Capitolo 4

Varietà algebriche

In questo capitolo tratteremo di alcune nozioni elementari di geometria algebrica che useremo principalmente nello studio delle realizzazioni proiettive delle superfici di Riemann compatte. Parleremo di varietà affini e proiettive considerando esclusivamente il caso complesso, anche se la maggior parte delle definizioni e degli enunciati valgono per campi algebricamente chiusi con caratteristica arbitraria.

1 Insiemi algebrici affini

Denotiamo con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine n–dimensionale definito su $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1 *Un insieme algebrico affine è l' insieme degli zeri in $\mathbb{A}^n$ dei polinomi appertenenti a un qualche sottoinsieme $S \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.*

Poniamo

$$\mathcal{V}(S) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0\,, \quad \forall\, f(x_1 \ldots x_n) \in S\}\ . \tag{1.1}$$

Proposizione 1.2

a) *L'unione di due insiemi algebrici affini è un insieme algebrico affine.*

b) *L' intersezione di una famiglia di insiemi algebrici affini è un insieme algebrico affine.*

c) *L' insieme vuoto e l'intero spazio $\mathbb{A}^n$ sono insiemi algebrici affini.*

Dim. Se $X = \mathcal{V}(S_1)$ e $Y = \mathcal{V}(S_2)$, allora che $X \cup Y = \mathcal{V}(S_1S_2)$, dove con S_1S_2 indichiamo l' insieme costituito dai prodotti di un elemento di S_1 e di un un elemento di S_2. Sia $X_i = \mathcal{V}(S_i)$ una famiglia di insiemi algebrici affini, allora

$$\bigcap X_i = \mathcal{V}(\bigcup S_i).$$

Ovviamente $\mathbb{A}^n = \mathcal{V}(0)$ e $\emptyset = \mathcal{V}(1)$ sono insiemi algebrici affini. Q.E.D.

Come immediata conseguenza si può definire su $\mathbb{A}^n$ una topologia che ha come aperti i complementari dei sottoinsiemi algebrici affini. Questa topologia si chiama la *topologia di Zariski* ed è ovviamente meno fine della topologia usuale. In particolare tutti gli insiemi aperti non vuoti della topologia di Zariski sono densi.

Chiariamo ora il legame tra gli insiemi algebrici affini e le equazioni che li definiscono. Osserviamo subito che se I è l'ideale di $\mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$ generato da S allora

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(S) \ . \tag{1.2}$$

Dunque ogni insieme algebrico è definito da un qualche ideale $I \subseteq \mathbb{C}[x_1 \dots x_n]$. (Come semplice conseguenza, osserviamo che la topologia di Zariski della retta affine $\mathbb{A}^1$ coincide con la topologia cofinita. Infatti ogni ideale in $\mathbb{C}[x]$ è principale, quindi un sottoinsieme è un insieme algebrico affine se e solo se è l' insieme degli zeri di un polinomio.)

La corrispondenza tra insiemi algebrici affini e ideali non è biunivoca. Per esempio, gli ideali generati dal polinomio x e dal polinomio x^2 in $\mathbb{C}[x]$ sono distinti, ma hanno lo stesso insieme di zeri in $\mathbb{A}^1$.

Ad ogni sottoinsieme X di $\mathbb{A}^n$ possiamo assegnare un ideale

$$\mathcal{I}(X) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0\,, \quad \forall\, p \in X\} \tag{1.3}$$

Dalle definizione segue che

$$X \subseteq \mathcal{V}\mathcal{I}(X)\,, \qquad \forall\, X \subseteq \mathbb{A}^n \tag{1.4}$$

$$S \subseteq \mathcal{I}\mathcal{V}(S)\,, \qquad \forall\, S \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \ .$$

Anche la seguente Proposizione segue dalle definizioni.

Proposizione 1.3

a) *se* $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$*, allora* $\mathcal{V}(S_1) \supseteq \mathcal{V}(S_2)$

b) *se* $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$*, allora* $\mathcal{I}(Y_1) \supseteq \mathcal{I}(Y_2)$

c) *Se* Y_1*,* $Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$*, allora* $\mathcal{I}(Y_1 \cup Y_2) = \mathcal{I}(Y_1) \cap \mathcal{I}(Y_2)$.

Vogliamo dimostrare che c' è una famiglia di ideali che si può porre in corrispondenza biunivoca con la famiglia degli insiemi algebrici affini. Come primo passo dimostreremo che ogni insieme algebrico affine è definito da un numero finito di polinomi.

Teorema della Base di Hilbert 1.4 *Ogni ideale $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ è finitamente generato.*

Dim. Ricordiamo che un anello si dice noëtheriano se ogni ideale è finitamente generato, in particolare i campi sono anelli noëtheriani. Perciò il Teorema della base di Hilbert è una immediata conseguenza della seguente Proposizione.

Proposizione 1.5 *Sia R un anello noëtheriano, allora $R[X]$ è noëtheriano.*

Dim. Sia $F(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0 \in R[x]$, a_d è chiamato il coefficiente direttore del polinomio $F(x)$. Sia $I \subseteq R[x]$ un ideale e sia $J(I)$ l'insieme di tutti i coefficienti direttori di tutti i polinomi in I, ovviamente $J(I)$è un ideale in R. Poichè R è noëtheriano, esistono dei polinomi $F_1(x), \ldots F_k(x) \in I$ i cui coefficienti direttori generano $J(I) = J$. Sia

$$N = \max_{i=1\ldots k} \{\deg\, F_i(x)\}\ .$$

Per ogni $m \leq N$ sia $J_m \subseteq J$ l' ideale generato dai coefficienti direttori dei polinomi in I di grado $\leq m$. Siano $F_{m_1}(x) \ldots F_{m_{k_m}(x)}$ dei generatori di J_m. Sia $I' \subseteq I$ l'ideale generato dagli $F_i(x)$ e dagli $F_{m_j}(x)$, dove $i = 1, \ldots, k$ $m = 1, \ldots, N$, e $j = 1, \ldots, k_m$. Vogliamo dimostrare che $I' = I$. Assumiamo $I' \neq I$. Sia $G(x)$ un polinomio di grado minimo tale che $G(x) \in I$, ma $G(x) \notin I'$. Se deg $(G(x)) > N$ allora possiamo trovare dei polinomi $Q_i(x)$ tali che il polinomio

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{k} Q_i(x) F_i(x) \in I' \tag{1.5}$$

abbia lo stesso grado e lo stesso coefficiente direttore di $G(x)$. Ora,

$$\deg(G(x) - Q(x)) < \deg G(x)$$

e dunque $G(x) - Q(x)$ appartiene all' ideale I'. Ma allora anche $G(x) \in I'$ e questa è una contraddizione. Se deg $(G(x)) = m \leq N$, il coefficiente direttore di $G(x)$ appartiene all' ideale J_m. Quindi procedendo in modo del tutto simile a quello del caso precedente, possiamo di nuovo abbassare il grado del polinomio $G(x)$ e raggiungere una contraddizione. Q.E.D.

D'ora in poi denoteremo con $(F_1, \ldots, F_k)$ l'ideale generato dai polinomi $F_1, \ldots, F_k$. Per la seconda inclusione, in (1.4), si ha

$$I \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))\,, \quad \forall\, I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\ .$$

Vogliamo definire una classe speciale di ideali per cui valga l' uguaglianza $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Definiamo il *radicale di un ideale* I ponendo

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid f^r \in I \quad \text{per qualche} \quad r \in \mathbb{N}\}. \tag{1.6}$$

Si verifica immediatamente che $\sqrt{I}$ è un ideale di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ contenente I e che $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$. Da ciò segue che $\sqrt{I} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$. Il teorema fondamentale è il seguente.

Teorema degli Zeri di Hilbert 1.6 *Sia I un ideale in $\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$ allora $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.*

La dimostrazione del teorema degli zeri di Hilbert si riduce a quella del seguente teorema

Teorema debole degli Zeri di Hilbert 1.7 *Se I è un ideale proprio in $\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]$ allora $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.*

Dim(del teorema degli zeri di Hilbert). Sia $I = (F_1, \dots, F_k)$, dobbiamo dimostrare che $\sqrt{I} \supseteq I(\mathcal{V}(I))$. Sia $G \in \mathcal{I}(\mathcal{V}((F_1, \dots, F_k)))$, poniamo

$$J = (F_1, \dots, F_k,\, x_{n+1}G - 1)\,.$$

Allora $\mathcal{V}(J) = \emptyset$ e quindi, per il teorema debole degli zeri, $J = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Dunque esistono $Q_1, \dots Q_r, R \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_{i=1}^{r} Q_i(x_1, \dots, x_{n+1})F_i(x_1, \dots, x_n) + R(x_1, \dots, x_{n+1})(x_{n+1}G(x_1, \dots, x_n) - 1)\,.$$

Posto

$$x_{n+1} = \frac{1}{G(x_1, \dots, x_n)}$$

e moltiplicando i due membri della precedente eguaglianza per una opportuna potenza di $G(x_1, \dots, x_n)$, si ottiene

$$G^N(x_1, \dots, x_n) = \sum C_i(x_1 \dots, x_n)F_i(x_1 \dots, x_n)\ .$$

Q.E.D.

Definizione 1.8 *Un ideale in $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ si dice radicale se $\sqrt{I} = I$.*

Come immediata conseguenza del Teorema degli zeri di Hilbert otteniamo una corrispondenza biunivoca

$$\{\text{Sottoinsiemi algebrici affini di } \mathbb{A}^n\} \leftrightarrow \{\text{Ideali radicali di } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]\}$$

$$V \mapsto \mathcal{I}(V)$$

$$\mathcal{V}(I) \hookleftarrow I$$

Ciò che resta di questa sezione sarà dedicato alla dimostrazione del Teorema debole degli zeri.

Chiaramente si può assumere che I sia un ideale massimale. Quindi $L = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ è un campo e $\mathbb{C}$ può essere considerato come un sottocampo di L. Supponiamo di sapere che $L = \mathbb{C}$. Allora se $a_i \in \mathbb{C}$ è il residuo di x_i mod I, si ha $x_i - a_i \in I$. Ma l'ideale $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ è massimale.

Dunque coincide con I ed il punto $P = (a_1, \ldots, a_n)$ appartiene a $\mathcal{V}(I)$. Ci siamo quindi ridotti a dover dimostrare il seguente fatto: se esiste un omomorfismo suriettivo di anelli $\varphi : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to L$ che è l'identità su $\mathbb{C}$, allora $L = \mathbb{C}$. Ponendo $\alpha_i = \varphi(x_i)$, e ricordando che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, il risultato di cui abbiamo bisogno è il seguente.

Lemma 1.9 *Sia K un campo. Sia L una estensione di K. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elementi in L tali che $L = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Allora L è una estensione algebrica di K.*

Prima di iniziare la dimostrazione di questo risultato è opportuno ricordare la nozione di *integralità* . Sia B un sottoanello di un dominio (i.e. un anello d' integrità) A. Diremo che un elemento $\alpha \in A$ è integrale su B se esiste un polinomio *monico*

$$F(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in B[x] \tag{1.7}$$

tale che $F(\alpha) = 0$. Se B e A sono campi diremo che α è algebrico su B. Utilizzeremo in modo essenziale il seguente risultato.

