L'opera di Ugo Amaldi nel contesto della diffusione delle idee di Sophus Lie in Italia

Enrico Rogora

L'opera scientifica di Ugo Amaldi, padre del famoso fisico Edoardo, non ha ricevuto grande attenzione dai matematici e dagli storici della matematica. I risultati che ottenne, nell'ambito della teoria dei gruppi di trasformazioni, non sono certamente paragonabili a quelli che, in altri campi, ottennero i grandi matematici italiani a lui contemporanei, eppure il suo lavoro merita, a nostro avviso, una più attenta considerazione, sia per il suo valore intrinseco, sia per la luce che getta su un capitolo affascinante e poco studiato della matematica italiana di quegli anni, quello della diffusione delle idee di Lie in Italia.

I contributi principali di Amaldi riguardano la classificazioni dei gruppi continui di trasformazioni di dimensione infinita, che agiscono sullo spazio tridimensionale. Si tratta, come indicheremo nei paragrafi seguenti, di un problema di grande rilevanza nell'ambito della teoria di Lie delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Recentemente problemi di questo genere, e più in generale l'interesse per la *teoria algebrica delle equazioni differenziali alle derivate parziali*[1], sono tornati ad attrarre l'attenzione degli studiosi di equazioni differenziali[2] e della teoria dei sistemi dinamici e della integrazione geometrica[3].

---

[1] Cfr. Vinogradov A. M., *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*, Providence, A. M. S., (2001)

[2] Cfr. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York, Springer (2000) [[p.]].

[3] Cfr. Mc Lachlan R., Perlmutter M., Conformal Hamiltonian systems, *Journal of Geometry and Physics* 39, (2001), 276-300, in particolare p.278.

Amaldi portò a termine un laborioso lavoro di classificazione, iniziato da Lie e proseguito da numerosi matematici tra cui Engel, Scheffer, Oseen e Kowalewski[4]. Oltre alle tecniche di Lie, perfezionate da Engel e da Medolaghi[5], fece uso di tecniche mutuate dall'analisi funzionale di Pincherle e di importanti risultati di Èlie Cartan. Questa esigenza di integrare il punto di vista di Lie con le tecniche di Cartan e dell'analisi funzionale costituisce il tratto distintivo dell'opera di Amaldi, che in parte anticipa alcuni punti di vista moderni.

Il lavoro di Amaldi, i cui risultati più interessanti vennero pubblicati tra il 1914 e il 1917, passò praticamente inosservato. La cosa non deve stupire se si considera che anche gli importantissimi lavori di Cartan sui gruppi continui infiniti non furono praticamente letti fino agli anni 60 e tutta la teoria di Lie sulle equazioni differenziali alle derivate parziali, cadde presto nell'oblio, dopo un periodo di grande vitalità.

> *The great symphony by Sophus Lie, who laid the first foundation stones in the building of the general theory of nonlinear partial differential equations, was highly recognized as a "noble" part of pure mathematics. It attracted attention of many distinguished mathematicians of that epoch. But, quite surprisingly, at least at the first glance, this glorious period suddenly ended after the World War I, which seemingly completed destroyed the great nonlinear culture of old masters. From Lies' symphony, only the scores of Lie groups and Lie algebras were extracted, subsequently elaborated and developed in thousand*

[4] Alcune informazioni sul lavoro di questi matematici si può trovare in Hawkins T., *Emergence of the theory of Lie groups: an essay in the history of Mathematics, 1869-1926*, Sources and studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2000, cui si rimanda per una ricostruzione storica e concettuale delle idee di Lie, con enfasi sui gruppi di dimensione finita.

[5] Sull'opera dimenticata di Paolo Medolaghi sui gruppi di trasformazioni di dimensione infinita si veda, oltre ai cenni contenuti nel paragrafo 6, Rogora E., *Lettere di Paolo Medolaghi a Frederich Engel*

> *of works. Dynamics and causes of these events are yet to be analyzed.*[6]

Non daremo in questa sede una analisi dettagliata dei contributi scientifici di Amaldi, rimandando per questo al capitolo “Ugo Amaldi: un profilo scientifico” del libro *Mon cher ami - illustre professore*[7]. Cercheremo invece di spiegare il contesto matematico e storico in cui si pone per apprezzarne la rilevanza e mettere in luce un filone della ricerca matematica italiana che non ci sembra adeguatamente apprezzato. Si tratta della ricerca sulla teoria dei gruppi di trasformazioni, sviluppata da Lie tra il 1869 e il 1899, ed è quindi da una breve esposizione di queste teorie che cominceremo la nostra storia.

1 Lie: cenni biografici

Sophus Lie, nato il 17 dicembre 1842 nella piccola città norvegese di Nordfiordeidet, fu uomo e matematico molto originale. Era di corporatura imponente, instancabile camminatore, dotato di grande energia fisica ed intellettuale, fino a quando, all'età di quarantasette anni, cadde vittima di un grave esaurimento nervoso. È stato uno dei personaggi carismatici della matematica del diciannovesimo secolo, anche se molti dei suoi contemporanei non ne apprezzarono lo stile, poco attento ai dettagli e al rigore, e non furono in grado di coglierne tutta la grandezza.

Solo a ventisette anni decise di diventare un matematico. Subì il fascino delle idee di Plücker, impegnandosi a cercare a nuovi orizzonti per la geometria, in particolare nella teoria delle equazioni differenziali, sia ordinarie che alle derivate parziali.

> *Il Lie prese le mosse dalle ideee del Plücker per introdurre come elementi dello spazio, anziché i punti, gli enti di una qualsivoglia schiera di superficie o di curve.*

[6] Vinogradov op. cit., p. xiv.

[7] Pubblicato a cura di Pietro Nastasi e Enrico Rogora nelle Edizioni Nuova Cultura, Roma, 2007.

Rare volte o giammai un'idea espressa da un matematico ha condotto, fra le mani di un altro, a conseguenze di così lunga portata quali doveva avere codesta.

Dal germe, che s'ascondeva nell'idea di Plücker, venne successivamente svolgendosi nello spirito del Lie il concetto di una generale teoria della trasformazione, la cui elaborazione fu il problema di tutta intera la vita del Lie.

Engel, Sophus Lie, trad. di U. Amaldi,
Giorn. di Mat., 2 vol. IX, (1902)

Lie concepiva una classe di enti matematici omogenei come un *universo geometrico* la cui comprensione si doveva basare innanzitutto sull'*intuizione* e non sugli sviluppi analitici[8]. Era quindi interessato agli aspetti invarianti e alle simmetrie degli oggetti analitici che investigava. Amava scoprire relazioni riposte tra geometrie apparentemente distanti. Nel primo lavoro che lo rese famoso[9] mostrò come la sua *geometria superiore delle sfere* fosse equivalente alla geometria delle rette di Plücker e come questa equivalenza si potesse impiegare per dimostrare nuovi teoremi. Ottenne in questo modo una famosa caratterizzazione delle linee asintotiche delle superficie di Kümmer[10].

Lie incarnava un ideale di matematico ben diverso da quello dei grandi analisti a lui contemporanei, come Karl Weirstrass. Meno interessato al rigore poneva l'intuizione al centro della propria ricerca e fu per questo molto apprezzato dai geometri della scuola italiana. Durante il suo soggiorno a Berlino, tra la fine del 1869 e i primi mesi del 1870, fece un incontro cruciale con Felix Klein, allora ventiduenne. La collaborazione tra i due fu

[8] Non si tratta di *intuizione ingenua* ma di *intuizione raffinata*, nel senso di Klein: cfr. Conferenza del 2 settembre 1893, *Le conferenze americane di Felix Klein*, a cura di P. Nastasi, in Note di Matematica, Storia e Cultura, PRISTEM/Storia, Springer, Milano (2000).

[9] Lie S., Über Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen. *Clebsch Ann.* V. (1872) 145-256.

[10] Lie S., Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. *Berl. Monatsber*, (1870), 891-899.

estremamente produttiva e stimolò Lie a concepire la teoria generale dei gruppi di trasformazioni e delle sue applicazioni alle equazioni differenziali.

Nel 1872 Lie fu nominato professore all'università di Cristiania, l'odierna Oslo. Klein e Meyer riuscirono a convincere uno studente di dottorato di Lipsia, Friedrich Engel, a recarsi a Cristiana a lavorare con Lie. Engel si rivelò un preziosissimo collaboratore. Senza la sua abnegazione Lie non sarebbe mai riuscito a completare la monumentale opera in tre volumi sui gruppi di trasformazioni[11].

Nel 1886 lasciò Cristiania per ricoprire la cattedra lasciata vacante da Klein a Lipsia, dove per dodici anni raccolse intorno a sè e iniziò alle sue teorie una schiera di discepoli di ogni nazione. Nel 1889 fu colto da gravissima crisi depressiva, da cui non si riebbe mai completamente. Tornò in patria nel 1898 per morirvi il 18 febbraio 1899 di anemia perniciosa[12].

2 Sostituire per semplificare

Al tempo di Lie coesistevano due diversi approcci alla geometria: quello completamente sintetico che affondava le sue radici nella tradizione euclidea e quello analitico, introdotto da Cartesio e Fermat. Il metodo sintetico si applicava principalmente alla geometria proiettiva mentre quello analitico si applicava allo studio delle curve e delle superfici dello spazio ordinario. Plücker dimostrò come fosse possibile utilizzare strumenti analitici per ampliare gli orizzonti della geometria proiettiva, permettendo la creazione di modelli per universi geometrici svincolati dall'esperienza sensibile tridimensionale, nei quali l'intuizione geometrica poteva ancora giocare un ruolo fondamentale di guida all'indagine e di supporto al calcolo.

Secondo l'approccio cartesiano, *fissato un sistema di riferimento*, è possibile descrivere ogni oggetto della geometria elementare con un oggetto analitico - algebrico; un'equazione, un sistema di equazioni o un sistema di

[11] Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen.* Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet. voll. I, II, III, Leipzig. Teubner, 1888.

[12] Tutti i particolari della biografia di Sopus Lie sono magistralmente esposti in Stubhug A., *The mathematician Sophus Lie: It was the audacity of my thinking*, Berlin, Springer, (2002).

disequazioni. Naturalmente l'oggetto analitico - algebrico cambia al variare del sistema di riferimento e un aspetto centrale del metodo cartesiano consiste nello scegliere il sistema di riferimento in cui la descrizione sia la più semplice possibile. Il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro, ovvero da un sistema di coordinate ad un altro si effettua con una *sostituzione lineare* delle variabili.

