distanza* tra funzioni. Questo è il contenuto della definizione che segue.

Definizione 8 *Sia $C([a,b])$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue, a valori complessi, definite sull'intervallo $[a,b]$. Definiamo la distanza tra due elementi f e g di $C([a,b])$ come $d(f,g) = sup_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|$. Si dice che la successione f_n di elementi di $C([a,b])$ converge, in questa distanza, all'elemento f se $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.*

Esercizio 43 *Dimostrare che la distanza tra due funzioni continue, definita come sopra soddisfa alle proprietà della distanza: 1) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ se f, g ed h sono funzioni continue definite sullo stesso intervallo; 2) $d(f,g) = d(g,f)$; 3) $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$.*

Esercizio 44 . *Sia u_n una successione di funzioni continue definite sull'intervallo $[a,b]$, e sia u una funzione continua definita sullo stesso intervallo. Allora $d(u_n, u) \to 0$ se e solo se u_n converge uniformemente ad u.*

Dimostriamo ora che il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua.

Teorema 13 . *Supponiamo che u_n sia una successione di funzioni continue e che $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, uniformemente sull'intervallo $[a,b]$. Allora la funzione $u(x)$ è continua su $[a,b]$.*

DIMOSTRAZIONE Sia $x \in [a,b]$. Per dimostrare che u è continua in x dobbiamo far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$ quando $|x - y| < \delta$. Useremo la disuguaglianza:

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(y)| + |u_n(y) - u(y)| \leq$$

$$d(u, u_n) + |u_n(x) - u_n(y)| + d(u, u_n).$$

La convergenza uniforme di u_n ad u ci permette di trovare un intero positivo n_ε tale che, per $n > n_\varepsilon$, $d(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{3}$. Fissato un tale n, e la corrispondente funzione u_n, ed utilizzando la continuità di u_n, possiamo trovare $\delta > 0$, tale che, se $|x - y| < \delta$, allora $|u_n(x) - u_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Utilizzando la disuguaglianza riportata sopra, in relazione alla funzione u_n così fissata, possiamo allora concludere che, se $|x - y| < \delta$,

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |u_n(x) - u_n(y)| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

È opportuno a questo punto richiamare una nozione che concerne le successioni di numeri reali. Come vedremo questa nozione sarà poi estesa alle successioni di funzioni.

Definizione 9 *Una successione x_n di numeri reali si dice successione di Cauchy se dato $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo $n_\varepsilon > 0$ tale che se $n, m > n_\varepsilon$ allora $|x_n - x_m| < \varepsilon$*

Esercizio 45 *Dimostrare che ogni successione convergente di numeri reali è una successione di Cauchy.*

Esercizio 46 *Dimostrare che ogni successione di Cauchy è limitata.*

Esercizio 47 *Dimostrare che se una successione di Cauchy ha una sottosuccessione convergente, allora la successione stessa è convergente allo stesso limite.*

Esercizio 48 *Ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente.*

[SUGGERIMENTO: osservare che se per tutti gli indici n, tranne al più un numero finito di indici, $a \leq x_n \leq b$, allora tutti i termini x_n, tranne al più un numero finito, appartengono ad uno solo dei due intervalli $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$. Costruire una successione $[a_k, b_k]$ di intervalli $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subseteq [a_k, b_k]$ tali che $b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k)$ e tali che per ogni k solo un numero finito di termini x_n possono esere fuori di $[a_k, b_k]$. Per l'assioma di completezza esiste $\alpha = \sup a_k = \inf b_k$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ per ogni k. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.]

La nozione di successione di Cauchy può essere estesa alle successioni di funzioni utilizzando la nozione di distanza tra due funzioni secondo la definizione che segue.

Definizione 10 *Una successione $u_n \in C([a, b])$ si dice uniformemente di Cauchy, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero positivo n_ε tale che se $n, m > n_\varepsilon$ allora $d(u_n, u_m) < \varepsilon$.*

Un altro modo per esprimere la condizione di Cauchy, è il seguente: u_n è uniformemente di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che, se $n > n_\varepsilon$ e p è un intero positivo qualsiasi, allora $d(u_n, u_{n+p}) < \varepsilon$. In particolare la condizione di Cauchy (uniforme) per le serie di funzioni può essere espressa così: Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che, se $n > n_\varepsilon$,

$$|\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon,$$

per ogni intero positivo p e per ogni $x \in [a, b]$.

La nozione di successione uniformemente di Cauchy, appena introdotta, è importante perché vale il seguente teorema.

Teorema 14 . *Una successione di funzioni continue u_n definite sullo stesso intervallo $[a, b]$ è uniformemente di Cauchy se e solo se esiste una funzione $u \in C([a, b])$, tale che $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$, uniformemente.*

DIMOSTRAZIONE Se esiste u tale che $d(u_n, u) \to 0$, allora dato $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$, $d(u_n, u) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pertanto, se $n, m > n_\varepsilon$, allora $d(u_n, u_m) \le d(u_n, u) + d(u, u_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Viceversa se u_n è uniformemente di Cauchy, allora, per ogni $x \in [a, b]$, la successione numerica $u_n(x)$ è una successione di Cauchy. Questo fatto discende dalla disuguaglianza:

$$|u_n(x) - u_m(x)| \le sup_{y\in[a,b]}|u_n(y) - u_m(y)| = d(u_n, u_m).$$

Ma se $u_n(x)$ è una successione numerica di Cauchy, allora, per l'Esercizio 48 è convergente ad un valore numerico che possiamo chiamare $u(x)$. Dimostriamo ora che u è il limite uniforme di u_n. Dato $\varepsilon > 0$ scegliamo n_ε tale che $d(u_n, u_m) < \varepsilon$ non appena $n, m > \varepsilon$. Allora, se $n > n_\varepsilon$, per ogni $x \in [a, b]$, $|u_n(x)-u(x)| = \lim_{m\to\infty} |u_n(x)-u_m(x)|$. Ma, per ogni x ed $m, n \ge n_\varepsilon$, risulta $|u_n(x)-u_m(x)| \le d(u_n, u_m) \le \varepsilon$. Pertanto per ogni x anche $\lim_{m\to\infty} |u_n(x)-u_m(x)| \le \varepsilon$. Questo conclude la dimostrazione del teorema.

La prima applicazione di questo importante teorema sarà alla convergenza delle serie di funzioni.