Proposizione 1.10 *Gli elementi di A che sono integrali su B formano un sottoanello di A.*

Questa Proposizione seguirà facilmente dal seguente Lemma.

Lemma 1.11 *Sia B un sottoanello di un dominio A e sia $\alpha \in A$, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *α è integrale su B.*
2. *$B[\alpha]$ è un modulo finito su A.*
3. *Esiste un sottoanello C di A contenente $B[\alpha]$ che è un modulo di tipo finito (i.e. finitamente generato) su B.*

Dim.

1. implica 2.

Se $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$, allora $\alpha^m \in \sum_{i=0}^{n-1} B\alpha^i$, $\quad \forall\, m \geq n$.

2.implica 3.

Basta prendere $C = B[\alpha]$.

3. implica 1.

Assumiamo che $B[\alpha] \subseteq C$, dove $C = B[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Consideriamo la moltiplicazione per α in C. Sia

$$\alpha \cdot \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j\,, \qquad a_{ij} \in B\,, \qquad i = 1 \ldots n\,. \tag{1.8}$$

Si ha
$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\alpha - a_{ij})\alpha_j = 0\,, \qquad i = 1\ldots n\ . \tag{1.9}$$
Quindi
$$0 = \det(\delta_{ij}\alpha - a_{ij}) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^n + \ldots + a_0\ . \tag{1.10}$$
Q.E.D.

Dim.(della Proposizione 1.10). Siano α e β integrali su B . Allora sia $B[\alpha+\beta]$ che $B[\alpha\beta]$ sono sottoanelli di $C = B[\alpha,\beta]$ che è di tipo finito su B (essendo di tipo finito su $B[\alpha]$ che, a sua volta, è di tipo finito su B). Dal punto 3. della Lemma segue che $\alpha+\beta$ e $\alpha\beta$ sono integrali su B. Q.E.D.

Si dice che A è *integrale* su B se ogni elemento di A è integrale su B. Se B e A sono campi si dice che B è una *estensione algebrica* di A. Ricordiamo anche che un campo K si dice *algebricamente chiuso* se K contiene tutti gli elementi che sono algebrici su K e ricordiamo infine che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del Lemma 1.8.

Dim(del Lemma 1.8). Procediamo per induzione sul numero dei generatori $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ di L su K . Nel caso $n=1$, abbiamo che, se α_1 non è algebrico su K, allora $K[\alpha_1]$ è un anello di polinomi. Un tale anello non può essere un campo, poiché gli elementi di grado positivo non sono invertibili. Supponiamo il lemma dimostrato nel caso in cui L sia generato su K da $n-1$ generatori. Poniamo $L = K[\alpha_1,\ldots,\alpha_n] \supseteq K(\alpha_1) = K_1$. Per l' ipotesi induttiva, L è algebrico su K_1. Se α_1 è algebrico su K il lemma è dimostrato. Assumiamo che α_1 non sia algebrico su K. In ogni caso ogni α_i è algebrico su K_1 e quindi soddisfa un'equazione
$$\alpha_i^{n_i} + b^{(i)}_{n_i-1}\alpha_i^{n_i-1} + \ldots + b^{(i)}_0 = 0\,, \qquad i = 2\ldots n\,, \tag{1.11}$$
dove
$$b^{(i)}_{n_j} = p^{(i)}_{n_j}(\alpha_1)/q^{(i)}_{n_j}(\alpha_1)\,, \quad p^{(i)}_{n_j}(\alpha_1)\,,\ q^{(i)}_{n_j}(\alpha_1) \in K[\alpha_1]\,.$$
Se $c \in K[\alpha_1]$ è il minimo comune multiplo di tutti i denominatori dei $b^{(i)}_{n_j}$ otteniamo
$$(c\alpha_i)^{n_i} + b^{(i)}_{n_i-1}(c\alpha_i)^{n_i-1} \ + \ldots + \ b^{(i)}_0 = 0 \tag{1.12}$$
con $b^{(i)}_{n_j} \in K[\alpha_1]$. Dunque $c\alpha_i$ è integrale su $K[\alpha_1]$. Osserviamo che allora *per ogni* elemento $\gamma \in L$, esiste un indice N tale che $c^N\gamma$ è integrale su $K[\alpha_1]$. Infatti scriviamo
$$\gamma = p_N(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) + \ldots + p_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$
dove p_i è omogeneo di grado i. Si ha
$$c^N\gamma = \sum_{i=0}^{N} c^{N-i}p_i(c\alpha_1,\ldots,c\alpha_n)$$

e dunque essendo $c\alpha_i$ integrale su $K[\alpha_1]$, anche $c^N\gamma$ è integrale su $K[\alpha_1]$ in virtù della Proposizione 1.10. Assumere che α_1 non è algebrico su K, porta ora a un assurdo. Infatti, in questa ipotesi, $K_1 = K(\alpha_1)$ è isomorfo al campo delle funzioni razionali in una variabile. Prendiamo un polinomio p in $K[\alpha_1]$ con $(p, c) = 1$. Consideriamo l' elemento $\gamma = 1/p \in L$. Abbiamo appena dimostrato che esiste un intero N per cui $c^N\gamma$ è integrale su $K[\alpha_1]$. Questo è assurdo perchè una relazione integrale per un tale elemento mostrerebbe che p divide c.

Q.E.D.

Esercizi

1. Verificare l'enunciato della proposizione 1.3.

2. Verificare che la topologia di Zariski di $\mathbb{A}^n$ non è la topologia prodotto

3. Uno spazio topologico si dice noetheriano se soddisfa la condizione della catena discendente per sottinsiemi chiusi: ogni successione

$$\ldots \subset Y_n \subset Y_{n-1} \subset \ldots, Y_1$$

è stazionaria, i.e. esiste un indice k tale che $Y_k = Y_{k+1} = \ldots$. Dimostrare che

i) $\mathbb{A}^n$, con la topologia di Zariski, è uno spazio noetheriano.

ii) se X è uno spazio noetheriano, ogni sottinsieme chiuso può essere espresso come unione finita di sottinsiemi chiusi irriducibili.

4. Dare un esempio di anello non noetheriano.
5. Verificare se l' ideale $I =< y - x^2, y >$è radicale.
6. Siano F e G polinomi in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Sia F irriducibile. Si dimostri che se G si annulla sugli zeri di F allora F divide G.

2 Varietà

Torniamo a fare alcune considerazioni sulla topologia di Zariski. Il teorema (1.7) dimostra che gli spazi $\mathbb{A}^n$ sono quasi-compatti inoltre gli insiemi chiusi di $\mathbb{A}^n$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali radicali di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Come conseguenza del Teorema di Hilbert (in forma debole) abbiamo anche una corrispondenza biunivoca tra i punti di $\mathbb{A}^n$ e gli ideali massimali.

In topologia spesso si studiano le proprietà della connessione degli spazi, ma ora intuitivamente sappiamo che l'unione di due "curve" che si intersecano è ancora un insieme connesso, invece saremmo interessati a considerare le singole componenti. Per fare ciò abbiamo bisogno di una proprietà più forte della connessione. Diremo che uno spazio topologico X è riducibile se $X = X_1 \cup X_2$, $X_i \neq \emptyset$ sottoinsiemi chiusi propri di X. Se X non è riducibile si dice irriducibile

Evidentemente ogni spazio irriducibile è connesso, ma non è vero l'inverso, come abbiamo fatto vedere nel caso di due curve che si intersecano. Chiaramente $\mathbb{A}^n$ con la topologia di Zariski è irriducibile. Osserviamo che se Y è un sottinsieme irriducibile di uno spazio topologico X, allora anche la sua chiusura è un sottinsieme irriducibile

Diremo che una varietà affine è un sottoinsieme chiuso irriducibile di $\mathbb{A}^n$ (con la topologia indotta). Un insieme aperto di una varietà affine si dice varietà quasi–affine, anch'essa è irriducibile.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà affine, una sottovarietà affine di$X$ è una varietà affine contenuta in X.

Diamo ora una caratterizzazione delle varietà affini in termini degli ideali di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Proposizione (2.1). *Un sottoinsieme chiuso X è una varietà affine $\Leftrightarrow \mathcal{I}(X)$ è un ideale primo.*

Dim. Poniamo $I = \mathcal{I}(X)$.

Supponiamo che X sia irriducibile e sia

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n) f_2(x_1, \ldots, x_n) \in I \ .$$

Allora per ogni $p \in X$ o $f_1(p) = 0$ oppure $f_2(p) = 0$, quindi $X \subseteq \mathcal{V}(f_1) \cup \mathcal{V}(f_2)$; poiché X è irriducibile X è contenuto in uno dei due $\mathcal{V}(f_i)$, allora $f_1 \in I$ oppure $f_2 \in I$, pertanto I è un ideale primo.

Viceversa sia I un ideale primo e supponiamo $X = X_1 \cup X_2$, allora

$$\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{I}(X_i) \qquad\qquad i = 1, 2 \ .$$

Quindi esistono $f_i \in \mathcal{I}(X_i)$ con $f_i \notin I$, ma $f_1 f_2 \in I$, questa è una contraddizione.

Sia X insieme algebrico, l'anello delle funzioni polinomiali su X è formato da tutte quelle funzioni che si ottengono per restrizione dei polinomi su X cioè

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, x_2 \ldots x_n] / \mathcal{I}(X) \ .$$

Chiaramente due polinomi $f(x_1 \ldots x_n)$ e $g(x_1 \ldots x_n)$ determinano la stessa funzione se $f - g \in \mathcal{I}(X)$. Sia X una varietà affine, poiché $\mathcal{I}(X)$ è un ideale primo abbiamo che $\mathbb{C}[X]$ è un dominio di integrità.

Passiamo ora a considerare con maggior attenzione il piano affine $\mathbb{A}^2$.

Ricordiamo che una curva algebrica piana di $\mathbb{A}^2$ è una classe di proporzionalità di polinomi non costanti di $\mathbb{C}[x, y]$.

Se $f(x, y)$ è un rappresentante della curva, l'equazione $f(x, y) = 0$ si dice equazione della curva.

Equivalentemente si può dire che una curva algebrica è definita dall' ideale principale $< f > \subset \mathbb{C}[x, y]$. In questo modo si è associata una curva alla sua equazione e non ai suoi punti.

Infatti se

$$f(x,y) = f_1^{n_1}(x,y) f_2^{n_2}(x,y) \dots f_r^{n_r}(x,y) \tag{2.1}$$

con $f_i(x,y)$ polinomi irriducibili e n_i interi positivi abbiamo che

$$\mathcal{V}(f) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{V}(f_i) \ . \tag{2.2}$$

Diremo che la curva è ridotta se $n_i = 1$ $i = 1 \dots r$.

Osserviamo che questo è il caso in cui l'ideale definito dal polinomio $f(x,y)$ è radicale, inoltre una curva algebrica piana è una varietà affine se e solo se $f(x,y)$ è irriducibile.

Dimostreremo ora un fatto riguardante l'intersezione di due curve algebriche piane che utilizzeremo in seguito.