Richiamiamo brevemente il procedimento nel caso delle coniche, per fissare l'attenzione su alcuni punti che verranno sviluppati in seguito. Fissato nel piano un sistema cartesiano ortogonale monometrico si ottiene un sistema di coordinate x, y tramite il quale è possibile associare ad ogni punto una coppia di numeri reali e viceversa. I punti su una conica sono tutti e soli quelli le cui coordinate verificano un'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Se si considera un nuovo sistema di riferimento ottenuto traslando e ruotando il precedente, le coordinate $\overline{x}, \overline{y}$ rispetto al nuovo sistema sono legate a quelle del vecchio dalle formule

$$x = \cos\theta \cdot \overline{x} + \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{y} + a \qquad y = \operatorname{sen}\theta \cdot \overline{x} - \cos\theta \cdot \overline{y} + b. \tag{1}$$

Con cambiamenti di coordinate siffatti, ovvero *cambiando riferimento*, è possibile semplificare l'equazione di una conica. Per esempio l'equazione

$$3x^2 + 3y^2 + xy - 2 = 0$$

si trasforma nell'equazione

$$2\overline{x}^2 + \overline{y}^2 - 1 = 0$$

operando la rotazione

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y} \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y}.$$

Due equazioni legate dalla trasformazione (1) descrivono la *stessa* conica in due *sistemi cartesiani ortogonali monometrici* diversi. Ponendo $\overline{x} = x$

e $\overline{y} = y$ in (1) possiamo interpretare (1) anche come le equazioni di una trasformazione del piano *nello stesso sistema di coordinate.* Si tratta di una trasformazione particolare, che *preserva le distanze*[13]. Trasformazioni di questo tipo si dicono *euclidee.* Applicando una trasformazione euclidea all'equazione di una conica otteniamo l'equazione di una nuova conica nello stesso sistema di riferimento, che si può pensare ottenuta dalla prima applicando una *trasformazione rigida*, che preserva le caratteristiche metriche: aree, distanze, angoli tra le tangenti.

Tornando alla prima interpretazione, entrambe le equazioni, riferendosi alla stessa conica, debbono contenere le stesse informazioni geometriche, solo espresse in due sistemi di riferimento ortogonali monometrici diversi. L'espressione analitica di una quantità geometrica relativa alla conica in funzione dei coefficienti dell'equazione della conica stessa, quale la distanza tra i fuochi o l'area di un'ellisse, l'angolo tra gli asintoti di un'iperbole, la distanza tra fuoco e direttrice di una parabola, ecc., deve essere *invariante* per la trasformazione di coordinate (1). Più in generale, le relazioni analitiche tra le coordinate o le equazioni di luoghi notevoli associati alla conica devono trasformarsi in modo da preservare le stesse relazioni analitiche ovvero, con il lunguaggio preciso della matematica, che non preciseremo ulteriormente in questa sede, essere *covarianti* delle trasformazioni euclidee.

È quindi naturale interpretare lo studio delle proprietà geometriche di una conica come lo studio delle funzioni razionali dei coefficienti dei polinomi di secondo grado che restano *invarianti* o *covarianti* delle trasformazioni indotte sui coefficienti dalle sostituzioni (1).

Invece di limitarci alle trasformazioni (1) possiamo considerare trasformazioni più generali, che ancora trasformino equazioni di secondo grado in equazioni di secondo grado. Per esempio, le trasformazioni

$$x = \alpha \cdot x + \beta \cdot \overline{y} + a \qquad y = \gamma \cdot \overline{x} - \delta \cdot \overline{y} + b, \tag{2}$$

assoggettate alla sola condizione $\alpha\gamma - \beta\delta \neq 0$ che garantisce che la trasformazione sia *invertibile.* Con queste trasformazioni si ammettono cambia-

[13] Per verificarlo, siano $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ due punti e le rispettive coordinate. Componendo l'espressione $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, che rappresenta il quadrato della distanza tra i due punti, con la trasformazione (1), si ottiene la stessa espressione.

menti di sistema di riferimento, detti *affini*, più generali di quelli euclidei che abbiamo considerato in precedenza. Permettendo cambi di coordinate affini, ammettiamo che un sistema di riferimento possa essere costituito da due rette incidenti qualsiasi e che su ognuna di esse sia possibile scegliere una unità di misura diversa, ovvero che le trasformazioni cui pensiamo di assoggettare una conica non siano solo rotazioni e traslazioni ma più in generale, trasformazioni continue che trasformano rette in rette. È chiaro allora che quantità che prima venivano preservate, come la lunghezza dell'asse minore e maggiore di un'ellisse non sono più preservate da queste nuove trasformazioni, che ne preservano invece altre, come la proprietà di essere un'ellisse o un'iperbole. Le nuove quantità invarianti sono quelle che descrivono le *proprietà geometriche* delle coniche *relativamente* al nuovo insieme di trasformazioni, ovvero le *proprietà affini delle coniche*.

Osserviamo che sia l'insieme delle trasformazioni (1) che l'insieme delle trasformazioni (2) godono di tre proprietà notevoli.

1. La composizione di due trasformazioni dello stesso insieme è ancora una trasformazione dello stesso insieme.

2. L'insieme contiene la trasformazione identica

$$x = \overline{x} \qquad y = \overline{y}$$

3. Accanto ad ogni trasformazione esiste, nello stesso insieme, la *trasformazione inversa*, ovvero la trasformazione che, composta a quella di partenza, restituisce l'identità.

Ogni insieme di trasformazioni che gode di tutte e tre queste proprietà si dice *gruppo di trasformazioni*. Quando le trasformazioni del gruppo dipendono in maniera *continua* da un insieme di parametri (a, b e θ nel caso delle trasformazioni euclidee; a, b, α, β, γ, δ nel caso delle trasformazioni affini) il gruppo si dice *continuo*[14]. Se il numero di parametri è finito avre-

[14] Nella teoria di Lie dei gruppi di trasformazioni continue, la nozione di continuità di una trasformazione necessita di una trattazione più attenta quando le trasformazioni

mo un gruppo continuo finito di trasformazioni, altrimenti il gruppo si dirà *infinito*[15].

Intorno al 1870 Klein e Lie concepirono l'idea che una geometria fosse un insieme con un gruppo di trasformazioni e che le proprietà geometriche rilevanti di un oggetto di questa geometria siano gli invarianti del gruppo. Queste idee prenderanno forma nel famoso *programma di Erlangen*[16]. Va detto però che il suo concepimento, che abbiamo cercato di illustrare con l'esempio elementare delle coniche, non fu motivato da un'analisi raffinata della geometria elementare ma da problemi più avanzati e la sua principale ragion d'essere, su cui dovremo ritornare analizzando l'opera di Lie relativa allo studio delle equazioni differenziali, riguarda la possibilità di formulare una nozione astratta di *equivalenza* tra geometrie apparentemente diverse e di trarre quindi il massimo vantaggio dallo studio di una geometria per la comprensione di un'altra equivalente e viceversa. Abbia-

dipendono da infiniti parametri. Secondo Lie, un *gruppo continuo di trasformazioni* è definito da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, le cui soluzioni sono le espressioni analitiche delle trasformazioni del gruppo, dette *trasformazioni finite*. la continuità va intesa quindi nel senso della dipendenza continua delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali dalle condizioni iniziali. Come esempio di equazioni finite di un gruppo, consideriamo il gruppo delle proiettività della retta. Esso è costituito dalle trasformazioni

$$y(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$$

il cui sistema di definizione si riduce all'unica equazione differenziale del terzo ordine

$$\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$$

[15] Utilizzeremo, qui e nel seguito, la notazione in uso fino alla prima metà del ventesimo secolo, secondo cui finito e infinito si riferiscono alla *dimensione* del gruppo e non alla cardinalità dell'insieme delle trasformazioni. Un altro punto in cui ci discosteremo dalla notazione moderna è quello di chiamare gruppo continuo infinito di trasformazioni quello che è solo uno pseudogruppo di trasformazioni locali, cfr. V. V. Gorbatsevich,A. L. Onishchik,E. B. Vinberg, *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v. 30, New York, Springer (1993), .

[16] Klein F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der Universität zu Erlangen.* Erlangen. A. Deichert, (1872).

mo già accennato agli studi che hanno condotto a questo punto di vista quando abbiamo ricordato il lavoro di Lie sulla geometria superiore delle sfere e la sua dimostrazione dell'equivalenza di questa geometria con quella delle rette.

Alcuni dei temi che abbiamo brevemente rimarcato nell'esempio delle coniche ricorrono sistematicamente nelle ricerche di Lie: la ricerca degli *invarianti*, lo studio delle *equivalenze*, la ricerca delle *simmetrie* di un oggetto geometrico ovvero delle trasformazioni che lasciano invariato tale oggetto.

Il concetto di *gruppo di simmetria* e le sue prime feconde applicazioni fecero la prima apparizione con i lavori di Galois sulla risolubiulità delle equazioni algebriche. Il *gruppo di Galois* dell'equazione $F(x) = 0$ è il sottogruppo del gruppo delle sostituzioni delle radici che fissano tutte le relazioni algebriche razionali tra le radici stesse. La struttura di questo gruppo è intimamente legata alla risolubilità dell'equazione. Per esempio, una equazione è risolubile per radicali, ovvero esistono formule analoghe alle formule risolutive delle equazioni di secondo grado per calcolare le radici a partire dai coefficienti se e solo se il gruppo di Galois $G(F)$ è *risolubile*, ovvero esiste una successione $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_h = G$ di sottogruppi normali di G tale che G_i/G_{i-1} è un gruppo ciclico. Lie considerava l'estensione della teoria di Galois allo studio delle equazioni differenziali come lo scopo principale dei suoi studi.