Teorema 15 *Sia u_n una successione di funzioni definite tutte sullo stesso intervallo della retta reale. Supponiamo che esistano numeri M_n tali che $|u_n(x)| \le M_n$ per ogni x nell'intervallo di definizione. Supponiamo anche che risulti $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Allora le somme parziali $\sum_{n=1}^{N} u_n(x)$ convergono uniformemente.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, le somme parziali di questa serie numerica soddisfano alla condizione di Cauchy. Questo significa che, dato $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che se $n > n_\varepsilon$, $\sum_{k=n}^{n+p} M_k < \varepsilon$. Ma $|u_n(x)| \leq M_n$ per ogni x ed ogni intero positivo p. Pertanto se $n > n_\varepsilon$ risulterà

$$\sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leq \varepsilon.$$

In altre parole le somme parziali della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

soddisfano la condizione di Cauchy. Per il teorema precedente le somme parziali convergono, e convergono ad una funzione continua.

Esercizio 49 *Definire la nozione di convergenza uniforme per successioni di funzioni definite su tutto* $\mathbb{R}$*, o su un sottoinsieme illimitato di* $\mathbb{R}$.

Esercizio 50 *Supponiamo che* u_n *sia una successione di funzioni periodiche di periodo* T*, che convergono uniformemente ad una funzione* u *in un intervallo di lunghezza* T*. Dimostrare che* u_n *converge uniformemente su tutto* $\mathbb{R}$ *ad una funzione periodica la cui restrizione all'intervallo è* u*.*

Concludiamo questo capitolo con un teorema concernente il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 16 *Sia* u_n *una successione di funzioni continue definite sullo stesso intervallo* $[a, b]$*, e supponiamo che* u_n *converga uniformemente ad una funzione continua* u*. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo dimostrare che dato $\varepsilon > 0$, esiste n_ε tale che, se $n > n_\varepsilon$, risulta

$$|\int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b u_n(x)dx| < \varepsilon.$$

Ma l'uniforme convergenza della successione di funzioni implica che esiste n_ε, tale che, se $n > n_\varepsilon$, allora per ogni $x \in [a, b]$, $|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ne segue che, per $n > n_\varepsilon$,

$$|\int_a^b u_n(x)dx - \int_a^b u(x)dx| = |\int_a^b u_n(x) - u(x)dx| \leq \int_a^b |u_n(x) - u(x)|dx <$$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon.$$

Capitolo 8

Convergenza assoluta ed uniforme delle serie di Fourier

In questo capitolo studieremo la convergenza uniforme delle serie di Fourier, in applicazione dei risultati del capitolo precedente.

Definizione 11 *Sia f una funzione periodica, integrabile nell'intervallo* $[0, 2\pi]$. *Si dice che la serie di Fourier di f è assolutamente convergente, se*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty.$$

Naturalmente non tutte le funzioni integrabili hanno una serie di Fourier assolutamente convergente. Si può dimostrare infatti, che se una funzione ha una serie di Fourier assolutamente convergente, allora la funzione stessa è continua. È anche vero però che esistono funzioni continue che non hanno una serie di Fourier assolutamente convergente. [1]

In questi appunti ci limitiamo a dimostrare che le funzioni continue che hanno derivata continua in tutti i punti, o anche che hanno derivata integrabile (ad esempio che hanno derivata limitata e continua eccetto in un numero finito di punti di un intervallo di lunghezza 2π) hanno una serie di Fourier assolutamente convergente.

Cominciamo con un risultato preliminare di carattere generale

[1] Per una discussione abbastanza esauriente, e comunque illuminante, sulle condizioni che implicano che una funzione continua abbia una serie di Fourier assolutamente convergente rinviamo il lettore interessato alla sezione 6 del Capitolo I (compresi i relativi esercizi), della monografia [K]. Di questa monografia esiste anche una ristampa in edizione economica nella collana delle Dover Publications.

Lemma 2 *Siano $a_1, \dots a_n$ e $b_1, \dots b_n$ numeri complessi, allora*

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni λ reale e per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ vale la disuguaglianza:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j - \lambda e^{i\theta} b_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (a_j - \lambda e^{i\theta} b_j)\overline{(a_j - \lambda e^{i\theta} b_j)} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (|a_j|^2 - 2\lambda \mathbf{Re}(a_j \overline{e^{i\theta} b_j}) + |\lambda|^2 |b_j|^2) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - 2\lambda \mathbf{Re}(e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}) + \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Si può scegliere θ in modo che

$$e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j} = |\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}|.$$

Con questa scelta la precedente disuguaglianza diviene:

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 - 2\lambda |\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}| + \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2,$$

per tutti i λ reali. Ma un polinomio reale di secondo grado è non negativo per tutti i valori della variabile reale λ, solo se il suo discriminante è non positivo. Ne segue che:

$$4|\sum_{j=1}^{n} a_j\overline{b_j}|^2 - 4\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq 0.$$

Pertanto

$$|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Esercizio 51 *Sia* $\mathbf{W}$ *uno spazio vettoriale rispetto al campo complesso $\mathbb{C}$. Supponiamo che sia definita una funzione sul prodotto* $\mathbf{W} \times \mathbf{W}$ *e a valori in $\mathbb{C}$, che indichiamo con la notazione (u, v) con le seguenti proprietà:*

1. la funzione è lineare nella prima variabile, e cioè, per $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$(\alpha u + \beta w, v) = \alpha(u, v) + \beta(w, v);$$

2. $0 \leq (u, u)$ e $0 = (u, u)$ solo se $u = 0$;

3. $(u, v) = \overline{(v, u)}$.

Dimostrare, sulla scorta della dimostrazione precedente che

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v).$$

Esercizio 52 *Nelle ipotesi dell'esercizio precedente dimostrare che posto $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, risulta*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Dimostreremo ora che la serie di Fourier di una funzione continua, periodica e con derivata continua, converge assolutamente.

Teorema 17 *Sia f una funzione continua e periodica di periodo 2π. Supponiamo che esista la derivata Df di f e che sia continua. Allora la serie di Fourier di f è assolutamente convergente.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\hat{f}(n)$ sono i coefficienti di Fourier di f, allora i coefficienti di Fourier della funzione continua Df sono $\widehat{Df}(n) = in\hat{f}(n)$. La disuguaglianza di Bessel implica allora che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |in\hat{f}(n)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Df(x)|^2 dx.$$

Osserviamo che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| = |\hat{f}(0)| + \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|.$$

Basterà quindi dimostrare che

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| < \infty.$$

D'altra parte,

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |in\hat{f}(n)| + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{-n} |in\hat{f}(n)| \leq \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |\widehat{Df}(n)| \leq$$

$$(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\widehat{Df}(n)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Il termine a destra della disuguaglianza è finito come conseguenza della disuguaglianza di Bessel e del fatto che la serie $\sum\frac{1}{n^2}$ converge.

L'attento lettore, esaminando la dimostrazione nei dettagli, si sarà accorto che il ragionamento fatto si applica, non solo a funzioni che hanno derivata continua, ma anche alle funzioni per la cui derivata vale la disuguaglianza di Bessel, ad esempio funzioni la cui derivata esiste ed è continua, ad eccezione di un numero finito di punti dell'intervallo $[0,2\pi]$ e risulta limitata. Una conseguenza di questa osservazione è la proposizione che segue.