LEMMA (2.4). *Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono polinomi in $\mathbb{C}[x,y]$ privi di fattori in comune, allora $\mathcal{V}(g,f) = \mathcal{V}(g) \cap \mathcal{V}(f)$ è un insieme finito di punti.*

Dim. $\mathbb{C}[x]$ è un dominio a fattorizzazione unica allora per il lemma di Gauss abbiamo che ogni elemento irriducibile in $\mathbb{C}[x,y]$ lo è anche in $\mathbb{C}(x)[y]$, quindi $f(x,y)$ e $g(x,y)$ non hanno fattori in comune anche in questo dominio che è a ideali principali.

Di conseguenza abbiamo che $(f,g) = 1$, o equivalentemente esistono $r(x,y)$ e $s(x,y)$ in $\mathbb{C}(x)[y]$ tale che

$$rf + sg = 1 \ .$$

Sia $d(x)$ tale che $d(x)r(x,y)$ e $d(x)s(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ quindi

$$d(x)r(x,y)f(x,y) + d(x)s(x,y)g(x,y) = d(x) \ .$$

Se $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{V}(f,g)$, allora $d(x_0) = 0$.

Il polinomio $d(X)$ ha solo un numero finito di zeri, quindi solo un numero finito di X–coordinate appaiono tra i punti di $\mathcal{V}(f,g)$. Un argomento simile vale per le Y–coordinate, quindi l'insieme è finito.

Procedendo in modo analogo al caso affine possiamo definire le varietà proiettive, facendo attenzione al fatto che dobbiamo definire degli oggetti in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Quindi la non unicità delle coordinate omogenee ci porta a richiedere, affinché la definizione abbia senso, che i polinomi siano omogenei.

Per insieme algebrico proiettivo intenderemo l'insieme degli zeri in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di un qualche insieme T di polinomi omogenei di $\mathbb{C}[x_0, x_1, \dots x_n]$. Conseguentemente dobbiamo considerare solo ideali omogenei,cioè formati da polinomi omogenei.

Si verifica immediatamente che la somma, il prodotto , l'intersezione di ideali omogenei è ancora un ideale omogeneo; inoltre ha senso parlare di ideali omogenei primi e il radicale di un ideale omogeneo è ancora un ideale omogeneo. Inoltre si può dimostrare che ogni ideale omogeneo è finitamente generato.

Possiamo definire la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$ prendendo come aperti i complementari degli insiemi algebrici proiettivi.

Come nel caso affine, usando un teorema degli zeri omogeneo, abbiamo una corrispondenza biunivoca tra sottinsiemi chiusi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e ideali radicali omogenei di $\mathbb{C}[x_0, x_1, \ldots x_n]$, con la sola eccezione dell' ideale $I =< x_0, \ldots, x_n >$ che è proprio, ma ha $\mathcal{V}(I) = \emptyset$.

Chiaramente una varietà proiettiva è un insieme algebrico proiettivo irriducibile e corrisponde ad un ideale omogeneo primo di $\mathbb{C}[x_0, \ldots x_n]$. Una varietà quasi-proiettiva è un aperto di una varietà proiettiva.

Posto $\mathcal{I}(X) = \{$polinomi omogenei che svaniscono su $X\}$, definiamo l' anello delle coordinate omogenee nel modo seguente

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_0, x_1 \ldots x_n]/\mathcal{I}(X). \tag{2.3}$$

Ricordiamo che lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha un ricoprimento di aperti fatto da spazi corrispondenti agli spazi affini vogliamo analizzare il legame tra uno di questi aperti e lo spazio affine, infatti la corrispondenza non è puramente insiemistica, poiché le topologie di Zariski coincidono, infatti per esempio sia U_0 l'aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con la prima coordinata non zero, allora abbiamo un' applicazione

$$\psi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^n$$

definita da $\psi_0([y_0, y_1 \ldots y_n]) = (y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0)$ e ad ogni polinomio $f(x_1, \ldots, x_n)$ di grado k associamo il polinomio omogeneo $y_0^k f(y_1/y_0, \ldots, y_n/y_0)$.

Allora ad $X \subset \mathbb{A}^n$, sottinsieme chiuso, corrisponde l'intersezione di U_0 con il sottinsieme chiuso di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definito dagli "omogeneizzati" dei polinomi che svaniscono su X. Viceversa a $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sottinsieme chiuso, corrisponde $\psi_0(Y \cap U_0)$ definito dalla "disomogeneizzazione" dei polinomi che svaniscono su Y, cioè, a $g(y_0, y_1 \ldots y_n)$ associamo $g(1, x_1, \ldots, x_n)$.

Quindi una varietà proiettiva X è ricoperta da insiemi aperti $X \cap U_i$ che sono omeomorfi a varietà affini. Di conseguenza le varietà quasi-proiettive sono ricoperte da varietà omeomorfe a varietà quasi-affini. Inoltre ogni varietà affine è omeomorfa ad un aperto di una varietà proiettiva (basta omogeneizzare l'anello delle coordinate).

Esercizi

1. Verificare che la somma, il prodotto , l'intersezione di ideali omogenei è ancora un ideale omogeneo e che il radicale di un ideale omogeneo è ancora un ideale omogeneo.
2. Dimostrare il teorema degli zeri nel caso omogeneo
3. Sia $Y \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ un insieme algebrico proiettivo e $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'applicazione quoziente, dimostrare che $\pi^{-1}(Y) \cup \{O\}$è un insieme algebrico affine

4. Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, siano Q_1 e Q_2 rispettivamente definite dalle equazioni $x_0x_1 - x_3x_4 = 0$ e $x_0^2 - x_1x_3 = 0$. Verificare che $Q_1 \cap Q_2$ non è una varietà proiettiva.

3 Prodotto di Varietà

In questa sezione studieremo il prodotto di varietà affini (proiettive) e daremo a questi spazi una struttura di varietà affine (proiettiva).

Siano $X \subset \mathbb{A}^n$ e $Y \subset \mathbb{A}^m$ due varietà affini, identificando $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ con $\mathbb{A}^{n+m}$, possiamo considerare $X \times Y \subset A^{n+m}$.

Bisogna verificare che $X \times Y$ è un sottinsieme chiuso e irriducibile di $\mathbb{A}^{n+m}$. Sia $\mathcal{I}(X) =< f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_n) >$ e $\mathcal{I}(Y) =< g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_t(y_1,\ldots,y_m) >$, allora $X \times Y$ è definito dall'ideale $< f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_n), g_1(y_1,\ldots,y_m),\ldots,g_t(y_1,\ldots,y_m) >$. Osserviamo che tramite questa identificazione abbiamo che $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ sono sottinsiemi chiusi.

L' irreducibilità è conseguenza del seguente

Lemma (3.1). *Siano X e Y degli spazi topologici irriducibili, dotiamo $X \times Y$ di una topologia in cui abbiamo che $\{x\} \times Y$ e $X \times \{y\}$ sono sottinsiemi chiusi e che induce omeomorfismi tra X e $X \times \{y\}$ e tra Y e $\{x\} \times Y$, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico irreducibile.*

Dim. Poniamo $X \times Y = Z = Z_1 \cup Z_2$, Z_i chiusi. Per ogni $x \in X$ abbiamo che $\{x\} \times Y$ è contenuto in Z_1 o in Z_2, infatti una eventuale decomposizione ne comporterebbe una anche di Y. Allora abbiamo che

$$X = X_1 \cup X_2 \tag{3.1}$$

con $X_i = \{x \in X / \{x\} \times Y \subset Z_i\}$.

Per ogni $y \in Y$ abbiamo che $X \times \{y\}$ è un chiuso, quindi anche

$$X \times \{y\} \cap Z_i = X_{iy} \times \{y\}$$

e

$$X_i = \bigcap_{y \in Y} X_{iy} \tag{3.2}$$

lo sono.

Ora dall' irreducibilità di X segue che $X = X_1$ o $X = X_2$ e conseguentemente $Z = Z_1$ o $Z = Z_2$.Osserviamo che la topologia della varietà prodotto non è

la topologia prodotto.Siano $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e $Y \subset \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ due varietà proiettive

vogliamo verificare che anche il loro prodotto $X \times Y$ ha una struttura di varietà proiettiva. Come primo passo dobbiamo trovare lo spazio proiettivo ambiente dove definire la varietà prodotto. Bisogna considerare l' immersione di Segre (cf. Cap 2) per identificare $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ con un sottinsieme chiuso di uno spazio proiettivo.

Sia $N = nm + n + m$ e

$$\psi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$$

$$([x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_m]) \to [x_0y_0, \dots, x_ny_m]$$

sappiamo che ψ è ben definita e iniettiva, vogliamo dimostrare che l'immagine è un chiuso di $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Indichiamo con $z_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$, le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, sia I il nucleo dell'omomorfismo

$$\psi^* : \mathbb{C}[z_{ij}] \to \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m] \tag{3.3}$$

che manda z_{ij} in x_iy_j.

Poniamo $Z = \mathcal{V}(I)$, è immediato verificare che $\psi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^m(\mathbb{C})) \subseteq Z$; la suriettività segue dal seguente fatto: in I ci sono dei polinomi quadratici

$$z_{ij}z_{kl} - z_{il}z_{kj}, \tag{3.4}$$

quindi le coordinate di un punto $z \in Z$ non sono tutte nulle e soddisfano questa condizione. Poniamo per semplicità $z_{00} \neq 0$, allora posto $x_i = z_{i0}/z_{00}$ e $y_j = z_{0j}/z_{00}$ abbiamo che

$$z_{00}^2 x_iy_j = z_{i0}z_{0j} = z_{ij}z_{00} \tag{3.5}$$

e quindi

$$\psi([1, x_1, \dots, x_n], [1, y_1, \dots, y_m]) = z. \tag{3.6}$$

L' irreducibilità di Z segue dal lemma precedente.

Ora procedendo in modo del tutto analogo al caso affine si può dimostrare che $X \times Y$ è una varietà proiettiva.

Esercizi

1. Verificare con un esempio che la topologia delle varietà prodotto non è la topologia prodotto.
2. Verificare che l'immagine dell' applicazione di Segre di

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$$

è una quadrica che contiene due famiglie di rette proiettive.

3. Dimostrare che il prodotto di due varietà quasi–proiettive è ancora una varietà quasi–proiettiva.

4. Sia X una varietà proiettiva (affine), dimostrare che la diagonale $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ è una varietà proiettiva (affine).

4 Morfismi

Finora abbiamo considerato soltanto gli oggetti studiati in geometria algebrica. Vogliamo ora considerare le applicazioni tra questi oggetti.

Siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà affini diremo che un'applicazione

$$\varphi : X \to Y \tag{4.1}$$

è un morfismo se

$$\varphi(x_1, \ldots x_n) = (\psi_1(x), \ldots \psi_m(x)) \text{ con } \psi_i \in \mathbb{C}[X] \ .$$

Osserviamo che un morfismo è sempre indotto da un morfismo di $\mathbb{A}^n$ in $\mathbb{A}^m$.

Un morfismo φ è chiaramente un'applicazione continua relativamente alla topologia di Zariski.

Ad ogni morfismo $\varphi : X \to Y$ di varietà affini è associato un morfismo di algebre

$$\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X] \tag{4.2}$$

definito da $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ e le usuali proprietà funtoriali valgono

$$(id)^* = id \ , \quad (\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* \ .$$

Inoltre la conoscenza di φ^* è equivalente a quella di φ, infatti $\psi_i = \varphi^* y_i$ dove $y_1 \ldots y_m$ sono le funzioni coordinate di $\mathbb{A}^m$.