3 Modelli differenziali

Abbiamo illustrato nel paragrafo precedente come l'approccio cartesiano introduca nella geometria lo studio delle proprietà algebriche dei sistemi di equazioni e disequazioni. Anche lo studio di molti sistemi fisici si può ridurre all'analisi di un sistema di equazioni tra *quantità variabili*[17], ma è necessario considerare, oltre alle operazioni elementari di somma e prodotto di quantità variabili, operazioni funzionali più complesse, tra cui assumono particolare rilievo quelle di *derivazione*, che danno luogo alla considerazione

[17] "Tutto ciò che non si condensa in un'equazione non è scienza". Albert Einstein, *Come io vedo il mondo*, Newton e Compton, (1988).

di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali che esprimono il legame tra una quantità variabili, cioè una funzione, con i suoi tassi di variazione, ovvero le sue derivate. Per esempio, quando il tasso di variazione di una quantità variabile $n(t)$ è proporzionale alla quantità $n(t)$ stessa, il fenomeno è descritto dall'equazione differenziale

$$n(t) = c \cdot n'(t),$$

che ha come soluzione la funzione $n(t) = e^{ct} + K$.

Anche la legge fondamentale della meccanica si esprime con una equazione differenziale, la ben *equazione di Newton*

$$f(x(t), t) = m \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}\, t^2}$$

dove m è la massa di una particella puntiforme di posizione $x(t)$ soggetta ad un campo di forze $f(x(t), t)$ (f e x sono quantità vettoriali).

Un'equazione differenziale si dice *ordinaria* quando la funzione incognita dipende da una sola variabile indipendente, come negli esempi di cui sopra, altrimenti si dice *alle derivate parziali*. L'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, y, z) = 0$$

è un esempio di equazione alle derivate parziali, che descrive, per esempio, il potenziale del campo elettrico in assenza di cariche.

A partire dalle ricerche di Newton, il successo dei modelli differenziali, ovvero dei sistemi di equazioni differenziali, è stato enorme. Anche nel contesto di questi sistemi, come nel caso dei sistemi di equazioni polinomiali, si possono semplificare le equazioni con una sostituzione di variabili e dare senso alla ricerca degli *invarianti e covarianti differenziali*, che esprimono le quantità fisicamente significative. Lie considerò per primo i problemi di *equivalenza*, *determinazione degli invarianti* e *simmetria* per i sistemi di equazioni differenziali, sia ordinarie che alle derivate parziali, e sviluppò gli strumenti necessari per affrontarli.

Il principale di questi strumenti è quello che Lie chiamava *gruppo delle trasformazioni infinitesime* di un gruppo di trasformazioni e che oggi chiamiamo *algebra di Lie* del gruppo. Per definire una *trasformazione infinitesima*, l'idea è quella di partire da un *sottogruppo ad un parametro.* L'idea fondamentale, che illustreremo in un esempio concreto tra breve, è che ogni trasformazione del sottogruppo ad un parametro si può ottenere come iterazione infinita di una stessa *trasformazione infinitesima.* Più precisamente si dimostra che il gruppo ad un parametro si può ottenere integrando un campo vettoriale, il cui valore nell'identità del gruppo è la trasformazione infinitesima cercata. L'insieme di queste *trasformazioni infinitesime*, oltre a caratterizzare quasi completamente il gruppo e i suoi invarianti, ha una struttura algebrica molto più semplice del gruppo di partenza. Infatti le trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo di trasformazioni costituiscono uno *spazio vettoriale* munito di una forma bilineare antisimmetrica che soddisfa l'*identità di Jacobi* e che prende il nome di *parentesi di Lie.* Se indichiamo con $[X, Y]$ la parentesi di Lie di due trasformazioni infinitesime X e Y, l'identità di Jacobi è

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

Per illustrare l'idea in un caso concreto si pensi al gruppo delle rotazioni dello spazio ordinario. Questo si può pensare come l'insieme delle matrici *ortogonali* 3×3 ovvero le matrici A tali che $A \cdot A^t$ è la matrice unità. Si considerino i tre sottogruppi ad un parametro costituiti dalle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & -\operatorname{sen}\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\mu & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\nu & -\operatorname{sen}\nu \\ 0 & \operatorname{sen}\nu & \cos\nu \end{pmatrix}.$$

I corrispondenti generatori infinitesimi si ottengono semplicemente derivando le matrici rispetto al parametro e valutando in zero. Si ottengono quindi le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Per ottenere dal generatore infinitesimo X il corrispondente gruppo ad un parametro bisogna integrare l' equazione differenziale

$$A'(t) = A(t)X$$

dove $A(t)$ è un a funzione a valori matriciali con la condizione iniziale che $A(0)$ sia la matrice identica Id. La soluzione di questa equazione differenziale si può calcolare esplicitamente attraverso l'esponenziale di una matrice

$$A(t) = \exp(t \cdot X) = Id + t \cdot X + \frac{t^2}{2} \cdot X^2 + \frac{t^3}{3!} \cdot X^3 + \dots$$

Se, per esempio,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$X^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad X^4 = X,$$

e quindi

$$\exp(tX) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots & -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 0 \\ t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

e riotteniamo il primo dei tre sottogruppi ad un parametro da cui siamo partiti. Analogamente per gli altri due. Ma, come abbiamo già detto, l'insieme dei generatori infinitesimi è *lineare* e quindi, essendo il gruppo ortogonale dipendente da tre parametri essenziali, il generatore infinitesimo generale è combinazione lineare dei tre generatori infinitesimi (3) indipendenti, e quindi è una qualunque matrice antisimmetrica. Integrando il generatore infinitesimo generale possiamo ricoprire interamente la componente connessa del gruppo ortogonale contenente l'identità.

Per quanto riguarda le parentesi di Lie, abbiamo che in ogni algebra di Lie di matrici $[X, Y]$ è il *commutatore* di X e Y, ovvero $[X, Y] = XY - YX$. Nell'esempio del gruppo ortogonale, in cui le matrici dell'algebra di Lie sono, come abbiamo visto, le matrici antisimmetriche, la parentesi di Lie è quindi

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & b_2c_1 - b_1c_2 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & 0 & a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_2c_1 - a_1c_2 & a_1b_2 - a_2b_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Quanto abbiamo illustrato nel caso particolare del gruppo ortogonale vale in generale per un gruppo continuo di trasformazioni *finito* e più in generale per un *gruppo di Lie* di dimensione finita. È possibile cioè definire un'applicazione, detta *applicazione esponenziale* che realizza un diffeomorfismo tra un aperto dell'algebra di Lie del gruppo contenente lo zero e un aperto del gruppo contenente l'identità. Attraverso l'applicazione esponenziale si dimostra che molti dei problemi e delle applicazioni che emergono nello studio di un gruppo continuo finito di trasformazioni si possono affrontare e risolvere limitandosi alla considerazione dell'algebra di Lie del gruppo ovvero, con il linguaggio di Lie, al *gruppo infinitesimale.*

La struttura di algebra di Lie di uno spazio vettoriale pone vincoli molto forti e permette di classificare completamente le algebre di Lie *semplici* di dimensione finita (Killing, Cartan) e le loro rappresentazioni (Cartan)[18].

[18] Anche per l'analisi storica dei lavori di Killing e Cartan si rimanda senz'altro al già citato libro di Hawkins.

4 Punto di vista gruppale nella teoria delle equazioni differenziali

Il punto di vista di Lie sulle equazioni differenziali pone al centro dell'analisi il concetto di *simmetria* e dà origine a una teoria ricca e complessa. Per i nostri scopi basta un'idea piuttosto vaga e parziale di questa teoria[19]. Alla base di questo approccio c'è l'idea di trasformare una equazione differenziale in un'altra in modo che le soluzioni dell'una corrispondano esattamente alle soluzioni dell'altra. L'insieme di siffatte trasformazioni costituisce un *gruppo*[20], che dipende da un numero finito di parametri nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, mentre può dipendere da funzioni arbitrarie nel caso delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Per semplificare la trattazione limitiamoci ad analizzare l'effetto di un cambiamento di coordinate in una equazione differenziale ordinaria del primo o del secondo ordine, cioè in un' espressione del tipo

$$F(x, y, y') = 0 \qquad G(x, y, y', y'') = 0$$

rispettivamente, dove F e G sono funzioni "sufficientemente" derivabili e $y = y(x)$ è la funzione incognita.

Ogni trasformazione *puntuale* del tipo

$$\overline{x} = \phi(x, y) \qquad \overline{y} = \psi(x, y)$$

si può *prolungare* agli *elementi del primo ordine* e a quelli del *secondo ordine* ponendo

$$\overline{y}' = \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} = \frac{\psi_x + y'\psi_y}{\phi_x + y'\phi_y}$$

[19] Per maggiori dettagli, cfr. Amaldi U., *Introduzione alla teoria dei gruppi continui infiniti di trasformazioni*, Roma, Libreria dell'Università di Roma, Parte I, (1942); Parte II, (1944); Hawkins T., *Emergence of the theory of Lie groups: an essay in the history of Mathematics, 1869-1926*, Sources and studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2000; Olver P., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, New York, Springer, (2000), Vinogradov, op. cit..

[20] Più precisamente un *gruppo locale*.

e

$$\overline{y}'' = \frac{d\overline{y}'}{d\overline{x}} = \frac{(\overline{y}')_x + y'\,(\overline{y}')_y + y''\,(\overline{y}')_{y'}}{\phi_x + y'\phi_y} \tag{6}$$

Assegnato un gruppo di trasformazioni puntuali in due variabili G e prolungando ogni trasformazione alle derivate prime come specificato in (6) otteniamo il *primo prolungamento* G_1 di G che agisce sullo spazio delle variabili x, y, y'. Analogamente, prolungando le trasformazioni puntuali alle derivate seconde otteniamo il *secondo prolungamento* G_2 di G che agisce sullo spazio delle variabili x, y, y', y''. Esistono formule del tutto analoghe, solo più complicate da scrivere, per prolungare una trasformazione puntuale di n variabili alle derivate parziali di qualsiasi ordine di una funzione incognita.

L'insieme dei prolungamenti delle trasformazioni puntuali è un insieme naturale di trasformazioni tra cui cercare le simmetrie di una equazione differenziale e trasformare l'equazione data in una *equazione equivalente*. È naturale chiedersi se possono esistere simmetrie in un gruppo di trasformazioni più ampio.

Una delle prime scoperte importanti di Lie riguarda l'esistenza di una siffatta classe più ampia, cioè quella delle *trasformazioni di contatto*. Nel caso delle equazioni differenziali ordinarie di secondo grado si tratta delle trasformazioni

$$\overline{x} = \phi(x, y, y') \qquad \overline{y} = \psi(x, y, y') \qquad \overline{y}' = \chi(x, y, y').$$

che trasformano la *forma di contatto* $dy = y'dx$ in sè.