Proposizione 2 *Supponiamo che f sia una funzione continua e che la derivata di f esista e sia continua ovunque, eccetto che in un numero finito di punti dell'intervallo $[0,2\pi]$, e risulti uniformemente limitata. Allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f.*

DIMOSTRAZIONE. Come osservato dopo la dimostrazione del precedente teorema 17 vale per la derivata Df di f, la disuguaglianza di Bessel, che ci porta a concludere che

$$(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{Df}(n)|^2<\infty.$$

Da questo si deduce, come nella precedente dimostrazione, che

$$(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|<\infty.$$

Poiché $|\hat{f}(n)e^{inx}|=|\hat{f}(n)|$, per il Teorema 15 del capitolo precedente la serie di Fourier di f, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ converge uniformemente. Le funzioni $\hat{f}(n)e^{inx}$ sono continue, pertanto la serie converge ad una funzione continua g. Poiché la serie di Fourier converge puntualmente ad f in tutti i punti in cui f è derivabile, la funzione continua g coincide con f in tutti i punti in cui f è derivabile, cioé ovunque eccetto che in un numero finito di punti. In altre parole l'insieme $E=\{x:|f(x)-g(x)|>0\}\cap[0,2\pi]$ è finito. Ma $|f(x)-g(x)|$ è una funzione continua ed il teorema della permanenza del segno ci dice che se E non è vuoto, deve contenere un intervallo aperto, in particolare deve essere infinito. Ne segue che E è vuoto ed $f\equiv g$.

Utilizzeremo ora i risultati enunciati negli Esercizi 51 e 52, per dimostrare che per le funzioni che hanno una serie di Fourier uniformemente convergente la disuguaglianza di Bessel è in realtà un'uguaglianza. Questo fatto vale per funzioni molto più generali ed in effetti per tutte le funzioni per le quali risulta finita la somma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$. In particolare vale per tutte le funzioni integrabili (secondo Riemann). I teoremi generali sulle funzioni per le quali vale la *uguaglianza* di Bessel, nota anche, in questo contesto, come *identità* di Plancherel si esprimono compiutamente solo introducendo un concetto di integrale più generale di quello di Riemann, il cosiddetto *integrale di Lebesgue*[2].

Lemma 3 *Sia* $\mathbf{W}$ *lo spazio vettoriale delle funzioni continue e periodiche. Definiamo per* $f, g \in \mathbf{W}$,

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Allora la funzione (f,g) *soddisfa le condizioni indicate nell'Esercizio 51 e quindi soddisfa la proprietà indicate nell'Esercizio 51 e nell'Esercizio 52.*

DIMOSTRAZIONE.L'unica condizione la cui verifica non è immediata è che $(f,f) = 0$ implica che $f \equiv 0$. Ma

$$(f,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Se fosse $f(x_0) \neq 0$ per qualche x_0, sarebbe $|f(x_0)|^2 = \eta > 0$. Ma $|f|^2$ è continua e, per il teorema della permanenza del segno, per x appartenente ad un intorno di $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, risulterebbe $|f(x)|^2 > \eta/2$. Ma allora

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|^2 dx > \delta\eta,$$

che implica $(f,f) > 0$.

In accordo con il precedente lemma e con la notazione dell'Esercizio 52, definiamo, per una funzione continua e periodica f,

$$\|f\| = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha allora, per l'Esercizio 52, che

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

[2]Una trattazione rigorosa dell'integrale di Lebesgue per funzioni di variabile reale è contenuta in [Ro]. Una efficace trattazione a livello intuitivo è anche contenuta nel testo di [DM]

Osserviamo anche che

$$\|f\| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

Possiamo ora dimostrare il risultato annunciato.

Teorema 18 *Sia f una funzione continua e periodica e supponiamo che la serie di Fourier di f converga uniformemente ad f. Allora*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx},$$

la somma parziale della serie di Fourier di f. Allora la convergenza uniforme della serie di Fourier implica che,

$$0 \leq \|S_N - f\| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |S_N(x) - f(x)| = d(S_N - f) \to 0.$$

Pertanto

$$\lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|^2 = 0.$$

D'altra parte

$$\|S_N - f\|^2 = (S_N - f, S_N - f) = (S_N, S_N) - 2\mathbf{Re}(S_N, f) + (f, f).$$

Calcoliamo ora

$$(S_N, S_N) = \sum_{n,m=-N}^{N} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0$$

a meno che non sia $n = m$, nel qual caso l'integrale vale uno, si può concludere che

$$(S_N, S_N) = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2.$$

D'altra parte

$$(S_N, f) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx = \sum_{-N}^{N} \hat{f}(n) \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx} = \sum_{-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2.$$

In particolare (S_N, f) è reale. Ne segue che

$$0 = \lim_{N\to\infty} \|S_N - f\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |\hat{f}(n)|^2 - (f, f),$$

cioè la tesi.

Capitolo 9

Convergenza uniforme per le serie di Fourier-Walsh

Dimostriamo innanzitutto un importante teorema sulle funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato. Cominciamo da una definizione.

Definizione 12 *Supponiamo che f sia una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato I. L'oscillazione di f su I è definita come* $\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$.

Osserviamo che se I è un intervallo chiuso e limitato la funzione continua f assume in I il valore massimo ed il valore minimo, in altre parole la oscillazione di f in I è la differenza tra il massimo valore ed il minimo valore assunti dalla funzione in I. Osserviamo anche che se J è un intervallo chiuso contenuto in I ed f è definita su I, allora l'oscillazione di f su J non può superare l'oscillazione di f su I.

Teorema 19 *Sia f una funzione continua definita su un intervallo $[a, b]$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione dell'intervallo in 2^n intervalli di lunghezza $1/2^n$ tale che l'oscillazione di f su qualsiasi intervallo chiuso della partizione risulti minore di ε.*