Abbiamo pertanto stabilito un funtore controvariante tra la categoria delle $\mathbb{C}$–algebre integrali e finitamente generate e la categoria delle varietà affini.

In vero abbiamo molto di più, infatti abbiamo dimostrato il seguente

Teorema (4.3). *Il funtore tra la categoria delle $\mathbb{C}$–algebre finitamente generate integrali e quella delle varietà affini stabilisce un' equivalenza categoriale.*

Nel caso proiettivo il discorso è un po' più complicato, infatti le funzioni coordinate potrebbero avere uno zero in comune e ciò comporterebbe che l'applicazione non è ben definita.

Inoltre è comunque più naturale svincolare la definizione dagli spazi ambienti. Per fare ciò, dobbiamo procedere differentemente.

Ricordiamo che un anello locale è un anello che ha un solo ideale massimale. In questo caso ogni elemento che non è contenuto nell'ideale è invertibile.

Indichiamo ora un modo per costruire anelli locali.

Sia D un dominio di integrità, con sottinsieme moltiplicativo di A denotiamo un sottinsieme S contenente 1 e tale che per ogni $x, y \in S$ il prodotto $xy \in S$. Assumiamo anche che 0 non appartenga a S.

Sia K il campo dei quozienti di D, indichiamo con

$$S^{-1}D = \{y \in K | y = x/s \quad \text{con} \quad x \in D, s \in S\},$$

questo è un anello che contiene D.

Sia $P \subset D$ un ideale primo indichiamo con S_P il complementare di P in D, allora S_P è un sottinsieme moltiplicativo di A e $D_P = S_P^{-1}D$ è un anello locale.

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà quasi–affine, allora diremo che una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ è regolare nel punto $p \in X$ se esiste un aperto $U \subset X$ contenente p, dei polinomi $h, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che $h(u) \neq 0$ e $f = g/h$ in U. Chiaramente f è regolare in X se lo è in ogni punto di X.

Identificando $\mathbb{C}$ con lo spazio affine $\mathbb{A}^1$ abbiamo che le funzioni regolari sono applicazioni continue.

Nel caso delle varietà quasi–proiettive si procede in modo analogo, dovremo però richiedere che g e h siano polinomi omogenei dello stesso grado.

D'ora in poi per varietà intenderemo una qualche varietà affine, quasi–affine, proiettiva, quasi–proiettiva.

Per ogni varietà X indichiamo con $\mathcal{O}(X)$ l'anello delle funzioni regolari su X e con $\mathcal{O}_{p,X}$ l'anello delle funzioni regolari in p, osserviamo che anche in questo caso , introducendo la relazione di equivalenza per la quale $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ se $f_1 \equiv f_2$ in $U_1 \cap U_2$, abbiamo che

$$\mathcal{O}_{p,X} = \dot{\bigcup_{U \ni p}} \mathcal{O}(U)/\sim .$$

L'anello $\mathcal{O}_{p,X}$ è locale, infatti il suo unico ideale massimale m_p è formato dalle funzioni regolari che svaniscono in p.

Consideriamo ora l'insieme dellle classi di equivalenza (U, f) con f regolare in U, poiché X è irreducibile e ogni aperto è denso abbiamo che possiamo definire delle operazioni di somma e prodotto tra classi di equivalenza in modo da ottenere un campo $\mathbb{C}(X)$, chiamato il campo delle funzioni razionali. Ovviamente abbiamo le seguenti inclusioni

$$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{p,X} \to \mathbb{C}(X). \tag{4.3}$$

Inoltre osserviamo che se U è un aperto di una varietà X ,poiché è anch'esso una varietà ha senso considerare il campo $\mathbb{C}(U)$, questo, sempre per l'irreducibilità di U risulta essere isomorfo a $\mathbb{C}(X)$.

Ora,analizziamo nel caso affine e in quello proiettivo, gli anelli precedentemente introdotti.

PROPOSIZIONE (4.5). *Sia X una varietà affine con anello delle coordinate $\mathbb{C}[X]$ e sia M_p uguale all'ideale delle funzioni in $\mathbb{C}[X]$ che svaniscono nel punto p, allora si ha*

a) $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[X]$,

b) $\mathcal{O}_{p,X} = \mathbb{C}[X]_{M_p} = \{g/h; g, h \in \mathbb{C}[X], h(p) \neq 0\}$,

c) $\mathbb{C}(X) = \{g/h; g, h \in \mathbb{C}[X], h \neq 0\}$.

Dim. Ogni polinomio in $\mathbb{C}[X]$ è una funzione regolare su X, quindi abbiamo un' applicazione iniettiva

$$\psi : \mathbb{C}[X] \to \mathcal{O}(X) \ , \tag{4.4}$$

questa estende a un' applicazione che indicheremo nello stesso modo

$$\psi : \mathbb{C}[X]_{M_p} \to \mathcal{O}_{p,X} \ , \tag{4.5}$$

che risulta essere iniettiva e suriettiva per la definizione stessa di funzione regolare.

Da ciò e da (4.4) segue che il campo dei quozienti di $\mathbb{C}[X]$ e quello di $\mathcal{O}_{p,X}$ sono isomorfi per ogni $p \in X$.

Questo dimostra l' ultima affermazione. Inoltre sempre da (**??**) segue che

$$\mathcal{O}(X) \subset \cap_{p \in X} \mathcal{O}_{p,X} \ , \tag{4.6}$$

quindi identificando gli anelli tramite l' applicazione ψ abbiamo che

$$\mathbb{C}[X] \subset \mathcal{O}(X) \subset \cap_{p \in X} \mathbb{C}[X]_{M_p}.$$

Adesso l'uguaglianze seguono dalla seguente considerazione: sia f una funzione regolare su X, allora localmente $f = g_i/h_i$, ma, essendo regolare ovunque,si ha $h_i f = g_i \in \mathbb{C}[X]$

Dal teorema degli zeri di Hilbert segue che esistono dei polinomi $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)$ tali che in X si ha

$$1 = \sum_{i=1}^{t} f_i h_i.$$

Di conseguenza

$$f = f \left(\sum_{i=1}^{t} f_i h_i \right) = \sum_{i=1}^{t} f_i g_i \in \mathbb{C}[X].$$

Nel caso proiettivo abbiamo la seguente

Proposizione (4.9). *Sia X una varietà proiettiva con anello delle coordinate omogenee $\mathbb{C}[X]$ e sia N_p uguale all'ideale omogeneo delle forme in $\mathbb{C}[X]$ che svaniscono nel punto p, allora si ha*

a) $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$

b) $\mathcal{O}_{p,X} = \{g/h; g, h \in \mathbb{C}[X], \textit{omogenei dello stesso grado}, h(p) \neq 0\} = \mathbb{C}[X]_{N_p}$,

c) $\mathbb{C}(X) = \{g/h; g, h \quad \textit{omogenei e dello stesso grado} \in \mathbb{C}[X], h \neq 0\}$.

Dim. L' affermazione fatta nel punto b) è di natura locale, quindi ha senso restringerci a considerare il punto $p \in X_i = X \cap U_i$ per qualche $i = 0, \ldots, n$. Poniamo

$$\mathbb{C}[X]_{x_i} = \{g/x_i^k, g \in \mathbb{C}[X], omogeneodigradok\}$$

esiste un isomorfismo naturale

$$\phi_i^* : \mathbb{C}[X_i] \to \mathbb{C}[X]_{x_i}$$

Sia $p \in X_i$, allora $\mathcal{O}_{p,X} = \mathbb{C}[X_i]_{M_p}$. Si verifica immediatamente che

$$\phi_i^*(M_p) = N_p \mathbb{C}[X]_{x_i} \tag{4.7}$$

Ora poiché x_i non è contenuto in N_p, si ha che

$$\mathcal{O}_{p,X} = \mathbb{C}[X_i]_{M_p} = \mathbb{C}[X]_{N_p} \ . \tag{4.8}$$

Per dimostrare c) possiamo usare il fatto che $\mathbb{C}(X)$ è isomorfo a $\mathbb{C}(X_i)$.

Riguardo alla prima affermazione , sia $f \in \mathcal{O}(X)$ sappiamo che una funzione regolare su X_i può essere scritta nella forma $f = g_i/x_i^{k_i}$ con g_i omogeneo di grado k_i, quindi $x_i^{k_i} f$ è un polinomio omogeneo di grado k_i in $\mathbb{C}[X]$; sia

$$k \geq \sum_{i=0}^{n} k_i$$

allora, indicando con $\mathbb{C}[X]_k$ la parte omogenea di grado k dell' anello $\mathbb{C}[X]$, si ha

$$\mathbb{C}[X]_k f^t \subset \mathbb{C}[X]_k \tag{4.9}$$

per ogni intero $t > 0$, da questo ne segue che $\mathbb{C}[X][f] \subset x_0^{-k}\mathbb{C}[X]$ che è un modulo finito su $\mathbb{C}[X]$, quindi f è integrale su $\mathbb{C}[X]$.

Siano $f_1, \ldots, f_l \in \mathbb{C}[X]$ tali che

$$f^l + f_1 f^{l-1} + \ldots + f_l = 0,$$

poichè f ha grado 0, lo stesso deve essere vero per le $f_i, i = 1, \ldots, l$, quindi $f \in \mathbb{C}$.

Siamo ora in grado di generalizzare la nozione di morfismo.

Definizione. Siano X e Y due varietà, un morfismo

$$\phi : X \to Y$$

è un'applicazione continua che per ogni aperto $V \subseteq Y$ induce un morfismo di anelli

$$\phi^* : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(\phi^{-1}(V)) \tag{4.10}$$

con $\phi^*(f) = f \cdot \phi$.

Questa definizione generalizza quella già data per varietà affini. Ovviamente la composizione di due morfismi è ancora un morfismo, un morfismo è un isomorfismo se è invertibile. Esistono morfismi che pur essendo omeomorfismi non sono isomorfismi.

Esempio Sia $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ definito da $t \to (t^2, t^3)$. Si verifica immediatamente che ϕ è un omeomorfismo sull'immagine, la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y^2 = x^3$, ma non è un isomorfismo, perché $\phi^* : \mathbb{C}[t^2, t^3] \to \mathbb{C}[t]$ non lo è.

Osserviamo che se $p \in X$ e $q \in Y$ un morfismo $\phi : X \to Y$ con $\phi(P) = Q$ induce un' applicazione

$$\phi^*_Q : \mathcal{O}_{q,Y} \to \mathcal{O}_{p,X} \tag{4.11}$$

Commettendo un abuso di linguaggio diciamo che una varietà è affine se è isomorfa ad una varietà affine.
Esempio Il sottinsieme $U_i \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definito da $x_i \neq 0$ risulta essere una varietà affine tramite l'identificazione data dall' usuale applicazione $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$.