Anche le trasformazioni di contatto si possono definire per un numero qualsiasi di variabili e si possono estendere alle derivate parziali di ordine qualsiasi. Possiamo a questo punto definire precisamente la nozione di *gruppo di simmetria* dell'equazione differenziale $G(x, y, y', y'') = 0$ utilizzata da Lie e dai suoi successori[21]. Si tratta dell'insieme delle trasformazioni

[21] La generalizzazione di questa nozione di gruppo di simmetria ad equazioni differenziali, ordinarie o alle derivate parziali, di ordine superiore è solo una questione di maggior complicazione formale.

L'approccio moderno alla gruppo di trasformazioni di un sistema di equazioni differendi contatto le cui estensioni

$$\overline{x} = \phi(x, y, y', y'') \qquad \overline{y} = \psi(x, y, y', y'')$$
$$\overline{y}' = \chi(x, y, y', y'') \qquad y'' = \omega(x, y, y', y'') \quad (7)$$

sono tali che

$$G(\phi(x, y, y', y''), \psi(x, y, y', y''), \chi(x, y, y', y''), \omega(x, y, y', y'')) = 0$$

per tutti gli x, y, y', y'' tali che $G(x, y, y', y'') = 0$. Ogni simmetria di un'equazione differenziale trasforma l'insieme delle soluzioni dell'equazione in sè. Si noti però che esistono equazioni differenziali che ammettono simmetrie pur non ammettendo soluzioni.

Il gruppo di simmetria delle sole trasformazioni puntuali è più semplice da determinare di quello delle trasformazioni di contatto, ma riveste comunque grande interesse per la teoria.

Lie osservò che per determinare il gruppo di simmetria di una equazione differenziale ordinaria, l'insieme degli invarianti differenziali di un gruppo di simmetria e la forma generale delle equazioni che ammettono un dato gruppo di simmetria è sufficiente limitarsi all'algebra di Lie delle trasformazioni infinitesime.

Lie mostrò anche che il suo approccio, fondato sullo studio dei gruppi di simmetria, è in grado di fornire una spiegazione unificata di tutti i metodi di integrazione noti per risolvere le equazioni differenziali ordinarie e fu anche in grado di fornire una classificazione di tutte le equazioni differenziali ordinarie in funzione dei loro gruppo di simmetria, identificando le equazioni che si possono ridurre ad equazioni di ordine più basso e quelle che possono essere completamente integrate attraverso l'applicazione di metodi gruppali[22].

ziali richiede innanzitutto una riformulazione del concetto stesso di sistema di equazioni differenziali, analoga alla riformulazione del concetto di varietà algebrica come schema, cfr. Vinogradov, op.cit.

[22] Cfr. Lie S., Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Trasformationen gestatten, *Math. Ann.*, XXXII, 213-281, (1888).

Questi importantissimi risultati, relativi alle equazioni differenziali ordinarie, si fondano sulla classificazione di tutti i gruppi continui finiti ed infiniti di trasformazioni del piano, che Lie ottenne tra il 1873 e il 1874, anche se non pubblicò i risultati definitivi prima del 1878.[23] È quindi comprensibile come Lie considerasse la classificazione di tutti i gruppi continui in n variabili, necessaria per generalizzare i risultati sopra citati ai sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali, come *il problema fondamentale della teoria dei gruppi continui.*

Prima di concludere il paragrafo è importante chiarire che esistono sostanziali differenze tra la teoria dei gruppi continui finiti, sufficienti per la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie, e quella dei gruppi continui infiniti, necessari per la teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali. La teoria dei gruppi continui finiti, con Killing e Cartan assunse una veste algebrica che in parte la allontanò dalle concezioni di Lie portandola a considerare una serie di nuovi problemi che si riveleranno cruciali per le applicazioni alla meccanica quantistica e che diedero inizio alla teoria delle rappresentazioni. Le teoria dei gruppi infiniti restò invece sostanzialmente impenetrabile per decenni e solo Cartan riuscì ad ottenere risultati generali importanti[24] con metodi che risulteranno sostanzialmente incomprensibili ai matematici suoi contemporanei. Una delle ragioni per cui lo studio dei gruppi continui infiniti risulta più complicato risiede nel fatto che il legame tra gruppo e algebra di Lie, così stretto per i gruppi continui finiti, non lo è altrettanto per i gruppi continui infiniti ed è quindi necessario, almeno oggi, rinunciare a una teoria generale dei gruppi di Lie di dimensione infinita e limitarsi a classi speciali di tali gruppi, da studiare separatamente: gruppi di diffeomorfismi, gruppi di trasformazioni di gauge; gruppi di operatori pseudodifferenziali[25].

[23] cfr. Hawkins, op. cit., p. 76.

[24] Cfr. Cartan E., "Sur la structure des groupes infinis de transformations I e II", *Annales scientifiques École Normale Sup. Paris* (3), 21, (1904), pp. 153 -206 e (3) 22, (1905), pp. 219-308; "Les groupes de transformations continus, infinis, simples", *Annales scientifiques École Normale Sup. Paris* (3), 26, (1909), pp. 93 -161.

[25] Cfr. Khesin B., Wendt R., *The geometry of infinite-dimensional groups*, New York, Springer (2009).

5 Il problema fondamentale

Come abbiamo già detto nel paragrafo precedente, dopo la classificazione dei gruppi continui di trasformazioni in due variabili, Lie pose al centro del suo programma di ricerca il problema di determinare, *a meno di similarità*, tutti i gruppi continui di trasformazioni in n variabili, finiti e infiniti, per ogni n. Questo era considerato *il problema fondamentale nella teoria dei gruppi di trasformazioni.* Il problema generale si rivelò intrattabile, e Lie concentrò i suoi sforzi sui casi iniziali, $n = 1, 2, 3$, che hanno grande interesse per le applicazioni. Lie risolse completamente il problema per $n = 1, 2$ e annunciò di aver completato la classificazione, limitatamente ai gruppi di trasformazioni puntuali, anche nel caso $n = 3$, senza però pubblicare i risultati.

Molti dei suoi discepoli, tra cui Engel, Kowalewski, Scheffers ed Osee, contribuirono all'avanzamento della classificazione per $n = 3$ fornendo varie classi di esempi, sia puntuali, sia di contatto. Contributi importanti alla teoria generale furono dati da Paolo Medolaghi, della cui interessante vicenda umana e scientifica diremo qualcosa nel paragrafo successivo.

Finalmente, Ugo Amaldi, in una serie di lavori pubblicati tra il 1908 e il 1917, basandosi anche sulle ricerche di Medolaghi e su risultati fondamentali ottenuti da Elie Cartan con il suo calcolo delle forme differenziali, completò la laboriosa classificazione dei gruppi continui di trasformazioni in tre variabili, puntuali e di contatto, finiti e infiniti[26].

Purtroppo il lavoro di Amaldi passò praticamente inosservato, innanzitutto perchè il problema non era più al centro degli interessi dei matematici dell'epoca che si rendevano conto come i risultati di Lie sui gruppi continui infiniti si fondavano su metodi e principi che avevano bisogno di una profonda revisione critica. Inoltre i risultati principali di Amaldi furono pubblicati in un periodo infausto, nel corso della prima guerra mondiale, su riviste di scarsa circolazione e il loro autore non fece nulla per pubblicizzare le sue scoperte.

[26] U. Amaldi, Sulla classificazione dei gruppi continui di trasformazioni di contatto dello spazio, *Memorie Soc. It. dei XL*, (3), XX (1918).

Recentemente l'interesse per la classificazione dei gruppi continui di trasformazioni in n variabili si è ravvivato[27] con la rivalutazione dell'approccio di Lie alla teoria dei sistemi di equazioni alle derivate parziali e le indagini di Amaldi meriterebbero a nostro avviso di essere riconsiderate.

6 Cenno alle ricerche di Paolo Medolaghi

Lie diede un'esposizione dettagliata e organica della sua teoria dei gruppi continui finiti nel trattato scritto con Engel[28]. Purtroppo il progetto di scrivere un simile trattato anche per la teoria dei gruppi infiniti non fu mai realizzato. Prima della morte di Lie, Engel diede un contributo importante alla teoria fornendo una forma generale a cui si possono ricondurre le equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo continuo infinito ma per le applicazioni, in particolare al problema fondamentale della classificazione dei gruppi di trasformazioni, era necessario determinare tale forma anche per le equazioni delle trasformazioni finite. Queste furono trovate da un giovane matematico italiano, Paolo Medolaghi.

> *Il Medolaghi, in* Sulla teoria dei gruppi continui, Ann. di Mat. (2), vol. 25, (1897)*, era riuscito a identificare i gruppi caratteristici dell'Engel e a dare un procedimento determinato e diretto, che permette di risalire dalle equazioni di definizione delle trasformazioni infinitesime di un gruppo qualsiasi alle equazioni di definizione delle rispettive trasformazioni finite, non appena siano note le equazioni del corrispondente gruppo caratteristico dell'Engel; e codeste equazioni di definizione sotto la forma del Medolaghi rappresentano per ora il più semplice e maneggevole strumento di ricerca, che si possieda in questo campo.*

[27] Lavori recenti sul caso $n = 3$ sono Gonzalez-Lopez et al. "Lie algebras of differentiable operators in two complex variables", Am. J. of Math. 115, 1163-1185, "Lie algebras of vector fields in the real plane", Proceedings London Math. Soc. 64 (1992), 339-368, "Real Lie algebras of differential operators, and quasi-exactly solvable potentials" Phil Trans. R. Soc. London A (1996), 1165-1193.

[28] Cfr. nota 11, p. 5.

Dall'intervento di Amaldi alla SIPS (1907)

Come abbiamo già accennato nella nota a p. 9, le trasformazioni di un gruppo di Lie di trasformazioni sono le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, ordinarie o alle derivate parziali. Questo sistema si chiama il *sistema delle equazioni finite del gruppo.* Analogamente, il *sistema delle equazioni infinitesime del gruppo* è il sistema di equazioni differenziali *lineari* la cui soluzione generale è la trasformazione generale infinitesima del gruppo.

Per esempio, la più generale trasformazione infinitesima $\xi(x)\frac{\partial}{\partial x}$ del gruppo proiettivo della retta ha forma

$$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

con c_0, c_1, c_2 costanti arbitrarie[29].