DIMOSTRAZIONE. Per brevità di linguaggio chiameremo *partizione diadica* di $[a, b]$ ogni partizione dell'intervallo in 2^n intervalli di uguale lunghezza. Osserviamo che la $(n+1)$-esima partizione diadica si ottiene dividendo in due intervalli uguali ogni intervallo della n-esima partizione diadica. Facciamo ora vedere che dalla negazione della tesi segue un assurdo. Supponiamo quindi che esista un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni intero positivo n esiste un intervallo della partizione di $[a, b]$ in 2^n parti uguali nel quale l'oscillazione di

f sia $> \varepsilon$. Questo stesso enunciato sarà vero allora con riferimento ad almeno uno dei due intervalli $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$. Se infatti non fosse vero per ambedue questi intervalli allora si potrebbe trovare una partizione in 2^n parti del primo intervallo ed una partizione in 2^m parti del secondo intervallo (non è detto che sia $n = m$) tali che su tutti gli intervalli chiusi di ognuna di queste partizioni l'oscillazione di f sia minore di ε. Supponendo (come è lecito) che $m > n$, la partizione di $[a, b]$ in 2^{m+1} intervalli di uguale lunghezza darebbe luogo ad una partizione del secondo intervallo in 2^m parti uguali e ad una partizione del primo intervallo che è un raffinamento della partizione in 2^n intervalli. Pertanto l'oscillazione di f su ognuno degli intervalli della partizione di $[a, b]$ in 2^{m+1} parti sarebbe minore di ε. La negazione della tesi ci consente quindi di scegliere almeno uno dei due intervalli $[a, \frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2}, b]$ nel quale la tesi è del pari negata, nel senso che per ogni partizione diadica dell'intervallo l'oscillazione di f risulta maggiore o uguale a ε in almeno uno degli intervalli chiusi della partizione stessa. Possiamo precisare la scelta stipulando che nel caso questo si verifichi per ambedue gli intervalli si sceglie l'intervallo di sinistra. Abbiamo determinato così un intervallo $[a_1, b_1]$ di lunghezza $\frac{b-a}{2}$, con la proprietà che $a \le a_1 < b_1 \le b$, e con la proprietà che almeno in almeno uno degli intervalli di qualsiasi partizione diadica di $[a_1, b_1]$ l'oscillazione di f risulti maggiore o uguale a ε. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento per l'intervallo $[a_1, b_1]$, considerando i due intervalli ottenuti dividendolo a metà, ed andare avanti per induzione. Per essre precisi supponiamo di aver trovato una successione di intervalli $[a_k, b_k]$ con le proprietà che: $a \le a_1 \le \dots a_k < b_k \le \dots \le b_1 \le b$, $b_k - a_k = (b-a)/2^k$, e tali che in ogni partizione diadica di $[a_k, b_k]$ esiste almeno un intervallo in cui l'oscillazione di f è maggiore di ε. Scegliamo allora $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ come il primo (il più a sinistra) dei due intervalli ottenuti dividendo a metà l'intervallo $[a_k, b_k]$, che abbia la proprietà che l'oscillazione di f risulta maggiore o uguale a ε in almeno uno degli intervalli chiusi di ogni partizione diadica dell'intervallo. La successione $\{a_k\}$ così determinata è una successione non decrescente, limitata superiormente da b. Pertanto ammette un limite $\alpha \in [a, b]$. La successione $\{b_k\}$, analogamente determinata, è non crescente e limitata inferiormente da a. Pertanto ammette un limite $\beta \in [a, b]$. Ma poiché $b_k - a_k = 2^{-k}$, deve essere $\alpha = \beta$. Ne segue che $a_k \le \alpha \le b_k$. La funzione f è continua nel punto α pertanto esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in [a, b]$ e $|x - \alpha| < \delta$, allora $|f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sia k così grande che $2^{-k} < \delta$. Allora $\alpha - a_k \le b_k - a_k < \delta$ e $b_k - \alpha \le b_k - a_k < \delta$. Perciò $[a_k, b_k] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Pertanto dati due punti qualsiasi $x, y \in [a_k, b_k]$ risulta $|x - \alpha| < \delta$ e $|y - \alpha| < \delta$. Ne segue che

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(\alpha)| + |f(\alpha) + f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto l'oscillazione di f sull'intervallo $[a_k, b_k]$ risulta minore di ε, una contraddizione.

La proprietà delle funzioni continue dimostrata nel teorema precedente è nota sotto il nome di *uniforme continuità* delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato. Essa è formulata in generale come nell'esercizio che segue. Ma non è difficile dimostrare che questa formulazione può essere dedotta dal teorema precedente. È quello che si chiede appunto di fare nell'esercizio.

Esercizio 53 *Dimostrare che se f è una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ ed $\varepsilon > 0$, allora esiste $\delta > 0$ tale che la condizione $|x-y| < \delta$ con $x, y \in [a,b]|$ implica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Anche la convergenza uniforme delle somme

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k) w_k(x)$$

si deduce dallo stesso teorema. Ricordiamo infatti che

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k) w_k(x) = \mathbb{P}_n f(x),$$

è la media di f sugli intervalli della n-esima partizione diadica dell'intervallo $[0,1]$. Non è difficile quindi dimostrare il seguente corollario.

Corollario 20 *Se f è una funzione continua nell'intervallo $[0,1]$ allora le somme parziali della serie di Fourier- Walsh di f, $\mathbb{P}_n f(x)$, convergono uniformemente a f.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\varepsilon > 0$. Per il Teorema 1, esiste una partizione diadica dell'intervallo $[0,1]$ in 2^n parti, tale che l'oscillazione di f su ogni intervallo chiuso della partizione sia inferiore a ε. Sia $x \in [0,1]$. Allora x appartiene ad un intervallo chiuso I di questa partizione. Siano M ed m rispettivamente i valori massimi e minimi assunti da f in I. Allora $m \leq \mathbb{P}_n(x) \leq M$. Ma vale anche $m \leq f(x) \leq M$. Pertanto

$$|\mathbb{P}_n(x) - f(x)| \leq (M - m) < \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni x e questo completa la dimostrazione.

Si osservi che le funzioni $\mathbb{P}_n(x)$ non sono continue, ma convergono alla funzione continua f.

Capitolo 10

L'integrale di Fourier

In questo capitolo tratteremo brevemente uno strumento analogo a quello delle serie di Fourier che si applica a funzioni che non sono periodiche. Una trattazione più completa è contenuta in [DM].

Le funzioni che considereremo hanno la proprietà di essere definite su $\mathbb{R}$, di essere continue, tranne al più in un numero finito di punti, di essere limitate e di tendere a zero all'infinito così velocemente che esista sempre, e sia finito, il limite :

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty. \tag{10.1}$$

Siamo interessati prevalentemente a funzioni a valori reali, ma è conveniente, come nel caso delle serie di Fourier, considerare anche funzioni a valori complessi. Dalla (10.1) segue che esiste anche il limite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} f(x) dx. \tag{10.2}$$

Il fatto che dalla (10.1) segua la (10.2) non è immediato. E' necessario utilizzare la condizione di Cauchy per l'esistenza dei limiti all'infinito, che è analoga alla condizione di Cauchy per l'esistenza delle successioni. La dimostrazione non sarà fornita in questi appunti, ma sarà lasciata, per esercizio, ai volenterosi che hanno imparato ad usare la condizione di Cauchy per le successioni.

Esercizio 54 *Dimostrare che se esiste $M > 0$ tale che*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1 + x^2},$$

allora vale la (10.1).