Possiamo descrivere una base di aperti in una varietà X, infatti abbiamo la seguente

Proposizione (4.15). *In ogni varietà X c'è una base per la topologia formata da aperti affini.*

Dim. Poiché il discorso è locale dobbiamo dimostrare che per ogni punto $p \in X$ e ogni aperto V contenente il punto si ha un aperto affine U tale che $p \in U \subseteq V$. Possiamo assumere anche $X = V$, poiché anche V è una varietà . Inoltre poiché ogni varietà è ricoperta da aperti quasi affini possiamo sempre assumere che X è quasi affine in qualche $\mathbb{A}^n$. Sia Y la sua chiusura, allora $Z = Y - X$ è un sottinsieme chiuso proprio di $\mathbb{A}^n$ poiché il punto p non appartiene a Z. Allora esiste un polinomio irriducibile $f \in \mathcal{I}(Z)$ con $f(p) \neq 0$. Sia

$$\mathbb{A}^n_f = \{p \in \mathbb{A}^n / f(p) \neq 0\}.$$

Assumiamo che $\mathbb{A}^n_f$ sia affine allora $U = Y - (Y \cap \mathcal{V}(< f >)$ è ancora affine, perché chiuso in un insieme affine e inoltre si ha $p \in U \subseteq X$.

Quindi basta dimostrare il seguente

Lemma (4.16). $\mathbb{A}^n_f$ *è una varietà affine.*

Dim. Sia X la varietà affine contenuta in $\mathbb{A}^{n+1}$ definita dall'equazione $1 - x_{n+1}f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, allora abbiamo un'applicazione $\psi : \mathbb{A}^n_f \to X$ cos\`ı definita

$$\psi(a_1, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_n, 1/(f(a_1, \ldots, a_n)).$$

Si verifica immediatamente che ψ e la sua inversa ψ^{-1} sono morfismi e quindi $\mathbb{A}^n_f$ è una varietà affine.

Esercizi

1. Siano X e Y le curve piane di equazione $y = x^2$ e $xy = 1$ rispettivamente, verificare che non sono isomorfe.

2. Dimostrare che $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è una varietà affine

3. Dimostrare che ogni conica in $\mathbb{A}^2$ è isomorfa a $\mathbb{A}^1$ oppure a $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.
   Dimostrare che ogni conica in $\mathbb{P}^2$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$

4. Dimostrare che $Y = \{(t, t^2, t^3)\} \subset \mathbb{A}^3$ è una varietà affine isomorfa a $\mathbb{A}^1$.

5. Sia $\psi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ un morfismo dato da n polinomi $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)$ e sia

$$J(x_1, \ldots, x_n) = det(\partial g_i / \partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Dimostrare che se ψ è un isomorfismo, allora $J(x_1, \ldots, x_n) = c \neq 0$

6. Dimostrare che $GL(n, \mathbb{C})$ è una varietà affine.

7. Dimostrare che il punto è l' unica a affine e proiettiva.

8. Sia H un iperpiano di $\mathbb{P}^n$ e $p \in X = \mathbb{P}^n \setminus H$ un punto. Per ogni $q \in X$, indichiamo con r_q l'unica retta passante per p e q.

Definiamo un'applicazione

$$\pi : X \to H$$

ponendo $\pi(q) = r_q \cup H$. Tale applicazione è detta la proiezione da p su H; verificare che è un morfismo.

9. Sia X una varietà, verificare che per ogni punto $p \in X$ $\mathcal{O}_{p,X}$ è un dominio noetheriano.

10. Sia $\mathcal{O}_{p,X}$ l'anello locale al punto p di una varietà X, verificare che 'e un anello noetheriano.

11. Sia $\mathcal{O}_{p,X}$ l'anello locale al punto p di una varietà X, verificare che c'è una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primi di $\mathcal{O}_{p,X}$ e le varietà passanti per il punto p.

5 Dimensione di una varietà

In questo paragrafo vogliamo introdurre la nozione di dimensione di una varietà. Per fare ciò abbiamo bisogno di alcune nozioni di teoria dei campi che richiamiamo brevemente

Un'estensione, finitamente generata (come campo), L di $\mathbb{C}$ è trascendente se non è algebrica.

Un tipico esempio è $\mathbb{C}(t)$, il campo delle funzioni razionali in una variabile.

Un sottinsieme finito $T = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset L$ è trascendente su $\mathbb{C}$ se non esiste un polinomio $p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tale che

$$p(t_1, \ldots, t_n) = 0. \tag{5.1}$$

un sottinsieme trascendente massimale è chiamato base trascendente. Quindi un sottinsieme trascendente è una base trascendente se L è un' estensione algebrica di $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_n)$.

L' esistenza di una base di trascendenza e il fatto che due basi trascendenti hanno lo stesso numero di elementi è in generale conseguenza del teorema di esistenza di una base per gli spazi vettoriali. In questo caso, poiché l'estensione è finitamente generata, la dimostrazione dell' esistenza è banale; relativamente al numero degli elementi abbiamo

PROPOSIZIONE (5.2). *Sia L un'estensione è finitamente generata di $\mathbb{C}$, ogni base di trascendenza di L ha lo stesso numero di elementi.*

Dim. Siano $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ e $T = \{t_1, \ldots, t_m\}$ due basi trascendenti di L su $\mathbb{C}$. Assumiamo che $n \leq m$; sia $k \leq n$ il numero di elementi in comune tra le due basi, se $k = n$, allora per la massimalità anche $m = n$.

Sia allora $k < n$, possiamo assumere, a meno di una riindicizzazione, che

$$s_1 = t_1, \ldots, s_k = t_k$$

sono elementi comuni di S e di T e inoltre che t_{k+1} non è algebrico su $\mathbb{C}(s_1, \ldots, s_k, s_{k+2}, \ldots, s_n)$, pur essendolo su $\mathbb{C}(s_1, \ldots, s_n)$.

Esiste , perciò, un polinomio $p(x_1, \ldots, x_n, x)$ tale che

$$p(s_1, \ldots, s_n, x) \neq 0 e p(s_1, \ldots, s_n, t_{k+1}) = 0;$$

più in dettaglio possiamo scrivere

$$p(x_1, \ldots, x_n, x) = \sum_{j=0}^{l} a_j(x_1, \ldots, x_k, x_{k+2}, \ldots, x_n, x) x_{k+1}^j$$

con non tutti i polinomi $a_j(x_1, \ldots, x_k, x_{k+2}, \ldots, x_n, x)x_{k+1}^j = 0$ e conseguentemente

$$a_j(s_1, \ldots, s_k, s_{k+2}, \ldots, s_n, t_{k+1}) \neq 0.$$

Quindi s_{k+1} è algebrico su $\mathbb{C}(s_1, \ldots, s_k, s_{k+2}, \ldots, s_n, t_{k+1})$ e l'insieme $S' = \{s_1, \ldots, s_k, s_{k+2}, \ldots, s_n, t_{k+1}\}$ risulta essere una base trascendente. Iterando questo procedimento otteniamo che un sottinsieme di ordine n di T è una base trascendente e quindi $m = n$.

Il numero degli elementi di una base di trascendenza si chiama grado di trascendenza

Si scriverà

$$tr \deg_{\mathbb{C}} L \ . \tag{5.2}$$

Diremo che una varietà X ha dimensione r se

$$tr \deg_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(X) = r \ . \tag{5.3}$$

La dimensione di una varietà X è indicata con il simbolo $dimX$.Varietà di dimensione 1, 2 si diranno curve , superfici. Ovviamente si ha che $dim\mathbb{A}^n = dim\mathbb{P}^n = n.$.

La nozione di dimensione di una varietà può essere introdotta anche in modo diverso del tutto simile al caso differenziabile, infatti procedendo come nel § 2 del Cap.5 possiamo considerare lo spazio delle derivazioni puntuali dell' anello locale $\mathcal{O}_{p,X}$ e definire lo spazio tangente $T_p(X)$ come lo spazio delle derivazioni in p. Chiaramente vogliamo dimostrare che la dimensione dello spazio tangente coincide con quella della varietà. Questo come vedremo non è vero per tutti i punti, ma per un aperto di X.

Consideriamo le derivazioni della $\mathbb{C}$ algebra $\mathbb{C}(X)$. Per la proposizione 4.16 possiamo assumere che X è una varietà affine. Poniamo

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[y_1, y_2 \ldots, y_n] = \mathbb{C}[x_1, x_2 \ldots, x_n]/\mathcal{I}(X)$$

e D_i uguale alla derivata parziale rispetto a x_i.

Sia D una derivazione tale che $D(y_i) = u_i$, allora come conseguenza della regola di derivazione per ogni polinomio f abbiamo che

$$D(f(y_1, y_2 \ldots, y_n)) = \sum_i^n u_i D_i(f(y_1, y_2 \ldots, y_n)). \tag{5.4}$$

In particolare se $f \in \mathcal{I}(X)$, poiché D(0)=0, si ha

$$\sum_i^n u_i D_i(f(y_1, y_2 \ldots, y_n)) = 0. \tag{5.5}$$

Questo implica che se D esiste è univocamente determinata su $\mathbb{C}[X]$ e conseguentemente sul suo campo dei quozienti. Viceversa abbiamo che la condizione (5.5) definisce univocamente una derivazione di $\mathbb{C}[X]$ e non di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Consideriamo ora quante derivazioni D esistono. Dapprima assumiamo che $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_k)$ sia un' estensione puramente trascendente di $\mathbb{C}$, allora, posto $D(t_i) = u_i$, con $u_i \in \mathbb{C}(X)$, abbiamo che la condizione (5.5) è soddisfatta, poiché $\mathcal{I}(X) \equiv 0$, quindi in questa situazione si ha

$$\dim_{\mathbb{C}(X)} Der\mathbb{C}(X) = \dim X \ .$$

Nel caso di estensioni algebriche, è sufficiente considerare il caso in cui il campo K è un' estensione algebrica semplice di un campo F, finitamente generato su $\mathbb{C}$, i.e. $K = F(y)$ con y algebrico su F.

Sia $f(t)$ il polinomio minimo di y su F e D una derivazione di F, vogliamo vedere sotto quali condizioni e in quanti modi D estende ad una derivazione di K. Indichiamo con $f^D(t)$, l'elemento di $F(t)$ ottenuto da $f(t)$ applicando la derivazione D ai coefficienti del polinomio, allora procedendo in modo simile a (5.4) abbiamo che D estende ad una derivazione D' di K con $D'(y) = u$ se e solo se

$$f^D(y) + u\frac{df}{dt}(y) = 0. \tag{5.6}$$

Poiché $\frac{df}{dt}(y) \neq 0$ abbiamo che D' esiste ed è univocamente determinato da

$$D^{'}(y) = -f^D(y)/\frac{df}{dt}(y).$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente

TEOREMA (5.8). *Sia X una varietà, allora* $\dim X = \dim_{\mathbb{C}(X)} Der\mathbb{C}(X)$.

Osserviamo che $Der\mathbb{C}(X)$ coincide con le n-ple $u_1, \ldots, u_n$ di $\mathbb{C}(X)$ che soddisfano (5.5), quindi se $\mathcal{I}(X) =< f_1, \ldots, f_k >$, si ha

$$\dim X = n - rk_{\mathbb{C}(X)}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}) = n - r$$

con $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq n$.