Per fornire un esempio di gruppo infinito di trasformazioni consideriamo il *gruppo equivalente*, le cui trasformazioni finite sono l'integrale generale dall'unica equazione del primo ordine

$$\frac{\partial(x'_1, \ldots, x'_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1.$$

Passando alle trasformazioni infinitesime, si ha che il campo vettoriale $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$ è una trasformazione infinitesima del gruppo equivalente se e solo se

$$\mathrm{div}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0.$$

Medolaghi cominciò a interessarsi della teoria generale dei gruppi di trasformazioni con l'intento di applicarla allo studio delle equazioni differenziali. Utilizzando i suoi risultati sulla struttura del sistema delle equazioni

[29] Infatti, la proiettività $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ è l'identità quando $a = d = 1$ e $b = c = 0$, e le sue deformazioni si ottengono per $a = 1 + \alpha\epsilon$, $b = \beta\epsilon$, $c = \gamma\epsilon$, $d = \delta\epsilon$. Il campo vettoriale corrispondente ad una tale deformazione è $\left[\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{(1+\alpha\epsilon)x+\beta\epsilon}{\gamma\epsilon x+1+\delta\epsilon} - x\right)\right]\frac{\partial}{\partial x}$, ovvero, con facili calcoli, $(-\gamma x^2 + (\alpha - \delta)x + \beta)\frac{\partial}{\partial x}$, da cui segue l'asserto.

finite di un gruppo diede un contributo importante alla soluzione del problema fondamentale della teoria dei gruppi continui di trasformazioni per $n = 3$ e alle sue applicazioni alla classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine. Le parole nell'introduzione al suo principale lavoro sull'argomento[30] delineano molto chiaramente il suo programma di ricerca.

> *In una memoria pubblicata tra i* Leipziger Berichte, *il prof. Lie ha sviluppata una generale teoria di integrazione per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni. La teoria generale è in quella Memoria illustrata con alcuni esempi, – altri esempi furono portati dal sig. Beudon, il quale anche indicò un programma di lavoro di cui le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine potrebbero essere l'oggetto. Questo programma è sul genere di quello che in una celebre nota del 1874 il Lie formulava per le equazioni differenziali ordinarie, e che lo stesso Autore, in una serie di Memorie divenute ormai classiche, portava a compimento.*
>
> *Per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ci si presenta un programma di lavoro composto di quattro parti. Occorre infatti:*
>
> 1. *determinare tutti i diversi tipi di gruppi infiniti di trasformazioni di contatto in tre variabili;*
> 2. *per ognuno dei tipi trovati, determinare le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine invarianti;*
> 3. *per ognuna delle equazioni trovate e risolte così a forma canonica, sviluppare una razionale teoria dell'integrazione (come è possibile, essendo ogni volta applicabile il metodo di Darboux);*

[30] Medolaghi P., "classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali", *Annali di Mat.* (3) 1, (1898), pp. 229-263.

4. *stabilire i criteri che permettono di riconoscere se una proposta equazione* $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ *ammette un gruppo infinito, e studiare le operazione che in tale caso sono necessarie per ridurla alla forma canonica.*

A questo vasto programma di lavoro, che ancora restava tutto a sviluppare, io mi sono proposto di portare con queste ricerche un primo, modesto contributo.

Mi sono limitato a considerare le equazioni che ammettono un gruppo di trasformazioni puntuali*, e per queste equazioni ho cercato di sviluppare le prime due parti del programma sopra indicato [sostituendo] ... al problema primitivo uno più semplice.*

La biografia di Medolaghi è di grande interesse[31]. Dopo essersi laureato in matematica nel 1895 con una tesi in cui dimostrava alcuni risultati fondamentali sulla struttura del sistema di equazioni finite di un gruppo ed essersi dedicato fino al 1899 allo studio della teoria dei gruppi di trasformazioni, divenne Vice segretario nel Ministero delle Finanze e nel 1899 Attuario Capo della Cassa Nazionale di Previdenza per l'Invalidità e la Vecchiaia degli operai, fondata l'anno precedente. Nel 1907 pubblicò il suo ultimo lavoro di Analisi, interessandosi successivamente di calcolo delle probabilità e di teoria del rischio e pubblicando, anche in questi campi, lavori importanti.

Tra il 1923 e il 1926 fu direttore generale della Cassa Nazionale di Previdenza per gli operai che divenne poi Istituto Nazionale Fascista della Previdenza Sociale, di cui rimase direttore fino al 1936. Si iscrisse al Partito Nazionale Fascista il 21 Aprile 1926. Nel 1937 venne nominato *per chiara fama* professore ordinario di Economia e Finanza delle Imprese di Assicurazione presso la Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali di Roma e successivamente presso la Facoltà di Economia e Commercio. Fu nominato Senatore il 13 Giugno 1939, fu membro della commissione finanze (1940-1943) e membro supplente della Commissione d'appello dell'Alta Corte di Giustizia (1940-1943). Fu deferito il 7 Agosto 1944 alla Alta Corte

[31] Per maggiori particolari si rimanda alla voce Medolaghi, curata da Ana Millàn Gasca per il *Dizionario Biografico degli Italiani*.

di Giustizia per le Sanzioni contro il Fascismo per il gruppo di imputazione 6°, *Senatori ritenuti responsabili di aver mantenuto il fascismo e resa possibile la guerra sia coi loro voti, sia con azioni individuali, tra cui la propaganda esercitata fuori e dentro il Senato.* Venne collocato a riposo per raggiunti limiti d'età il primo novembre 1944 ma nel 1947 venne riassunto in servizio in qualità di Fuori Ruolo. Morì a Roma il 7 Agosto 1950.

Nessuno dei docenti dei suoi anni universitari (Cremona, Castelnuovo, Fano, Beltrami e Alberto Tonelli) si era occupato direttamente delle applicazioni della teoria dei gruppi di trasformazioni infiniti alle equazioni differenziali alle derivate parziali, anche se Cremona, che aveva grandissima stima del matematico norvegese, dedicava parte dei suoi corsi universitari alle applicazione delle teorie di Lie alla geometria. È quindi probabile che dietro il suggerimento di Cremona, l'interesse di Medolaghi per questi problemi e le conoscenze preliminari necessarie per affrontarli gli derivassero dalla lettura dei 3 volumi sui gruppi di trasformazioni che Lie aveva appena terminato di scrivere in collaborazione con Engel. Essi furono concepiti come un'esposizione sistematica dei fondamenti e delle applicazioni dei gruppi di trasformazioni allo studio delle equazioni differenziali e furono preparati con lo scopo di divulgare il suo punto di vista e di fornire tutti gli strumenti necessari a chiunque volesse contribuire al suo vasto programma di ricerca. Il libro fu accolto con grande interesse dai matematici italiani anche perché alcuni nomi di grande prestigio, quali Segre e Beltrami, oltre al già citato Cremona, non nascondevano un incondizionato apprezzamento dei lavori di Lie. La storia dell'influenza del pensiero di Lie sullo sviluppo della matematica italiana non è ben conosciuta e nel prossimo paragrafo accenneremo brevemente ad alcuni aspetti di questa vicenda di grande interesse.

7 La diffusione delle idee di Lie in Italia

Le idee di Lie trovarono in Italia terreno fertile perché erano fondate sullo stesso punto di vista geometrico sintetico da cui si sviluppò l'originale approccio italiano alla geometria algebrica. Trovarono inoltre in Luigi Cremona e in Corrado Segre due ambasciatori autorevoli e di grande prestigio.

Luigi Cremona fu senza dubbio uno dei matematici italiani più rappresentativi nel periodo immediatamente successivo l'Unità d'Italia e uno di quelli che maggiormente si adoperò per portare l'Italia tra le primissime nazioni nel campo della ricerca matematica. A lui si devono contributi scientifici di prim'ordine, tra cui lo studio delle corrispondenze algebriche birazionali o cremoniane, che pose le basi della Geometria algebrica moderna, "chiudendo un'epoca per aprirne un'altra"[32]. Ancora più grande, se possibile, fu il suo contributo organizzativo, con la fondazione, tra l'altro, della reale scuola per ingegneri di Roma e l'impegno politico come Senatore, dal 1879.

Il ruolo svolto da Cremona per la diffusione delle idee di Lie in Italia fu quello di ambasciatore appassionato. Nell'inverno 1871-72, Lie si era impegnato a concorrere per una cattedra a Lund, in Svezia, e Cremona scrisse una lettera in suo sostegno in cui si legge

> *[le idee di Lie] sono delle autentiche scoperte, mascherate, per così dire, sotto una forma troppo modesta e concisa. [Nei suoi lavori emerge] un pensiero originale ed acuto, che accompagna la soluzione di problemi difficili e di ampio respiro [...] rinuncerei volentieri a tutti i miei lavori se soltanto fossi stato così fortunato da scoprire quello che Lie ha scoperto, e in numerose occasioni ho detto ai miei amici che la patria di Abel ha già un altro giovane talento, al quale il futuro della geometria dovrà molto.[...] Si dedicasse Lie alla eminente chiarezza di Abel, come io credo abbia ereditato il suo genio, la sua fama e la circolazione dei suoi lavori non avrà limite.*
>
> Lettera di Cremona a sostegno di Lie
> pubblicata sul quotidiano di Bergen

Cremona si riferisce alle importanti scoperte relative alle connessioni tra i *complessi di rette* e i *complessi di sfere*[33], in cui erano già presenti in germe le idee principali che verranno sviluppate successivamente dal grande

[32] Il giudizio è di Guido Castelnuovo.
[33] Cfr. nota 9, p. 4.

matematico norvegese, tra cui la teoria geometrica dei sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali e l'idea di equivalenza tra geometrie diverse, da cui trasse origine la teoria dei gruppi di trasformazioni. Cremona non diede contributi originali alla teoria di Lie ma sollecitò altri matematici, tra cui Pittarelli e come abbiamo già detto Medolaghi, a farlo.

L'influenza più nota delle idee di Lie sullo sviluppo della matematica italiana riguarda la geometria algebrica e passa attraverso l'azione scientifica, didattica e di propaganda di Corrado Segre, un altro dei padri fondatori della scuola italiana di geometria algebrica.

L'incontro di Corrado Segre con le idee di Lie avvenne con la lettura dell'opera di Klein, che aveva contribuito in maniera essenziale a delineare il quadro concettuale da cui trasse origine la teoria dei gruppi di trasformazioni e delle sue applicazioni geometriche[34].