Introduciamo ora per il limite (10.2) la notazione:

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx. \tag{10.3}$$

Una proprietà importante dell'integrale su tutto $\mathbb{R}$ che abbiamo appena introdotto è la *invarianza per traslazione.* Questa proprietà è enunciata nel seguente Lemma.

Lemma 4 *Se f è una funzione che soddisfa la (10.2), allora:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx. \tag{10.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che $0 < y < a$. Allora

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x+y)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a+y}^{a+y} f(x)dx =$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx + \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{a+y} f(x)dx - \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{-a+y} f(x)dx.$$

Ma $f(x)$ tende a zero, per $x \to \infty$ e per $x \to -\infty$. Perciò tendono a zero, per $a \to \infty$, gli integrali

$$\int_{a}^{a+y} f(x)dx$$

e

$$\int_{-a}^{-a+y} f(x)dx.$$

E infatti se $\varepsilon > 0$, per a sufficientemente grande e $|x| > a - y$, con $y > 0$ risulterà $|f(x)| < \varepsilon/2y$. Perciò

$$|\int_{a}^{a+y} f(x)dx| + |\int_{-a}^{-a+y} f(x)dx| < \varepsilon.$$

Ne segue la tesi per $y > 0$. Un ragionamento analogo vale per $-a < y < 0$.

Definizione 13 *Sia f una funzione definita e continua, tranne al più in un numero finito di punti. Supponiamo che f sia limitata su $\mathbb{R}$, e che*

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty.$$

Allora la trasformata di Fourier di f è la funzione $\hat{f}(\lambda)$ così definita:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx. \tag{10.5}$$

Osserviamo che se $f(x)$ soddisfa le condizioni indicate nella definizione, allora anche la funzione $f(x)e^{-i\lambda x}$ soddisfa le stesse condizioni, infatti $|f(x)e^{-i\lambda x}| = |f(x)|$. Questo, ed il fatto che dalla (10.1) segue la (10.2) ci consente di definire $\hat{f}$ come il limite indicato dalla (10.5).

Ci si potrebbe in realtà, evidentemente, limitare a richiedere che la funzione f sia definita, continua e limitata su $\mathbb{R} \setminus S$, dove S è un insieme di punti che, se non è vuoto, ha intersezione finita con ogni intervallo chiuso e limitato.

Esercizio 55 *Dimostrare che, se f è una funzione che soddisfa alle ipotesi della definizione 13, allora $\hat{f}(\lambda)$ è una funzione limitata su tutto $\mathbb{R}$.*

Esercizio 56 *Dimostrare che, se f è una funzione che soddisfa alle ipotesi della definizione 13, allora $\hat{f}(\lambda)$ è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.*

Dimostriamo ora un teorema che lega la trasformata di Fourier di una funzione alla trasformata di Fourier della sua derivata, in modo del tutto analogo a quanto avviene per i coefficienti di Fourier delle funzioni periodiche.

Teorema 21 *Supponiamo che f soddisfi le condizioni indicate nella definizione di trasformata di Fourier e che inoltre sia derivabile. Supponiamo che anche la sua derivata Df soddisfi le stesse condizioni. Allora:*

$$\widehat{Df}(\lambda) = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo, integrando per parti:

$$\int_{-a}^{a} Df(x) e^{-i\lambda x} dx = -i\lambda f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-a}^{+a} + i\lambda \int_{-a}^{a} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Ma poiché $f(a)$ tende a zero per $a \to +\infty$ e per $a \to -\infty$, risulta

$$\lim_{a\to\infty} -i\lambda f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-a}^{a} = \lim_{a\to\infty} -i\lambda e^{-i\lambda a} f(a) + i\lambda e^{i\lambda a} f(-a) = 0.$$

Pertanto

$$\widehat{Df}(\lambda) = i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x) e^{-i\lambda x} dx = i\lambda \hat{f}(\lambda).$$

Un altro teorema che ha un analogo per le serie di Fourier è il seguente.

Teorema 22 *Sia f una funzione che soddisfa alle condizioni per la definizione di trasformata di Fourier e $y \in \mathbb{R}$. Definiamo $f_y(x) = f(x-y)$. Allora:*

$$\hat{f}_y(\lambda) = e^{-i\lambda y}\hat{f}(\lambda).$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\hat{f}_y(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-i\lambda x}dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda(x+y)}dx = e^{-i\lambda y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx =$$

$$e^{-i\lambda y}\hat{f}(\lambda).$$

Il risultato più importante concernente l'integrale di Fourier sarà solo enunciato ed è il seguente.

Teorema 23 . *Supponiamo che $f(x)$ soddisfi alle condizioni della definizione della trasformata di Fourier e che lo stesso sia vero per la funzione $\hat{f}(\lambda)$. Allora:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

La dimostrazione di questo importante teorema è omessa. Il teorema può essere verificato direttamente in casi particolari, alcuni dei quali sono forniti dagli esercizi che seguono.

Esercizio 57 *Supponiamo che f sia una funzione continua derivabile due volte con continuità. Supponiamo inoltre che esista $M > 0$ tale che, per $|x| > M$ risulti $f(x) = 0$. Dimostrare che f soddisfa alle condizioni del teorema precedente e che pertanto:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

Esercizio 58 *Calcolare la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}$ di un intervallo $[a,b]$.*

Esercizio 59 *Supponiamo che f e g siano funzioni limitate con un numero finito di discontinuità e che siano entrambe nulle fuori di un intervallo $[-M,M]$. Dimostrare che la funzione*

$$f*g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$

è continua ed è nulla fuori dell'intervallo $[-2M,2M]$. Dimostrare inoltre che

$$\widehat{f*g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)$$

Esercizio 60 *Dimostrare che se f e g sono funzioni caratteristiche di intervalli chiusi e limitati la funzione $f * g(x)$ come definita nell'esercizio precedente soddisfa alle condizioni del Teorema 23 e che pertanto*

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Esercizio 61 *Sia $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Derivando sotto il segno di integrale, dimostrare che $\hat{u}(\lambda)$ soddisfa l'equazione differenziale:*

$$D\hat{u}(\lambda) = -\lambda\hat{u}(\lambda).$$

Dedurne che

$$\hat{u}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} = u(\lambda).$$

Esercizio 62 *Per $t > 0$ si definisca $u_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Dimostrare che*

$$\hat{u}_t(\lambda) = e^{-t\lambda^2}.$$

Esercizio 63 *Dimostrare che se $u(x) = e^{-|x|}$, allora*

$$\hat{u}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + \lambda^2}.$$

Esercizio 64 *Dimostrare che se, per $t > 0$, $u_t(x) = e^{-t|x|}$, allora*

$$\hat{u}_t(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t}{t^2 + \lambda^2}.$$

Dedurne che

$$e^{-t|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{\pi(t^2 + \lambda^2)} e^{i\lambda x} dx.$$

Gli ultimi quattro esercizi, che non sono facilissimi, si riferiscono a funzioni molto importanti nelle applicazioni alla probabilità e ai cosiddetti processi stocastici. La funzione $u(x)$ dell'Esercizio 61 è nota come la densità della distribuzione gaussiana e la funzione $\hat{u}(\lambda)$ dell'esercizio 63 è nota come la densità della distribuzione di Cauchy.