Vediamo ora che questa condizione è soddisfatta da quasi tutti i punti della varietà X. Siano A e B matrici invertibili, di dimensione k e n rispettivamente, con coefficienti in $\mathbb{C}(X)$ tali che

$$A(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})B = \begin{pmatrix} 1_r & O \\ 0 & O \end{pmatrix} \ , \tag{5.7}$$

sia U l'aperto di X dove $detA$ e $detB$ sono definiti e non nulli, allora per ogni punto $p \in U$ si ha

$$rk_{\mathbb{C}}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)) = r.$$

Poiché l'anello locale $\mathcal{O}_{p,X}$ è contenuto in $\mathbb{C}(X)$ abbiamo che per ogni punto $p \in X$ una derivazione puntuale è univocamente definita da una derivazione puntuale di $\mathbb{C}[X]$, per cui specializzando (5.4) ad una derivazione puntuale D con $D(y_i) = a_i$ esiste se e solo se

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) a_i = 0 \tag{5.8}$$

per ogni $f \in \mathcal{I}(X)$, di conseguenza, per ogni $p \in U$ abbiamo che

$$\dim X = \dim_{\mathbb{C}} T_p(X). \tag{5.9}$$

D'ora in poi diremo che un punto $p \in X$ è liscio se la condizione precedente è verificata, altrimenti si dirà singolare; in questo caso si ha

$$\dim X < \dim_{\mathbb{C}} T_p(X).$$

Osserviamo che dalla discussione precedente possiamo ricavare la seguente

PROPOSIZIONE (5.12). *Sia X una varietà e $p \in X$ allora*

$$T_p(X) \cong (M_p/M_p^2)^*.$$

Dim. Poichè $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C} \bigoplus M_p$ e una derivazione è nulla sulle costanti, abbiamo che una derivazione puntuale è individuata dai valori che assume in M_p.

Ovviamente su M_p^2 ogni derivazione puntuale si annulla e se $f \in M_p$, della forma

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - p_i) g_i(y_1, \ldots, y_n)$$

si annulla per ogni derivazione non banale D, abbiamo, come conseguenza di (5.6) che il vettore $(g_1(p),\ldots,g_n(p))$ è combinazione lineare dei vettori

$$(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f_j}{\partial x_n}(p)).$$

con $f_1,\ldots,f_k$ generatori dell'ideale $\mathcal{I}(X)$. Conseguentemente esistono delle costanti c_j tali che

$$g(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n)-\sum_{j=1}^{r}c_jf_j(x_1,\ldots,x_n)$$

appartiene a M_p^2.

Chiaramente la stessa affermazione vale per f, poiché $f_j\equiv 0$ in X.

Esempio Sia $\mathcal{C}$ la curva piana definita da $y^2-x^2(x+1)=0$, poiché la matrice $(-3x^2-2x,2y)$ ha rango minore di 1 solo nel punto $(0,0)\in\mathcal{C}$, questo è l'unico punto singolare della curva.

Il prossimo risultato ci dice che le sottovarietà chiuse sono piccole, infatti la dimensione diminuisce

Proposizione (5.13). *Sia Y una sottovarietà chiusa e propria di una varietà X, allora* $\dim Y<\dim X$.

Dim. Possiamo assumere che X è affine , in questo caso vediamo che se $dimX=r$ possiamo, razionalizzando i denominatori, sempre scegliere r elementi algebricamente indipendenti in $\mathbb{C}[X]$. Supponiamo che esistano $f_1,\ldots,f_r\in\mathbb{C}[X]$ tali che le loro immagini $g_1,\ldots,g_r\in\mathbb{C}[Y]$ siano ancora algebricamente indipendenti. Sia $0\neq g\in\mathcal{I}(Y)$, allora esiste un polinomio irriducibile $p(x,x_1,\ldots,x_r)$ tale che $p(g,f_1,\ldots,f_r)\equiv 0$ in $\mathbb{C}[X]$. Poiché $g\neq 0$, $p\neq x$, quindi $p(0,g_1,\ldots,g_r)$ è una relazione non banale in $\mathbb{C}[Y]$.

Come immediata conseguenza della precedente proposizione e della discussione relativa ai punti singolari si ha

Corollario (5.14). *Sia Y il sottinsieme dei punti singolari di una varietà X, allora* $\dim Y<\dim X$.

Osserviamo che in questo caso abbiamo definito $dimY$ uguale alla dimensione massima delle componenti irriducibili di Y.Nel caso delle curve abbiamo

il seguente

Corollario (5.15). *Una curva ha al più un numero finito di punti singolari.*

Concludiamo questo paragrafo considerando in maggior dettaglio il caso delle curve piane.

Prima di tutto osserviamo che in questo caso avremmo potuto ottenere una dimostrazione del Corollario precedente come semplice conseguenza del Lemma 2.4, in quanto i punti singolari sono caratterizzati dalla condizione

$$f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \tag{5.10}$$

Inoltre la definizione di punti singolari può facilmente essere estesa ad ogni curva algebrica (non necessariamente irriducibile), osservando, però che la finitezza dei punti singolari è vera solo nel caso di curve algebriche ridotte, perchè , altrimenti, il luogo dei punti singolari contiene tutte le componenti irriducibili non ridotte.

Sia $p \in \mathcal{V}(f) \subset \mathbb{A}^2$, consideriamo lo sviluppo in serie del polinomio $f(x, y)$ intorno al punto $p = (x_0, y_0)$:

$$f(x, y) = f_m(x-x_0, y-y_0)+f_{m+1}(x-x_0, y-y_0)+\ldots+f_n(x-x_0, y-y_0) \quad (5.11)$$

con $f_t(x-x_0, y-y_0)$ forme di grado t e m minimo intero positivo soddisfacente $f_m(x - x_0, y - y_0) \neq 0$, allora diciamo che $\mathcal{V}(f)$ ha molteplicità m nel punto p e scriviamo

$$\mu_p(f) = m \ . \quad (5.12)$$

Se $m = 1, 2, 3 \ldots, n$ il punto si dice semplice, doppio, triplo, n-plo; ovviamente un punto è semplice se e solo se è non singolare. A volte per congruità con la definizione si dice che un punto che non appartiene alla curva è di molteplicità 0. Se il polinomio $f(x, y)$ è della forma (2.2) abbiamo immediatamente che

$$\mu_p(f) = \sum_{i=1}^{r} n_i \mu_p(f_i) \ . \quad (5.13)$$

Poichè $f_m(x - x_0, y - y_0)$ è una forma di grado m, possiamo fattorizzare

$$f_m(x - x_0, y - y_0) = \prod_{i=1}^{s} l_i(x - x_0, y - y_0)^{q_i} \ , \quad (5.14)$$

con l_i forme lineari e $m = \sum_{i=1}^{s} q_i$. Le rette di equazioni $l_i(x - x_0, y - y_0) = 0$ passano per il punto p e queste sono le rette tangenti a $\mathcal{V}(f)$ passanti per il punto .

Se le m rette sono distinte diremo che il punto p è un punto $m-plo$ ordinario. Un punto doppio ordinario è chiamato nodo u; un punto doppio non ordinario è chiamato cuspide.

Esercizi

1. Sia X uno spazio topologico, definiamo la dimensione di X come l'estremo superiore di tutti gli interi n tale che esiste una catena ascendente di sottinsiemi chiusi irriducibili distinti

$$Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n.$$

Dimostrare che nel caso della topologia di Zariski le due definizioni di dimensione coincidono.
2. Verificare che una ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$ ha dimensione $n - 1$

3. Trovare i punti singolari delle curve piane
   a) $x^4 - y^2 = 0$
   b) $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$
   c) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.

4. Sia p un punto doppio di una curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$, verificare che è un nodo $\iff$ $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}^2(p) \neq \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x}(p)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}(p)$.

5. Sia X una varietà, $p \in X$, $m_p \subset \mathcal{O}_{p,X}$ l'ideale massimale dell' anello locale; verificare che

$$T_p(X) \cong (m_p/m_p^2)^*$$

6 Applicazioni razionali

Vogliamo ora considerare delle applicazioni definite non su tutta la varietà X, bens`ì su un suo sottinsieme contenente un aperto U . Questa situazione è tipica della geometria algebrica, in quanto la struttura di una varietà algebrica è molto rigida visto che ogni aperto è denso.

Siano X e Y due varietà, un'applicazione rationale $\phi : X \to Y$ è un' applicazione definita quasi ovunque, cioè su un sottinsieme Z di X contenente un aperto U, tale che per ogni aperto $V \subseteq Z$, $\phi|_V$ è un morfismo di varietà

Un'applicazione rationale si dice dominante se l'immagine di $\phi|_V$ è densa per un qualche (per tutti) aperto $V \subseteq Z$.

Esempio Sia $\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita da $(x, y) \to (x, y/x)$. Si verifica immediatamente che ϕ è un morfismo quando viene ristretta a $\mathbb{A}^2_x$.

Esempio Sia $\pi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proiezione sulle prime n coordinate, cioè $\pi([x_0, \ldots, x_n]) = [x_0, \ldots, x_{n-1}]$, questa è definita ovunque tranne che nel punto $[0, \ldots, 0, 1]$ (centro della proiezione).

L'importanza delle applicazioni razionali è evidenziata dal fatto che se ϕ è dominante, allora induce un monomorfismo tra i campi delle funzioni razionali, infatti risulta un'applicazione

$$\phi^* : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X) \tag{6.1}$$

con $\phi^*(f) = f \circ \phi$, più precisamente: sia $f \in \mathbb{C}(Y)$, allora f è regolare su un aperto $V \subseteq Y$, allora poiché $\phi|_U(U)$ è denso abbiamo che $\phi|_U^{-1}(V)$ è denso in X, quindi $f \circ \phi|_U$ è regolare su $U \cap \phi|_U^{-1}(V)$ ed è una funzione razionale su X.Componendo applicazioni razionali dominanti otteniamo ancora

un'applicazione razionale dominante

Un'applicazione birazionale è un'applicazione razionale dominante che ha un' inversa definita quasi ovunque. Se esiste un'applicazione birazionale tra due varietà X e Y, diremo che sono birazionali. Ovviamente varietà birazionali hanno campi di funzioni razionali isomorfi.

Esempio Sia $\phi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definita come prima, allora $\phi^{-1} : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ è definita da $(x, y) \to (x, yx)$.

Esempio Sia U_k, $k = 0, \dots, n$ un aperto fondamentale di $\mathbb{P}^n$, allora ogni inclusione $i_k : U_k \to \mathbb{P}^n$ è un' applicazione birazionale.

Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva piana diversa dalla curva di equazione $x_2 = 0$, allora $\mathcal{C}$ è birazionalmente equivalente alla curva $\mathcal{C} \cap U_2$; l'isomorfismo φ è dato da

$$\varphi : \mathbb{C}(\mathcal{C}) \to \mathbb{C}(\mathcal{C} \cap U_2)$$

$$\frac{p(X_0, X_1, X_2)}{q(X_0, X_1, X_2)} \to \frac{p(x, y, 1)}{q(x, y, 1)} \ .$$

Una varietà birazionale a $\mathbb{P}^n$ si dice razionale, quindi $\mathbb{A}^n$ è razionale e anche la curva $\mathcal{C}$ dell' esempio 43 lo è. La classificazione delle varietà a meno di birazionalità è specifica della geometria algebrica. In questo contesto abbiamo il seguente

TEOREMA (6.2). *Per ogni 2 varietà X e Y abbiamo una corrispondenza biunivoca tra l' insieme delle applicazioni dominanti da X a Y e l'insieme dei monomorfismi da $\mathbb{C}(Y)$ a $\mathbb{C}(X)$.Questa corrispondenza si traduce in un isomorfismo categoriale tra varietà con applicazioni razionali dominanti e campi di funzioni finitamente generati su $\mathbb{C}$ con monomorfismi.*

Dim. Dapprima verifichiamo che ad ogni monomorfismo $\psi : \mathbb{C}(Y) \to \mathbb{C}(X)$ possiamo associare un'applicazione razionale da X a Y.