> *Je n'oubliereai jamais l'effet qu'ont produit sur moi la premiére fois que je les ai lus, vos travaux des premiéres tomes des Math. Ann. et le programme de 1872*
>
> Da una lettera di C. Segre a Klein

Il lavoro di Segre *Considerazione intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette* è probabilmente *il primo studio di geometria nello spirito del programma di Erlangen.*[35]

Nel 1888, subito dopo la pubblicazione del primo volume della *Theorie der Transformationsgruppen*, Segre propose a Klein la traduzione in italiano del programma di Erlangen. Uno degli effetti fu quello di suscitare grande interesse per il libro di Lie, che venne studiato da molti matematici, tra cui Medolaghi e Levi-Civita che furono messi in grado di dare contributi originali al programma di Lie. Segre incaricò il suo brillante studente Gino Fano della traduzione del programma di Erlangen. Anche Fano fu profondamente impressionato dalle idee di Lie e, come vedremo presto, contribuì a svilupparne le idee sul fronte della geometria algebrica.

[34] Cfr. Hawkins, *Lie group and geometry: the italian connection*, rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Serie II, n. 36, 1994, pp. 185-206.
[35] Cfr. Hawkins, lavori citati.

Quasi contemporaneamente Federigo Enriques, uno dei più grandi matematici del nostro paese, fondatore insieme a Guido Castelnuovo della teoria delle superficie algebriche, dopo aver trascorso alcuni mesi a Torino nel 1891 a perfezionarsi con Segre, pubblicò nel 1893 un lavoro sulla classificazione delle superficie di $\mathbb{P}^3$ con un gruppo continuo di proiettività[36], ispirato ad uno dei problemi sollevati nel programma di Erlangen[37].

Le indagini di Enriques furono riprese da Fano che visitò Klein a Göttingen tra il 1893 e il 1894 e nel 1896 pubblicò due lavori importanti sulla classificazione delle ipersuperficie di $\mathbb{P}^4$ con un gruppo continuo di proiettività[38].

A differenza di Enriques, Fano seguì un approccio vicino alo spirito della nascente teoria delle rappresentazioni delle algebre di Lie. Nei suoi lavori si trova pubblicata, per la prima volta, una dimostrazione sostanzialmente corretta del teorema di Study sulla completa riducibilità delle rappresentazioni di $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Fano e Enriques svolsero in collaborazione anche ricerche molto originali e importanti sull'applicazione delle idee di Lie alla classificazione dei gruppi di Cremona [39]. L'importanza e l'originalità di questo filone di ricerca è messa bene in luce dalle parole di Ugo Amaldi, pronunciate in occasione di una conferenza per la Società Italiana per il Progresso delle Scienze del 1907, che abbiamo già citato e che citeremo più volte nel seguito.

I lavori di Enriques e Fano, su gruppi continui da una parte
e sulle superficie che ammettono un gruppo siffatto dall'altra,

[36] Enriques, F. , Le superficie con infinite trasformazioni proiettive in sé stesse, *Atti R. Ist. Veneto*, Ser. VII, 51 (1893), 1590-1635.

[37] Lie aveva già risolto questo problema in una memoria non nota ad Enriques, impiegando metodi simili.

[38] G. Fano, Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè, *Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sc. fis., mat., nat.*, Ser. II, **46** (1896), 187-218. G. Fano, Sulle varietà algebriche nello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè. *Atti R. Ist. Veneto*, Ser. VII **54** (1896), 1069-1103.

[39] Enriques F., Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniani nel piano, Rend Acc. Linc. (1893); Enriques F., Fano G., Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane dello spazio, *Annali di Mat.* (2) 26, 59-98 (1897).

> *costituiscono indubbiamente uno dei più bei capitoli della teoria dei gruppi continui, non soltanto per l'importanza e la singolare difficoltà dei problemi risoluti, ma anche per la profondità di vedute e la ricchezza e genialità di spedienti che vi furono profuse. Talchè si può dire ormai che siano poste, almeno implicitamente, le prime basi di quella geometria algebrica dei gruppi continui finiti, che l'opera del Lie aveva lasciato completamente in ombra.*
>
> Amaldi, conferenza SIPS 1907

A testimonianza della risonanza internazionale dei lavori di Enriques e di Fano, Klein decise di affidare a Fano l'articolo sulle applicazioni dei gruppi continui alla geometria per l'Enzyklopädie der mathematische Wissenschaften[40]. L'articolo di Fano suggerì a Cartan alcune interpretazioni geometriche della teoria della rappresentazioni che risultarono cruciali per la classificazione delle rappresentazioni delle algebre di Lie semisemplici[41].

Un altro versante importante in cui le idee di Lie ebbero grande influenza sui matematici italiani fu quello della geometria differenziale, in particolare in connessione col vivace dibattito che in Italia avveniva sui fondamenti della geometria, a cui aveva già dato contributi importanti Eugenio Beltrami.

> *Va rilevata in modo speciale l'applicazione [delle idee di Lie] ai* fondamenti *[della Geometria]. Poiché nella geometria si può riguardare come dato a priori un gruppo continuo di trasformazioni, quello dei movimenti dello spazio, si può cercare quali postulati si possano ammettere per questo gruppo, tali che*

[40] Fano scrisse due articoli per l'Enzyklopädie: Kontinuerliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Eintelungsprinzip,Enzyklop. d. math. Wissensch. III, 4^{b} (1907), pp. 289-388 e Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwickelung im XIX jahrhundert, Enzyklop. d. math. Wissensch. III, 4^{a} (1907), pp. 221-288.

[41] Cfr. Hawkins, loc. cit.

> *se ne deducano quelle proprietà che corrispondono all'ordinaria intuizione dello spazio. È questo il problema che, avviato da Riemann e più ancora da Helmoltz, fu poi trattato in modo più corretto e completo da Lie; sì da caratterizzare pienamente l'ordinaria geometria euclidea, non che le geometrie non euclidee.*
>
> Dalla commemorazione di Lie,
> letta da C. Segre per l'Accademia delle Scienze di Torino

A questo indirizzo di ricerche contribuì Luigi Bianchi, cui si deve la classificazione delle algebre di Lie tridimensionali reali, che svolse un ruolo significativo anche nello sviluppo della teoria della relatività di Einstein.

Bianchi studiò alla scuola Normale Superiore di Pisa con Betti e Dini, laureandosi nel 1877. Trascorse poi un periodo di perfezionamento con Klein in Germania, dove fece il suo incontro con l'opera di Lie. Bianchi si occupò inizialmente di argomenti di geometria differenziale, tra cui le superficie di area minima e quelle a curvatura costante. L'apprezzamento di Lie per i lavori di Bianchi traspare dal seguente brano di una lettera a Klein

> *Dei geometri recenti conosco, a parte te e Darboux, solo pochi di valore. Per esempio conosco solo singoli lavori di Clebsch, Zeuthen e Cremona; lo stesso per Beltrani, Reye e quasi nulla di Dini, [...] Enneper non è male e non lo sono Hoppe, Bäcklund e Bianchi [...]. L'ultimo lavoro di Bianchi è molto buono.*
>
> Lettera di Lie a Klein, Gennaio 1884

Accanto ad un'imponente attività scientifica, Bianchi svolse una preziosa opera di divulgazione, pubblicando numerosi manuali che raccolgono le lezioni da lui impartite presso la *Scuola Normale Superiore* (geometria differenziale, teoria di Galois, gruppi di trasformazioni, ecc.).

Enriques, Fano e Bianchi, si erano occupati nei loro lavori esclusivamente di gruppi continui *finiti*. La teoria dei gruppi di Lie infiniti e delle corrispondenti algebre è, come abbiamo già detto, molto più complicata e dopo la morte di Lie, lo studio dei gruppi di Lie infiniti non ebbe la fortuna che incontrò la teoria dei gruppi di Lie finiti, tanto che nel 1907 Amaldi affermava

> *Accadde così che, in questo decennio, ben pochi si avventurassero nel campo non ancora dissodato dei gruppi infiniti; mentre alla teoria dei gruppi continui finiti, che in sé raccoglieva il fascino di una concezione eminentemente geniale e le attrattive di un assetto ormai determinato e completo, si volse una vera folla di cultori. Ma, quasi per compenso, mentre questa coorte di ricercatori lasciati quasi del tutto da parte i problemi più larghi ed elevati si adoprarono sovrattutto ad illustrare la teoria dei gruppi continui finiti nelle sue molteplici applicazioni geometriche ed analitiche, i pochi cultori della teoria dei gruppi continui infiniti, affrontarono, con varietà di spedienti e con elevatezza di vedute, le questioni più comprensive e salienti; talchè oggi è in questo campo che noi possiamo notare i progressi più significativi della teoria dei gruppi continui.*
>
> Dall'intervento di Amaldi alla SIPS (1907)

8 Ugo Amaldi

Per capire la genesi dell'opera di Ugo Amaldi è necessario esaminare gli intrecci tra le idee di Lie e gli interessi di ricerca dei tre matematici con i quali Amaldi ebbe approfonditi contatti durante gli anni dei suoi studi universitari a Bologna, ovvero Pincherle, Enriques e Levi-Civita.

Nei primi lavori di Levi-Civita sono costanti i riferimenti all'opera di Lie e ai suoi metodi, con i quali era venuto probabilmente in contatto attraverso lo studio del libro di Lie sui gruppi di trasformazioni, che abbiamo già citato più volte. In uno di questi lavori[42], Levi-Civita utilizza la teoria degli invarianti differenziali di un gruppo di trasformazioni per studiare gli

[42] Levi-Civita T., Sugli invarianti assoluti, *Atti Ist. Veneto di Sc. Lett. e arti*, s. VII, t. V (1893-94)

invarianti assoluti di un sistema di funzioni, collegando per primo l'approccio geometrico differenziale di Ricci alle teorie e ai metodi di Lie, di cui *fin d'allora palesa un pieno e sicuro possesso*[43].

Nell'introduzione al lavoro successivo[44], si rileva un cambiamento di prospettiva. È ora dominante l'interesse per la struttura generale dei gruppi di trasformazioni.