Appendice A

Quesiti d'esame

Domande

Riportiamo le domande a risposta multipla proposte agli esoneri. A pagina 73 ci sono le soluzioni commentate.

D. 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f. Allora:

1A $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$

1B $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$

1C $\hat{f}(-k) = -\overline{\hat{f}(k)}$

1D $\hat{f}(-k) = -\hat{f}(k)$

1E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f. Allora:

2A $\widehat{Df}(k) = i\hat{f}(k)$

2B $\widehat{Df}(k) = ik\hat{f}(k)$

2C $\widehat{Df}(k) = -i\hat{f}(k)$

2D $\widehat{Df}(k) = -ik\hat{f}(k)$

2E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π, sia $f_y(x) = f(x - y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e siano $\hat{f}(k)$ e $\hat{f}_y(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f e di f_y rispettivamente. Allora:

3A $\widehat{f_y}(k) = \hat{f}(k)$

3B $\widehat{f_y}(k) = -\hat{f}(k)$

3C $\widehat{f_y}(k) = e^{iky}\hat{f}(k)$

3D $\widehat{f_y}(k) = e^{-iky}\hat{f}(k)$

3E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con x su $[0, 2\pi)$. I coefficienti di Fourier di f sono:

4A $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{i}{k}$ per k intero non nullo

4B $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{2\pi i}{k}$ per k intero non nullo

4C $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{k}$ per k intero non nullo

4D $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = -\frac{i}{k}$ per k intero non nullo

4E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 5 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con $\chi_{[0,\pi]}$ su $[0, 2\pi]$. I coefficienti di Fourier di f sono:

5A $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{i((-1)^k-1)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

5B $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{(1+(-1)^k)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

5C $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{i((-1)^k-1)}{k}$ per k intero non nullo

5D $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{((-1)^k-1)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

5E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficienti di Fourier di f. La *serie di Fourier reale* di f è definita da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Il legame tra i coefficienti di Fourier di f e i coefficienti a_0, a_k e b_k è:

6A $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = \mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = \mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6B $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = 2\mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = 2\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6C $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = \mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = -\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6D $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = 2\mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = -2\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 7 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Allora:

7A G è sempre periodica

7B G non è mai periodica

7C G è periodica se f è limitata

7D G è periodica se $\int_0^{2\pi} f = 0$

7E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 8 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con x su $[-\pi, \pi)$ e sia $S(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{inx}$ allora:

8A $S(f, \pi) = \pi$

8B $S(f, \pi) = 0$

8C $S(f, \pi) = -\pi$

8D $S(f, \pi)$ non è definito

8E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 9 Sia f una funzione reale continua e periodica di periodo 2π. Allora:

9A se f è pari allora $Im(\hat{f}(n)) = 0$ per ogni n intero diverso da zero

9B se f è pari allora $\hat{f}(2k) = 0$

9C se f è dispari allora $Im(\hat{f}(n)) = 0$ per ogni n intero

9D se f è dispari allora $\hat{f}(2k + 1) = 0$

9E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 10 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni periodiche di periodo 2π. La *convoluzione* di f con g è la funzione $f * g$ definita ponendo

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π che coincide con $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ sull'intervallo $[-\pi, \pi)$. Allora $f * f$:

10A è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) e assume il valore massimo nei punti $2k\pi$

10B è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) e assume il valore massimo nei punti $k\pi$

10C è dispari (simmetrica rispetto all'origine) e assume il valore massimo nei punti $2k\pi$

10D è dispari (simmetrica rispetto all'origine) e assume il valore massimo nei punti $k\pi$

10E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 11 $w_{26} \cdot w_{14}$ è uguale a:

11A w_{40}

11B w_{224}

11C w_{20}

11D w_2

11E nessuna delle altre risposte è vera

D. 12 Sia $f(x) = x^2$. Allora $\hat{f}(w_2)$ vale:

12A $-\frac{1}{8}$

12B 0

12C $\frac{7}{24}$

12D $-\frac{23}{48}$

12E nessuna delle altre risposte è vera

D. 13 Determinare i coefficienti c_1, c_2 in modo tale che le funzioni $f(x) = 1$ e $g(x) = c_1 + c_2x^2$ risultino ortonormali rispetto al prodotto scalare definito ponendo $< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\,dx$

13A $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

13B $c_1 = 1$, $c_2 = 1$

13C le due funzioni non sono mai ortonormali

13D $c_1 = 0$, $c_2 = \sqrt{3}$

13E nessuna delle altre risposte è vera

D. 14 Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ è la funzione $\hat{u}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, ne segue che $\widehat{u * u}(\lambda)$ vale:

14A $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$

14B $e^{-\lambda^2}$

14C e^{λ^4}

14D 1

14E nessuna della altre risposte è vera

D. 15 Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0,1]$. Se $\mathbb{P}_n f = f$ allora:

15A f è combinazione lineare di funzioni di Walsh w_k con $k < 2^n$

15B f è continua

15C f ha integrale nullo

15D f è combinazione lineare di funzioni di Rademacher r_k con $k < n$

15E nessuna delle altre risposte è vera

D. 16 Sia $f(x)$ la funzione definita ponendo $f(x) = e^x$ per $x < 0$ e $f(x) = 0$ per $x \geq 0$. La trasformata di Fourier di f è:

16A $\frac{1+\mathbf{i}\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}$

16B $\frac{1+\mathbf{i}\lambda}{(1+\lambda^2)}$

16C $\frac{1+\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}$

16D $\frac{1+\lambda}{(1+\lambda^2)}$

16E nessuna delle altre risposte è vera

D. 17 Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni funzione f integrabile sull'intervallo $[0,1]$?

17A $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = r_2 \cdot \mathbb{P}_4(f)$

17B $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = r_4 \cdot \mathbb{P}_2(f)$

17C $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = \mathbb{P}_4(f)$

17D $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = \mathbb{P}_4(r_2)$

17E nessuna delle altre risposte è vera

D. 18 Sia f una funzione integrabile su $[0,1]$. Allora $\int_0^1 \sum_{k=0}^n \hat{f}(w_k) w_k$ vale:

18A 0

18B 1

18C $\hat{f}(w_0)$

18D $\sum_{k=0}^{n} w_k$

18E nessuna delle altre risposte è vera

D. 19 $\widehat{r_3}(w_4)$ vale:

19A 0

19B 1

19C -1

19D $\mathbf{i}$

19E nessuna delle altre risposte è vera

D. 20 Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0,1]$ avente media nulla sugli intervalli semiaperti della partizione di $[0,1)$ in 2^n parti uguali (in altre parole, sia f una funzione tale che $\mathbb{P}_n(f) = 0$). Allora:

20A $f = w_k$ per qualche $k < 2^n$

20B $f = r_k$ per qualche $k < 2^n$

20C f è combinazione lineare di funzioni di Walsh

20D $\hat{f}(w_k) = 0$ per ogni $k < 2^n$

20E nessuna delle altre risposte è vera

Soluzioni

Riportiamo le soluzioni commentate alle domande a risposta multipla proposte agli esoneri. Prima di leggere le soluzioni si consiglia di rispondere alle domande riportate a pagina 67

D. 1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f. Allora:

1A $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$
Risposta esatta.
Soluzione:

$$\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\overline{\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x} = \overline{\hat{f}(k)}$$

1B $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$

1C $\hat{f}(-k) = -\overline{\hat{f}(k)}$

1D $\hat{f}(-k) = -\hat{f}(k)$

1E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f. Allora:

2A $\widehat{Df}(k) = i\hat{f}(k)$

2B $\widehat{Df}(k) = ik\hat{f}(k)$
Risposta esatta.
Soluzione:

$$\widehat{Df}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Df(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x =$$

(integrando per parti)

$$= \frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(-ik)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = ik\hat{f}(k)$$

2C $\widehat{Df}(k) = -i\hat{f}(k)$

2D $\widehat{Df}(k) = -ik\hat{f}(k)$

2E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 3 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π, sia $f_y(x) = f(x-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e siano $\hat{f}(k)$ e $\hat{f}_y(k)$ il k-esimo coefficiente di Fourier di f e di f_y rispettivamente. Allora:

3A $\widehat{f_y}(k) = \hat{f}(k)$

3B $\widehat{f_y}(k) = -\hat{f}(k)$

3C $\widehat{f_y}(k) = e^{iky}\hat{f}(k)$

3D $\widehat{f_y}(k) = e^{-iky}\hat{f}(k)$

Risposta esatta.

Soluzione:

$$\widehat{f_y}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-y}^{2\pi-y} f(u)e^{-ik(u+y)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}e^{-iky}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-iku}\,\mathrm{d}u = e^{-iky}\hat{f}(k)$$

3E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con x su $[0, 2\pi)$. I coefficienti di Fourier di f sono:

4A $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{i}{k}$ per k intero non nullo

Risposta esatta.

Soluzione:

Per $k = 0$,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

Per $k \neq 0$, integrando per parti,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{xe^{-ikx}}{-ik}\bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi e^{-i2k\pi}}{-ik} = \frac{1}{-ik} = \frac{i}{k}$$

4B $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{2\pi i}{k}$ per k intero non nullo

4C $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{k}$ per k intero non nullo

4D $\hat{f}(0) = \pi$, $\hat{f}(k) = -\frac{i}{k}$ per k intero non nullo

4E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 5 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con $\chi_{[0,\pi]}$ su $[0, 2\pi]$. I coefficienti di Fourier di f sono:

5A $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{i((-1)^k-1)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} 0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Per $k \neq 0$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1e^{-ikx}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} 0e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right|_0^{\pi} = \frac{i((-1)^k-1)}{2\pi k}$$

5B $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{(1+(-1)^k)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

5C $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{i((-1)^k-1)}{k}$ per k intero non nullo

5D $\hat{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\hat{f}(k) = \frac{((-1)^k-1)}{2\pi k}$ per k intero non nullo

5E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 6 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $\hat{f}(k)$ il k-esimo coefficienti di Fourier di f. La *serie di Fourier reale* di f è definita da

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx).$$

Il legame tra i coefficienti di Fourier di f e i coefficienti a_0, a_k e b_k è:

6A $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = \mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = \mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6B $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = 2\mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = 2\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6C $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = \mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = -\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

6D $a_0 = 2\hat{f}(0)$, $a_k = 2\mathbf{Re}(\hat{f}(k))$, $b_k = -2\mathbf{Im}(\hat{f}(k))$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Riscriviamo la serie di Fourier nella forma

$$f(x) = \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (\hat{f}(k)e^{-ikx} + \hat{f}(-k)e^{ikx}).$$

Essendo f reale, $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ e quindi

$$\hat{f}(k)e^{-ikx} + \hat{f}(-k)e^{ikx} = \mathbf{Re}(\hat{f}(k))(e^{-ikx} + e^{ikx}) + \mathrm{i}\mathbf{Im}(\hat{f}(k))(e^{-ikx} - e^{ikx}).$$

L'ultima espressione, usando le identità $\cos(kx) = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}$ e $\sin(kx) = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$ si può trasformare in

$$2\mathbf{Re}(\hat{f}(k))\cos(kx) - 2\mathbf{Im}(\hat{f}(k))\sin(kx)$$

da cui segue immediatamente l'asserto

6E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 7 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo 2π e sia $G(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Allora:

7A G è sempre periodica

7B G non è mai periodica

7C G è periodica se f è limitata

7D G è periodica se $\int_0^{2\pi} f = 0$
Risposta esatta.
Soluzione:

$$G(x + 2k\pi) = \int_0^{x+2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2k\pi}^{x+2k\pi} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= k\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x).$$

7E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 8 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione periodica di periodo 2π che coincide con x su $[-\pi, \pi)$ e sia $S(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{inx}$ allora:

8A $S(f, \pi) = \pi$

8B $S(f,\pi) = 0$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Il calcolo diretto è semplice, ma si può osservare che il risultato segue immediatamente dal teorema di Dirichlet.

8C $S(f,\pi) = -\pi$

8D $S(f,\pi)$ non è definito

8E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 9 Sia f una funzione reale continua e periodica di periodo 2π. Allora:

9A se f è pari allora $Im(\hat{f}(n)) = 0$ per ogni n intero diverso da zero

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Essendo f reale $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$. D'altra parte

$$\hat{f}(-n) = \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx} =$$

(operando la sostituzione $u = -x$)

$$= \int_0^{-2\pi} f(-u)e^{-inx}(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(u)\,\mathrm{d}x = \hat{f}(n).$$

Quindi $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(n)$

9B se f è pari allora $\hat{f}(2k) = 0$

9C se f è dispari allora $Im(\hat{f}(n)) = 0$ per ogni n intero

9D se f è dispari allora $\hat{f}(2k+1) = 0$

9E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 10 Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni periodiche di periodo 2π. La *convoluzione* di f con g è la funzione $f * g$ definita ponendo

$$f * g(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Sia f la funzione periodica di periodo 2π che coincide con $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ sull'intervallo $[-\pi,\pi)$. Allora $f * f$:

10A è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) e assume il valore massimo nei punti $2k\pi$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Segue dal fatto che $f * f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\pi}$ per $-\pi \leq x < 0$ e $f * f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\pi}$ per $0 \leq x < \pi$

10B è pari (simmetrica rispetto all'asse delle y) e assume il valore massimo nei punti $k\pi$

10C è dispari (simmetrica rispetto all'origine) e assume il valore massimo nei punti $2k\pi$

10D è dispari (simmetrica rispetto all'origine) e assume il valore massimo nei punti $k\pi$

10E nessuna delle altre risposte è esatta

D. 11 $w_{26} \cdot w_{14}$ è uguale a:

11A w_{40}

11B w_{224}

11C w_{20}

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Essendo $26 = 2 + 2^3 + 2^4$, allora $w_{26} = r_2 \cdot r_4 \cdot r_5$. Essendo $14 = 2 + 2^2 + 2^3$, allora $w_{14} = r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$. Poiché $r_i^2 = 1$, $w_{26} \cdot w_{14} = r_3 \cdot r_5 = w_{20}$.