Avendo Y una base formata da aperti affini , possiamo assumere che sia affine. Consideriamo nell' anello $\mathbb{C}[Y]$ un insieme di generatori $y_1, \dots, y_n$, allora $\psi(y_1), \dots, \psi(y_n)$ sono delle funzioni razionali su X che sono regolari in un aperto $U \subseteq X$ che possiamo assumere affine; abbiamo quindi un' applicazione iniettiva $\psi : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[U]$; procedendo come nella dimostazione del teorema 5.1 abbiamo un morfismo $\phi : U \to Y$ e di conseguenza un'applicazione razionale. Questa è dominante perché se così non fosse esisterebbe una funzione, non nulla, regolare su Y che svanisce su $\phi(U)$, ma ciò è in contraddizione con l'iniettività di ψ.

Dobbiamo ancora dimostrare che se Y è una varietà, allora $\mathbb{C}(Y)$ è un campo finitamente generato e viceversa per ogni campo K finitamente generato su $\mathbb{C}$, si ha $K \equiv \mathbb{C}(Y)$ per qualche varietà Y. La prima affermazione è ovvia perché possiamo scegliere Y affine. Relativamente alla seconda siano $y_1, \dots, y_n$ dei generatori di K allora

$$\mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \equiv \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$$

è un'algebra finitamente generata a cui risulta associata una varietà affine X e quindi $K \equiv \mathbb{C}(Y)$.

Come ovvia conseguenza abbiamo

COROLLARIO (6.3). *Due varietà X e Y sono birazionali se e soltanto se i campi di funzioni razionali sono isomorfi.*

Pertanto lo studio delle varietà a meno di applicazioni birazionali è equivalente a quello dei campi finitamente generati a meno di isomorfismi.

Vogliamo considerare ora in maggior dettaglio applicazioni razionali tra curve proiettive.

Un dominio di integrità R è un anello a valutazione discreta se ogni suo elemento $a \neq 0$ può essere scritto in modo unico come ut^n con u invertibile e n un intero non negativo.

L' elemento t si chiama parametro di uniformizzazione e l'intero n ordine di a e si indica con $ord(a)$. Possiamo estendere la funzione ord a K, il campo dei quozienti di R, ponendo $ord(0) = \infty$.

L'anello delle serie formali su un campo k è un semplice esempio di anello a valutazione discreta. un ulteriore esempio è dato dalla seguente

Proposizione (6.4). *Sia $p \in \mathcal{C}$, un punto liscio della curva $\mathcal{C}$, allora l' anello locale $\mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}$ è un anello a valutazione discreta.*

Dim. Sia $m_p \subset \mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}$ l'unico ideale massimale, osserviamo che è anche l'unico ideale primo differente dall'ideale nullo.

Dimostriamo che è anche principale, infatti sia $t \in m_p \setminus m_p^2$, poichè il punto p è liscio si ha

$$m_p = \mathbb{C}t \oplus m_p^2.$$

L'anello $R = \mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}/ < t >$ è ancora un anello locale con $M = m_p/ < t >$ come ideale massimale, inoltre, poiché

$$M/M^2 = m_p/ < t, m_p^2 >$$

si ha

$$M = M^2 \ . \tag{6.2}$$

Vogliamo dimostrare che $M = 0$. Supponiamo che $M \neq 0$ e siano $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un sistema minimale di generatori di M. Allora come conseguenza di (6.3) abbiamo che

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} h_i f_i \quad h_i, f_i \in M \ , \tag{6.3}$$

o equivalentemente

$$(1 - h_1)g_1 = \sum_{i=2}^{n} h_i f_i.$$

L'elemento $(1 - h_1)$ è invertibile poichè non appartiene all' ideale M e quindi possiamo diminuire i generatori contravvenendo alla loro minimalità, quindi

$$m_p =< t > \ . \tag{6.4}$$

Sia ora $a \in \mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}$, se è un unità non c' è nulla da dimostrare, altrimenti $a = ta_1$.

Se a_1 è un unità non c' è altro da dimostrare, altrimenti $a_1 = ta_2$.

Iterando il processo otteniamo una catena di ideali

$$< a > \supset < a_1 > \supset \ldots \supset < a_n > \supset \ldots \ . \tag{6.5}$$

Dalla noetherianità di $\mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}$ segue che esiste un indice $r \geq 1$ tale che $< a_r > = < a_{r+1} >$ e quindi $va_{r+1} = a_r$ per qualche unità v, cos`i $vt = 1$, ma t non è invertibile, perciò $a = ut^r$.

L'unicità della scrittura segue dal fatto che se $a = ut^n = vt^m$ (con $n \geq m$), allora $ut^{n-m} = v$ è invertibile, quindi $n = m$ e $u = v$.

Vediamo ora come si costruiscono gli anelli a valutazione discreta.

Sia K un campo, una valutazione di K a valori in $\mathbb{Z}$ è un' applicazione

$$v : K \to \mathbb{Z}, \tag{6.6}$$

tale che per ogni $x, y \neq 0$ si ha:

1. $v(0) = \infty$
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

Si dimostra immediatamente che l'insieme

$$R = \{x \in K / v(x) \geq 0\} \tag{6.7}$$

è un anello a valutazione discreta.

Viceversa se R è un anello a valutazione discreta con campo dei quozienti K, la funzione *ord* è una valutazione di K a valori in $\mathbb{Z}$.

Siamo in grado di dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE (6.10). *Sia $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, un' applicazione razionale tra due curve proiettive, questa è definita in ogni punto liscio di $\mathcal{C}$.*

In particolare se $\mathcal{C}$ è non singolare α è un morfismo.

Dim. Dalla irreducibilità di $\mathcal{C}$ segue che l' applicazione α è dominante o costante , in questo ultimo caso risulta essere sempre definita.

Assumiamo, quindi, α dominante, $p \in \mathcal{C}$ un punto liscio e, restringendoci eventualmente a un aperto X di $\mathcal{C}$, α definito in $X - p$. Poichè la curva $\mathcal{C}'$ è proiettiva, basta far vedere che α estende a un morfismo di X in $\mathbb{P}^n$, infatti $\alpha(p) \in \mathcal{C}'$, perché $\mathcal{C}'$ è chiuso in $\mathbb{P}^n$.

Sia $U \subset \mathbb{P}^n$ definito da $x_0 \dots x_n \neq 0$, per induzione su n, possiamo assumere che

$$\alpha(X - p) \cap U \neq \phi.$$

Infatti, se ciò non fosse vero, avremmo che l' irreducibilità di $X - p$ manderebbe $\alpha(X - p)$ in uno degli iperpiani coordinati.

Abbiamo che x_i/x_j è una funzione regolare in U e quindi $f_{ij} = \alpha^*(x_i/x_j)$ è una funzione razionale in $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(\mathcal{C})$.

Sia v la valutazione discreta di $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ associata a $\mathcal{O}_{p,\mathcal{C}}$, posto $n_i = v(f_{i0})$, scegliamo un indice h, tale che

$$n_i - n_h = v(f_{ih}) \geq 0. \tag{6.8}$$

Ora definiamo

$$\alpha(p) = (f_{0h}(p), \dots, f_{nh}(p)). \tag{6.9}$$

Verifichiamo che estende il morfismo. Poiché $f_{hh}(p) = 1$, abbiamo che $\alpha(p) \in U_h$, inoltre per la (6.4) abbiamo che le funzioni f_{ih} sono regolari in p e quindi funzioni regolari in ogni aperto $V \subset U_h$ finiscono in funzioni regolari in $\alpha^{-1}(V)$.

Corollario (6.13). *Due curve proiettive non singolari $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono isomorfe se e solo se lo sono i rispettivi campi di funzioni razionali.*

Questo risultato ci permetterà di individuare un modello canonico di curva proiettiva non singolare con assegnato campo di funzioni razionali. Ciò è una pecularietà delle varietà unidimensionali, infatti in tutte le altre dimensioni esistono applicazioni birazionali varietà non singolari che non possono essere estese a morfismi. Nel caso delle superfici sappiamo che ogni superficie (eccetto alcuni casi speciali) è birazionale a un (unico) modello minimale.

Relativamente ai modelli birazionali delle curve enunciamo un risultato di cui daremo una dimostrazione algebrica e un'idea di una dimostrazione geometrica.
Teorema (6.14). *Ogni una curva (proiettiva) $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è birazionale a una curva (proiettiva) piana.*
Dim. Basta dimostrare che $\mathbb{C}(\mathcal{C}) \equiv \mathbb{C}(x, y)$ che è il campo delle funzioni razionali di una curva piana.Questo risultato è conseguenza del
Teorema (dell'elemento primitivo) (6.15). *Sia L un estensione finita di un campo k di caratteristica* 0 *(o più in generale separabile), allora Lè semplice, i.e. $L = k(\alpha)$.*
*Dim.*Procediamo per induzione sul numero n dei generatori di L su k. Se $n = 1$, L è semplice. Sia $L = k(x, y)$ e siano $F(t), G(t) \in \mathbb{C}[t]$ due polinomi irriducibili tali che $F(x) = G(y) = 0$.

Sia L' un campo in cui i polinomi $F(t), G(t)$ fattorizzano in fattori lineari, cioè

$$F(t) =_{i=1}^{n} (t - a_i), \quad G(t) =_{j=1}^{m} (t - b_j)$$

con $x_1 = x$ e $y_1 = y$. Sia $\lambda \in k$ tale che

$$\lambda x_i + y_j \neq \lambda x + y = z$$

per ogni $i \neq 1$ o $j \neq 1$

Sia $K = k(z)$ e $H(t) = G(z - \lambda t)$, allora

$$H(x_i) =_{j=1}^{m} (\lambda x + y - \lambda x_i - y_j).$$

Si ha $H(x) = 0$ e $H(x_i) \neq 0$ per $i \neq 1$; quindi il fattore lineare $(t - x)$ è il massimo comun divisore tra $H(t)$e$F(t) \in K[t]$; questo assicura che $x \in K$ e poiché $y = z - \lambda x$, anche $y \in K$ che risulta essere L.

Se $L = k(x_1, \ldots, x_n)$, iterando il procedimento precedentemente descritto abbiamo la dimostrazione del teorema.