> *Fu, per quanto io so, il prof. Pincherle, che per primo si propose, sotto acconce restrizioni, lo studio sistematico delle operazioni funzionali [...]. Il chiar.mo autore volle comunicarmi il suo programma si lavoro, il quale, se io bene mi appongo, è destinato a dare per le operazioni funzionali ciò che da la teoria generale delle funzioni per le trasformazioni puntuali. [...] io mi propongo di studiare alcune operazioni funzionali dal punto di vista gruppale e precisamente di assegnare* tutti i gruppi continui *di operazioni che appartengono a certe categorie. Per questa determinazione mi valgo di qualche risultato della teoria delle trasformazioni puntuali dovuto al signor Lie.*

Levi-Civita trascorse alcuni mesi a Bologna nel 1895 per studiare con Pincherle e portare avanti questo suo programma di ricerca. Durante quei mesi ebbe occasione di stringere rapporti scientifici e personali anche con Enriques, che era professore incaricato di geometria presso l'ateneo felsineo. Come emerge dalla corrispondenza tra Enriques e Levi-Civita, dalle conferenze di geometria di Enriques e dai lavori di Levi-Civita che abbiamo citato, le teorie di Lie erano tenute in grande stima da Levi-Civita, Enriques e Pincherle, che ne studiavano approfonditamente i contenuti per rielaborarle nell'ambito dei propri progetti di ricerca. Riteniamo che dall'interazione di questi tre matematici prenda forma consapevole un disegno ambizioso: *cercare nell'analisi funzionale di Pincherle i fondamenti e gli strumenti adeguati per sviluppare la teoria dei gruppi di Lie infiniti.* In questo disegno si inserisce la figura di Amaldi.

[43] Cfr. Amaldi, Introduzione alle Opere di Levi Civita, pubblicate dall'U.M.I.

[44] Levi-Civita T., Sui gruppi di operazioni funzionali, *Rend. Ist. Lombardo di SC. lett. e arti*, S. II, vol. 28 (1895)

Dopo aver collaborato con Enriques alla redazione delle *lezioni di geometria proiettiva* e successivamente alla preparazione delle *questioni di geometria*, Amaldi decise di svolgere la sua tesi con Pincherle, studiando le applicazioni della trasformazione di Laplace allo studio di una classe particolare di equazioni differenziali lineari. Si occupò successivamente, crediamo sotto l'influenza congiunta di Enriques, Pincherle e Levi-Civita, di cui divenne grande amico, dell' applicazione dell'analisi funzionale allo studio dei gruppi continui infiniti.

Purtroppo le speranze di trovare nell'analisi funzionale del Pincherle le basi su cui fondare le intuizioni del Lie sui gruppi continui infiniti andò in gran parte delusa, come si evince dal brano seguente, tratto dalla voce GRUPPO che Amaldi scrisse per l'Enciclopedia Italiana:

> *Le trasformazioni infinitesime di un gruppo infinito dipendono da funzioni arbitrarie o, se si vuole, costituiscono un insieme lineare* a infinite dimensioni*, onde vien meno il sussidio di quelle interpretazioni e di quei procedimenti iperspaziali, che rendono così feconda la considerazione delle trasformazioni infinitesime nel caso dei gruppi finiti; nè, per ora, hanno trovato in questo campo effettiva applicazione i risultati e i metodi, ancora alquanto scarsi, che sino ad oggi si possiedono sulle funzioni di infinite variabili e sugli spazi a infinite dimensioni.*

Nonostante ciò i risultati ottenuti in questo campo da Amaldi furono tutt'altro che trascurabili. A lui si deve, come abbiamo detto, la classificazione completa dei gruppi di trasformazioni in tre variabili, sia puntuali che di contatto. Purtroppo i lavori di Amaldi non ebbero la risonanza che meritavano, così che ancora oggi un esperto del campo come Olver può affermare che[45]

> *per quello che so, nonostante l'importanza evidente di questo problema, e nonostante voci mai confermate che sporadicamente appaiono nella letteratura, la classificazione completa in*

[45] Cfr. Olver P., Equivalence, Invariants and Symmetry (London Mathematical Society Lecture Notes), Cambridge University Press, (1995).

> *tre dimensioni [anche solo dei gruppi continui infiniti puntuali] non fu mai pubblicata da Lie ed è a tutt'oggi sconosciuta.*

Parte della responsabilità dell'oblio dei lavori di Amaldi è dovuta ad Amaldi stesso che, conscio della perdita di centralità degli studi sui gruppi continui infiniti di trasformazioni e della necessità di una rifondazione della teoria su basi più solide e quasi emarginato dalla comunità matematica a causa della discutibile decisione di accettare il trasferimento a Roma alla scuola di architettura[46], considerava con eccessiva modestia il frutto del suo lavoro. Simbolico a riguardo è il seguente brano della lettera con cui Amaldi ringrazia l'amico Levi-Civita per le sue considerazioni sulla memoria del 1917, in cui completa la soluzione del problema di classificazione[47] di cui abbiamo già più volte detto.

> *solo oggi ricevo la tua cartolina del 26 u.s. e di gran cuore mi affretto a ringraziarti delle gentili parole a proposito di quella mia mastodontica memoria. Per esperienza so benissimo di dover fare nei tuoi giudizi sulle cose mie, la debita parte alla grande tua benevolenza a mio riguardo: ma, pur così (attenuate) da mia parte, le tue buone parole mi sono riuscite molto gradite, perché, ora che mi vedo innanzi quel volume piramidale, mi sento turbato dalla responsabilità assunta, sopra tutto di fronte alla Società dei XL, pubblicando un lavoro, nel quale debbo riconoscere una sproporzione tra la mole e l'interesse. Dopo il mezzo impegno preso in una memoria precedente, era per me una specie di punto d'onore il venir a capo di quella classificazione: e ad ogni modo, con questa ho definitivamente finito le mie ricerche di determinazione di gruppi continui, sulle quali già troppo ho insistito.*

[46] Un riflesso delle conseguenze devastanti per la ricerca scientifica di Amaldi si può evincere da un brano di una lettera di Luigi Bianchi (1856-1928) del 7.XI.1927. "Le auguro con tutto il cuore che ora, o forse in seguito, trovino modo di [restituire] anche lei nell'insegnamento universitario. Fu un grave errore, [caro Amaldi], quello di lasciarlo". Amaldi tornò all'Università soltanto nel 1942.

[47] U. Amaldi, Sulla classificazione dei gruppi continui di trasformazioni di contatto dello spazio, *Memorie Soc. It. dei XL*, (3), XX (1918).

Dalla lettera a Levi-Civita del 2.VI.1918

A nostro avviso una valutazione più obiettiva dei risultati ottenuti dal matematico veronese è contenuta nella lettera che Medolaghi scrisse ad Amaldi[48] per la stessa occasione

Ch.mo Professore

Ho ricevuto la sua memoria sulla determinazione di tutti i tipi di gruppi finiti e infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio, ed il mio pensiero è tornato ai tempi ormai lontani in cui il fascino delle ricerche sulla teoria dei gruppi mi aveva tutto conquistato. Allora una opera così considerevole come quella che Ella ha compiuto mi sarebbe parso un sogno lontano! Sebbene passato alla riserva, sono al caso di intendere la serie di sottili accorgimenti, di trovate geniali e di coscienziose ricerche che è rappresentata dal suo lavoro, il quale resta come monumento e documento considerevole della sua attività scientifica.

Ho appena avuto il tempo di leggere alcune parti, avendo ricevuto il plico ieri mattina, e già ho trovato dei capitoli che mi hanno altamente interessato, e che mi hanno fatto dimenticare il mio abituale lavoro: il quale - a parte le finalità pratiche - offre pure occasione a studi e ricerche, ma ahimè! quanto difficili e complesse. Dal calcolo delle probabilità e dalla statistica sono dovuto passare all'economia ed alla sociologia, ed ora alla fisiologia, e naturalmente non sono soddisfatto di questo viaggio attraverso a campi così diversi, e della superficialità con la quale lo devo compiere. Ma poiché la speranza ci assiste sempre - spero di poter un giorno raccogliere e riordinare il poco già fatto, e completarlo con il più che resta da fare.

Intanto, tornando alla sua memoria, sono ben lieto che l'opera poderosa della determinazione di gruppi di trasf[ormazioni] di contatto sia stata compiuta da un italiano, e da Lei, che mi

[48] Cfr. Pietro Nastasi, Enrico Rogora, loc. cit.

> *onora della sua amicizia. Voglia gradire i miei rallegramenti e i miei auguri più affettuosi per la sua futura produzione scientifica, dalla quale mi attendo grandi cose.*

Purtroppo Amaldi concluse sostanzialmente la sua attività scientifica con la pubblicazione di questi risultati, dedicandosi poi, con grande abilità ed energia, all'attività di trattatista e di coordinatore della sezione matematica dell'Enciclopedia Italiana.

Nei suoi ultimi lavori Amaldi mostra una conoscenza, unica nel panorama italiano dell'epoca e non solo, delle tecniche di Cartan, in particolare quelle relative alla teorie dei gruppi continui infiniti. Amaldi ebbe grandissima stima dei lavori di Cartan, con il quale intrecciò una corrispondenza molto interessante, sia dal punto di vista scientifico che personale[49].

Cartan introdusse un punto di vista nuovo e molto potente nello studio dei gruppi di trasformazioni, che consiste sostanzialmente nel sostituire, come oggetto principale dello studio locale delle proprietà di tali gruppi, le forme differenziali ai campi di vettori tangenti.

> *Mentre il Medolaghi e il Vessiot, come già l'Engel, avevano riattaccato le loro deduzioni ai primi principi stabiliti dal Lie per la teoria dei gruppi infiniti, le ricerche del Cartan sulla struttura dei gruppi infiniti ne sono indipendenti. In particolare il Cartan esclude affatto la considerazione delle trasformazioni infinitesime del gruppo e si vale sistematicamente della sua teoria di integrazione dei sistemi di equazioni ai differenziali totali [...]*
>
> *I due indirizzi dianzi accennati e fra loro tanto divergenti, racchiudono per così dire un settore, in cui soprattutto imporrebbe spingere ora operosamente le indagini, fino a stabilire tra le due vie un sistema di relazioni e quasi di comunicazioni.*
>
> *Potrà di qui sorgere sui problemi fondamentali della teoria dei gruppi infiniti una concezione nuova, forse più sintetica, e meglio rispondente alla veduta generale del Lie, che in ogni problema tutto subordinava alla infaticata ricerca di quell'intima*

[49] Cfr. P. Nastasi, E. Rogora, Mon cher ami - illustre professore, loc. cit.

armonia fra metodi e resultati, che alle indagini matematiche infonde carattere e valore estetico.