11D w_2

11E nessuna delle altre risposte è vera

D. 12 Sia $f(x) = x^2$. Allora $\hat{f}(w_2)$ vale:

12A $-\frac{1}{8}$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Una primitiva di $f(x)$ è la funzione $G(x) = \frac{x^3}{3}$. Allora $\hat{f}(w_2) = -G(0) + 2G(\frac{1}{4}) - 2G(\frac{1}{2}) + 2G(\frac{3}{4}) - G(1) = -\frac{1}{8}$.

12B 0

12C $\frac{7}{24}$

12D $-\frac{23}{48}$

12E nessuna delle altre risposte è vera

D. 13 Determinare i coefficienti c_1, c_2 in modo tale che le funzioni $f(x) = 1$ e $g(x) = c_1 + c_2x^2$ risultino ortonormali rispetto al prodotto scalare definito ponendo $< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\,dx$

13A $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

13B $c_1 = 1$, $c_2 = 1$

13C le due funzioni non sono mai ortonormali

13D $c_1 = 0$, $c_2 = \sqrt{3}$

13E nessuna delle altre risposte è vera

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Basta scegliere $c_1 = \sqrt{5}/2$, $c_2 = -3\sqrt{5}/2$ ovvero $c_1 = -\sqrt{5}/2$, $c_2 = 3\sqrt{5}/2$

D. 14 Ricordando che la trasformata di Fourier della funzione $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ è la funzione $\hat{u}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$, ne segue che $\widehat{u * u}(\lambda)$ vale:

14A $e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$

14B $e^{-\lambda^2}$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Basta ricordare che $\widehat{u * u}(\lambda) = \hat{u}(\lambda) \cdot \hat{u}(\lambda)$

14C e^{λ^4}

14D 1

14E nessuna della altre risposte è vera

D. 15 Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0, 1]$. Se $\mathbb{P}_n f = f$ allora:

15A f è combinazione lineare di funzioni di Walsh w_k con $k < 2^n$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Infatti $\mathbb{P}_n f \in \mathbb{W}_n$ e le funzioni di Walsh w_k con $k < 2^n$ sono una base per $\mathbb{W}_n$.

15B f è continua

15C f ha integrale nullo

15D f è combinazione lineare di funzioni di Rademacher r_k con $k < n$

15E nessuna delle altre risposte è vera

D. 16 Sia $f(x)$ la funzione definita ponendo $f(x) = e^x$ per $x < 0$ e $f(x) = 0$ per $x \geq 0$. La trasformata di Fourier di f è:

16A $\frac{1+\mathbf{i}\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-\mathbf{i}\lambda)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\mathbf{i}\lambda)} = \frac{1+\mathbf{i}\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}$.

16B $\frac{1+\mathbf{i}\lambda}{(1+\lambda^2)}$

16C $\frac{1+\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+\lambda^2)}$

16D $\frac{1+\lambda}{(1+\lambda^2)}$

16E nessuna delle altre risposte è vera

D. 17 Quale delle seguenti affermazioni è vera per ogni funzione f integrabile sull'intervallo $[0, 1]$?

17A $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = r_2 \cdot \mathbb{P}_4(f)$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Basta osservare che r_2 è costante sugli intervalli semiaperti della partizione di $[0, 1)$ in 4 parti uguali e ricordare che l'integrale commuta con la moltiplicazione per una costante.

17B $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = r_4 \cdot \mathbb{P}_2(f)$

17C $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = \mathbb{P}_4(f)$

17D $\mathbb{P}_4(r_2 \cdot f) = \mathbb{P}_4(r_2)$

17E nessuna delle altre risposte è vera

D. 18 Sia f una funzione integrabile su $[0, 1]$. Allora $\int_0^1 \sum_{k=0}^n \hat{f}(w_k) w_k$ vale:

18A 0

18B 1

18C $\hat{f}(w_0)$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Basta ricordare che l'integrale è lineare, che $\int_0^1 w_k = 0$ se $k > 0$ e che $\int_0^1 w_0 = 1$.

18D $\sum_{k=0}^{n} w_k$

18E nessuna delle altre risposte è vera

D. 19 $\widehat{r_3}(w_4)$ vale:

19A 0

19B 1

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Basta osservare che $w_4 = r_3$ e quindi $\widehat{r_3}(w_4) = \int_0^1 (r_3)^2 = 1$

19C -1

19D **i**

19E nessuna delle altre risposte è vera

D. 20 Sia f una funzione integrabile sull'intervallo $[0, 1]$ avente media nulla sugli intervalli semiaperti della partizione di $[0, 1)$ in 2^n parti uguali (in altre parole, sia f una funzione tale che $\mathbb{P}_n(f) = 0$). Allora:

20A $f = w_k$ per qualche $k < 2^n$

20B $f = r_k$ per qualche $k < 2^n$

20C f è combinazione lineare di funzioni di Walsh

20D $\hat{f}(w_k) = 0$ per ogni $k < 2^n$

Risposta esatta.

SOLUZIONE:

Segue dal fatto che $\mathbb{P}_n f(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{f}(w_k) w_k(x)$ e che le funzioni $w_k(x)$ sono linearmente indipendenti.

20E nessuna delle altre risposte è vera

Bibliografia

[EP] E. Prestini, *Applicazioni dell'analisi armonica*, ed. Hoepli, Milano, 1996.

[DM] H. Dym e H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972

[C] Paul Chernoff *Pointwise convergence of Fourier series,* Amer. Math. Monthly, 87 (1980), 399-400.

[Re] Ray Redheffer *Convergence of Fourier series at a discontinuity,* SIAM J. MATH. ANAL. Vol. 15, No. 5, September 1984.

[K] Y. Katznelson *An introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley & Sons, New York 1968.

[Ro] H. L. Royden *Real Analysis*, 3rd ed. McMillan, New York 1988.