Amaldi, relazione per la SIPS, p 328

I lavori di Cartan sui gruppi continui finiti sono uno dei germi da cui si svilupperà l'algebra astratta mentre i suoi lavori sui gruppi continui infiniti, la sua teoria generale dell'equivalenza dei sistemi differenziali e il suo approccio alla geometria riemanniana con il metodo del riferimento mobile sono il fondamento della teoria dei fibrati principali, che venne sviluppata quasi quarant'anni più tardi da Ehresmann. Altrettanto fondamentale fu il suo contributo all'affermarsi della topologia e della geometria differenziale moderna. Amaldi fu tra i pochi contemporanei di Cartan a cogliere il senso complessivo del suo lavoro e tra i pochissimi ad aver letto e meditato i suoi lavori sui gruppi continui infiniti, tanto da affermare che

Esiste veramente una Matematica del Cartan ed il mio vecchio costante sogno sarebbe di chiarirla e divulgarla, perché, almeno in Italia, tutti conoscono e ammirano i Suoi risultati, ma pochi o nessuno apprezzano e conoscono la potente originalità del Suo modo personale di porre e di risolvere le questioni.

Lettera a Cartan del 16.V.1929

Viste le sue grandi doti di trattatista e di collaboratore, dobbiamo rammaricarci che Amaldi non sia riuscito, se non parzialmente[50], a realizzare il sogno di contribuire alla divulgazione dell'opera di Cartan. La scarsa circolazione delle lezioni che Amaldi tenne presso l'INDAM nel 1942-43 non impedì ad alcuni matematici delle generazioni successive di riconoscerne il valore, come testimoniano le citazioni all'opera di Amaldi presenti nei lavori di Pommaret[51] e di Guillemin[52].

[50] Cfr. il ciclo di lezioni per l'INDAM, pubblicato con il titolo *Introduzione alla teoria dei gruppi di trasformazioni*, citato nella nota a p. 15.

[51] Pommaret, J. F. *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Gordon and Breach, New York, (1978).

[52] Guilleminn, V., Sternberg S., An algebraic model of transitive differential geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70, (1964), 16-47.

Cartan conservò per tutta la vita un affetto speciale per il matematico veronese, che per primo riconobbe la grandezza dei suoi contributi alla teoria dei gruppi continui infiniti.

> *Je n'ai jamais oublié le réconfort que m'a valu la première lettre que vous m'avez écrite: c'était si je ne me trompe en 1912; je partais en vacances et c'est dans le train que je l'ai lue: elle m'a révelé que mon travail n'était pas passé complétement inaperçue; s'il a eu plus tard des prolongements qui ont attiré l'attention des mathématiciens, vous êtes bien le premier à les avoir signalés à l'avance; comment ne vous en serais-je reconnaissant?* [53]
>
> Lettera da Cartan del 12.IV.1939

Le lettere di Cartan ad Amaldi contengono molte interessanti considerazioni sullo sviluppo della matematica in quegli anni, come questa *fotografia* dell'esperienza che porterà alla nascita del gruppo Bourbaki e del suo progetto di radicale rinnovamento della matematica.

> *Figurez-vous que cette année (1936-1937) les jeunes mathématiciens qui composent le séminaire Julia ont eu l'idée de faire porter leurs études sur les travaux de M. Elie Cartan! Chaque année dans une série d'une douzaine de conférences ils explorent un sujet assez vaste, mais néanmoins assez très délimitate; la première année avait été consacrée aux groupes finis et à l'algèbre moderne, la seconde aux espaces de Hilbert et la troisième à la topologie. Je vous avvise que j'ai été très*

[53] Traduzione: Mai ho dimenticato il conforto che mi ha procurato la prima lettera che mi avete scritto: l'anno era il 1912, se non mi sbaglio; stavo per partire per le vacanze e la lessi in treno: la sua lettera mi rivelava che il mio lavoro non era passato inosservato; se esso ha avuto dopo dei prosiegui che hanno attirato l'attenzione dei matematici, lei è stato il primo a segnalarlo in anticipo; e come potrei non esserle riconoscente? E quando Darmois mi ha chiesto di indicargli i nomi degli scienziati stranieri ai quali avrei desiderato che si segnalasse il progetto di giubile , il suo nome è il primo al quale ho pensato.

touché du choix qu'ils ont fait cette année: théorie des formes différentielles extérieures des systèmes en involution, problèmes d'equivalence, groupes finis et continus, groupes infinis, algèbres de Lie représentations linéaires des groupes finis et continus. Je me suis chargé de trois conférences, une sur les problèmes d'equivalence et deux sur les groupes infini. Cela m'a donné beaucoup de mal![54]

Lettera da Cartan del ...

Il clima effervescente della matematica francese è lo stesso che si respira in quegli anni negli Stati Uniti ed è ben diverso da quello stantio della matematica italiana, come si evince dalla seguente lettera di Fubini, emigrato negli Stati Uniti a seguito delle leggi razziali, a Picone[55].

Princeton N.J. Jan. 31, 1940

Caro Picone,

Grazie dei tantissimi lavori inviatimi. Io sto qui molto bene, ho un bel villino tra parchi e viali a prezzo modicissimo. L'Università è un parco cosparso di ville: la biblioteca .... qualche cosa di straordinario. Si trova ***tutto**, **tutto**, roba vecchia e nuova. Il congresso di N.Y. è tramontato (io credo). Altrimenti avrei scritto a te di astenerti dal venir qua, perché avreste probabilmente trovato un'accoglienza che vi avrebbe messo negli impicci. I miei figli lavorano e stanno bene. Eugenio (come primo stipendio) ha circa $ 3500 annue, circa 70 m.Lire al cambio*

[54] Traduzione: Si figuri che quest'anno (1936-1937) i giovani matematici che compongono il seminario Julia hanno avuto l'idea di rivolgere i loro studi ai lavori di Elie Cartan! Ogni anno, in una serie di una dozzina di conferenze, essi esplorano un tema assai vasto, ma sempre ben delimitato; il primo anno era stato consacrato ai gruppi finiti e all'algebra moderna, il secondo agli spazi di Hilbert e il terzo alla topologia. Sono stato molto toccato dalla scelta fatta quest'anno: teoria delle forme differenziali esterne dei sistemi in involuzione, problemi di equivalenza, gruppi finiti e continui. Mi sono incaricato di fare tre conferenze, una sui problemi di equivalenza e due sui gruppi infiniti. Ciò mi ha dato non pochi problemi!

[55] La lettera proviene dall'Archivio Storico dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, in Roma.

legale. È vero che paga £ 7 mila annue per una camera. Ma, come vedi, gliene rimangono abbastanza: il vitto costa qui all'incirca come in Italia (in carne un 10% in più). I fitti invece sono il triplo. Io ho lavorato: ho lavori in corso di stampa negli Annals ed altrove. I colleghi qui sono così buoni, così cari, così affettuosi. Sarebbe impossibile trovar di meglio (Alexander, Lefschetz, Veble, Weil, Einstein, Wedderburn, v. Neumann). Qui è un mondo nuovo: topologia (Alexander, Lefschetz con risultati di primissimo ordine), v. Neumann con le sue fondamentali scoperte sugli operatori lineari, Wedderburn in Algebra ecc. Mi sono accorto (troppo tardi alla mia età) di essere un ignorante. Ma meglio tardi che mai.

Cordiali saluti

Guido Fubini

Nel panorama della matematica italiana la figura di Amaldi ha delle caratteristiche peculiari. Il suo interesse per il lavoro di Lie e di Cartan dimostra un'apertura internazionale rara tra i matematici italiani dell'epoca, il cui disinteresse per la *nuova matematica*, cioè per l'algebra, la topologia e l'analisi funzionale astratta, portò al progressivo inaridimento della ricerca. Purtroppo il suo isolamento dal mondo universitario, in parte dovuto ad un carattere schivo e in parte alle conseguenze della scelta di insegnare alla scuola di architettura, ha privato la matematica italiana di un punto di riferimento prezioso nel momento in cui gli intrecci tra fisica teorica e matematica portavano prepotentemente alla ribalta nuovi punti di vista, fondati sulla teoria delle algebre di Lie e delle loro rappresentazioni. Le lezioni all'INDAM sulla teoria dei gruppi finiti ed infiniti di trasformazioni (impartite nel 1942 e nel 1943 rispettivamente) sono un tardivo riconoscimento dell'importanza che il suo insegnamento avrebbe potuto avere sulla nuova generazione dei fisici teorici italiani.

Ricordo che [con Edoardo] cercammo di studiare un po' la teoria dei gruppi per conto nostro, ma non era facile. Ricorremmo allora al padre di Edoardo perché la mia esperienza di *alunno mi aveva persuaso che, se c'era una speranza di imparare la teoria dei gruppi, era quella di farsela insegnare da lui. In risposta alle nostre richieste piuttosto utilitarie, da fisici, egli ci disse che veramente si sarebbero dovuti studiare anche i gruppi di Lie. Era profeta e si rallegrerebbe oggi a vedere i fisici curvi a studiarli.*

Lettera di Emilio Segré a Edoardo Amaldi

9 Appendice: L'equazione differenziale del gruppo delle proiettività della retta

Sia $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ la forma parametrica di una proiettività della retta. Vogliamo elminare i parametri con derivazioni successive. Derivando la prima volta, otteniamo

$$y' = \frac{a(cx+1) - c(ax+b)}{(cx+1)^2} = \frac{a}{cx+1} - \frac{c}{cx+1}y.$$

da cui,

$$y'(cx+1) = a - cy. \tag{8}$$

Fin qui siamo riusciti ad eliminare il parametro b. Derivando (8), si ottiene

$$y''(cx+1) = -2cy' \tag{9}$$

da cui

$$cx+1 = -2c\frac{y'}{y''} \tag{10}$$

Derivando (refder.2), che ora contiene solo il parametro c, ottenimo

$$y'''(cx+1) = -3cy'' \tag{11}$$

Sostituendo in (11) l'espressione per $cx+1$ ottenuta in (10) otteniamo

$$-2cy'''\frac{y'}{y''} = -3cy''$$

e quindi

$$y'''y' = \frac{3}{2}\left(y''\right)^2 \tag{12}$$

che è l'equazione differenziale delle proiettività.