L'idea della dimostrazione geometrica del teorema 6.14 è la seguente Sia $\pi : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ una proiezione con un centro di proiezione da definire e che non appartiene alla curva Chiaramente π è un morfismo di $\mathcal{C}$ sulla chiusura di $\pi(\mathcal{C})$ Sia $Sec\mathcal{C}$, l'unione di tutte le rette secanti e tangenti di $\mathcal{C}$. Questo è un sottinsieme di $\mathbb{P}^n$ le cui componenti irreducibili hanno al più dimensione 3, poiché una parametrizzazione locale di questo spazio è data da (P, Q, t) con $P, Q \in \mathcal{C}$ e $t \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, quindi se $n \geq 4$ possiamo prendere come centro della proiezione un punto O che non appartiene a $Sec\mathcal{C}$, allora la proiezione ristretta a $\mathcal{C}$ diventa un isomorfismo. nel proiettare da $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ possiamo assumere che in O passino solo un numero finito di secanti e nessuna tangente, nessuna multisecante e nessuna secante con tangenti complanari quindi la proiezione ristretta a $\mathcal{C}$ diventa un morfismo birazionale su una varietà. Osserviamo che si hanno solo nodi come singolarità.

Questo risultato (eccetto la descrizione delle singolarità) può anche essere ottenuto come conseguenza del teorema 6.1 e di quello dell'elemento primitivo

Concludiamo questo paragrafo discutendo ora la razionalità delle curve piane. Dalla definizione segue che una curva piana $\mathcal{C}$ è razionale se e soltanto se esistono tre polinomi $p(t), q(t), r(t)$ a due a due privi di fattori comuni tali che al variare del parametro $t \in U \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme $(p(t)/r(t), q(t)/r(t))$ assume valori su $\mathcal{C}$ meno un numero finito di punti. Usiamo questo fatto per dare degli esempi di curve piane razionali e non.

Costriamo degli esempi di curve piane razionali e non . Verifichiamo che una curva piana di grado $n \geq 2$ con un punto p di molteplicità $n-1$ è razionale. Ricordiamo che una curva $\mathcal{C}$ definita dal polinomio irriducibile $f(x, y)$ ha molteplicità $n-1$ nel punto p se il polinomio e tutte le sue derivate fino all' ordine $n-2$ svaniscono in p e almeno una derivata di ordine $n-1$ non svanisce in p; quindi prendendo come punto p l' origine, il che è sempre possibile a meno di una traslazione, abbiamo che

$$f(x, y) = f_{n-1}(x, y) + f_n(x, y) \tag{6.10}$$

con $f_i(x, y)$ polinomi omogenei di grado $i = n-1, n$.

Quindi possiamo definire le seguenti applicazioni razionali

$$\phi : \mathcal{C} \to \mathbb{A}^1 \quad \text{e} \quad \psi : \mathbb{A}^1 \to \mathcal{C}$$

ponendo

$$\phi(x, y) = y/x \quad \text{e} \quad \psi(t) = (-f_{n-1}(1, t)/f_n(1, t), -tf_{n-1}(1, t)/f_n(1, t)). \tag{6.11}$$

È immediato verificare che$\phi \circ \psi(t) = t$, mentre posto $t = y/x$ si ha che $(x, y) \in \mathcal{C}$ se e soltanto se $f_{n-1}(x, y) + f_n(x, y) = 0$ oppure, equivalentemente $x^{n-1}f_{n-1}(1, t) + x^n f_n(1, t) = 0$ da cui segue che $x = -f_{n-1}(1, t)/f_n(1, t)$, quindi $\psi \circ \phi$ è l'identità su $\mathcal{C}$.

Naturalmente il tutto deve intendersi laddove ha senso, cioè quasi ovunque su $\mathcal{C}$ e $\mathbb{A}^1$. Osserviamo che l' applicazione ϕ associa al punto $q \in \mathcal{C}$ il coefficiente direttore della retta passante per il punto e l'origine.

Sia $x^n + y^n = 1$, $n \geq 3$ l'equazione della curva di Fermat $\mathcal{C}_n$.

Supponiamo che siano razionali allora i tre polinomi sooddisfano l'equazione

$$p(t)^n + q(t)^n + r(t)^n = 0 \tag{6.12}$$

Derivando rispetto a t si ottiene

$$p'(t)p(t)^{n-1} + q'(t)q(t)^{n-1} + r'(t)r(t)^{n-1} = 0 \tag{6.13}$$

Poiché $p(t), q(t), r(t)$ non hanno a due a due fattori in comune la matrice

$$\begin{pmatrix} p(t) & q(t) & r(t) \\ p'(t) & q'(t) & r'(t) \end{pmatrix} \tag{6.14}$$

ha rango due (quasi ovunque) e quindi la terna

$$(p(t)^{n-1}, q(t)^{n-1}, r(t)^{n-1})$$

è soluzione del sistema individuato da (6.18) e (6.19).

Conseguentemente

$$p(t)^{n-1} \quad \text{divide} \quad q(t)r'(t) - q'(t)r(t), \quad q(t)^{n-1} \quad \text{divide} \quad r(t)p'(t) - r'(t)p(t)$$

e $\quad r(t)^{n-1}$ divide $q(t)p'(t) - q'(t)p(t)$.

Posto $degp(t) = a \geq degq(t) = b \geq degr(t) = c$, abbiamo che $(n-1)a \leq b + c - 1 < 2a$; ciò contraddice l'ipotesi $n \geq 3$.

Esercizi

1. Costruire un morfismo birazionale tra $\mathbb{A}^1$ e la curva affine $\mathcal{C}$ di equazione $y^2 = x^2(x+1)$.

2. Dimostrare che ogni varietà di dimensione n è birazionalmente equivalente a una ipersuperficie di $\mathbb{A}^{n+1}$ o $\mathbb{P}^{n+1}$(Sugg. : usare il teorema dell'elemento primitivo)

3. Dimostrare che la quadrica

$$Q : X_0X_2 - X_1X_3 = 0 \subset \mathbb{P}^3$$

è birazionale a $\mathbb{P}^2$.

4. Verificare che l'applicazione $\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ data da

$$\psi([x_0, x_1, x_2]) = ([1/x_0, 1/x_1, 1/x_2]$$

è birazionale

5. Dimostrare che se $\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ è un morfismo birazionale, allora è un isomorfismo.

6. Dimostrare che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è birazionale a $\mathbb{P}^{n+m}$.

7. Dimostrare che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ non è isomorfo a $\mathbb{P}^2$.

8. Sia $\phi : X \to Y$un morfismo di varietà affini, verificare che ϕ è dominante iff ϕ^* è iniettivo.

Gli esercizi dal numero 9 al numero 12 contengono una dimostrazione del seguente
TEOREMA (BEZOUT) (6.21). *Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due curve proiettive piane prive di componenti in comune, allora*

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = (deg\mathcal{C})(deg\mathcal{D})$$

9. Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ due curve affin piane irreducibili, di equazioni $f(x,y) = 0$ e $g(x,y) = 0$ rispettivamente. Per ogni $p \in \mathbb{A}^2$, poniamo la molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ in p uguale a $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{p,\mathbb{A}^2}/ < f,g >$. Indichiamo questa molteplicità di intersezione con $i(\mathcal{C},\mathcal{D},p)$; verificare che

$$\sum_{p\in\mathbb{A}^2} i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x,y]/ < f,g > .$$

10. Verificare che $i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) < \infty \iff \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono distinte.
In particolare verificare che $i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) = 0 \iff p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

11. Sia $f = \prod_{i=1}^r f_i^{n_i}$ e $g = \prod_{j=1}^s g_j^{m_j}$ estendere la definizione in modo che si ottenga

$$i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) = \sum_{i,j} n_i m_j i(\mathcal{C}_i,\mathcal{D}_j,p)$$

con $\mathcal{C}_i = \mathcal{V}(f_i)$ e $\mathcal{D}_j = \mathcal{V}(g_j)$.

12. Dimostrare il teorema di Bezout (Sugg: usare la successione esatta

$$\mathbb{C}[x,y,z] \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[x,y,z]\times\mathbb{C}[x,y,z] \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[x,y,z] \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}[x,y,z]/ < F,G > \to 0$$

con $F = 0$, $G = 0$, equazioni delle curve , $\psi(A) = (GA, -FA)$ e $\phi(C,D) = CF + DG$.

13. Sia M l'ideale massimale associato a p e $n = \mu_p(\mathcal{C})$, $m = \mu_p(\mathcal{D})$; dimostrare l' esattezza della successione

$$\mathbb{C}[x,y]/M^m \times \mathbb{C}[x,y]/M^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[x,y]/M^{m+n} \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}[x,y]/ < M^{m+n}, f, g > \to 0$$

con $\psi(a,b) = af + bg$ e ϕ uguale alla proiezione.

14. Usare anche l'isomorfismo

$$\mathbb{C}[x,y]/ < M^{m+n}, f, g > \mathcal{O}_{p,\mathbb{A}^2}/ < M^{m+n}, f, g >$$

per verificare che $i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) \geq \mu_p(\mathcal{C})\mu_p(\mathcal{D})$.

15. Verificare che l' applicazione ψ è iniettiva se e solo se le tangenti in p di $\mathcal{C}$ sono distinte da quelle di $\mathcal{D}$.

16. Verificare inoltre che se l' applicazione ψ è iniettiva, allora $M^{n+m-1} \subset < f, g > \mathcal{O}_{p,\mathbb{A}^2}$.

17. Verificare che nell' esercizio 14 vale l'uguaglianza se e solo se le tangenti in p di $\mathcal{C}$ sono distinte da quelle di $\mathcal{D}$.

18. Sia $p \in \mathcal{C}$ non singolare, sia ord la valutazione associata al punto p, verificare che $i(\mathcal{C},\mathcal{D},p) = ord_p(g)$

19. Una linea l è tangente a una curva $\mathcal{C}$ se e solo se $i(\mathcal{C},l,p) > \mu_p(\mathcal{C})$.

20. Un punto non singolare in una curva $\mathcal{C}$ è di flesso se per la retta tangente l in p si ha $i(\mathcal{C},l,p) \geq 3$. Il flesso è ordinario se vale l'uguaglianza.

Sia $y - x^n$, l' equazione di $\mathcal{C}$, trovare per quali valori di n la curva ha un flesso nell' origine.

21. Sia $F(x_0,x_1,x_2) = 0$, l'equazione di una curva proiettiva piana $\mathcal{C}$ e sia $H(x_0,x_1,x_2) = 0$ il determinante della matrice quadrata di ordine 3 il cui elemento nel posto (i,j) è dato dalla derivata $\frac{\partial^2 F(x_0,x_1,x_2)}{\partial x_i \partial x_j}$. La curva $\mathcal{H}$ definita da $H(x_0,x_1,x_2) = 0$ è chiamata hessiana di $\mathcal{C}$. Verificare che $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{H}$ se e solo se p è un punto multiplo o un flesso di $\mathcal{C}$.

22. Verificare che una cubica piana non singolare ha 9 flessi ordinari.

23. Dimostrare che la curva proiettiva $\mathcal{C}$ di equazione $(X_0^2 + X_1^2)^2 - X_0^2X_2^2 + X_1^2X_2^2 = 0$ è razionale. (Sugg: considerare le coniche passanti per i 3 punti singolari di $\mathcal{C}$ aventi per tangente in $[0,0,1]$ una delle due tangenti principali)

7 Scoppiamenti

Un esempio importante di morfismo birazionale è lo scoppiamento di una varietà in un punto.

Ricordiamo che abbiamo trattato questo argomento già nel capitolo 2, ma, essendo questo un procedimento algebrico geometrico riteniamo importante riconsiderare questo processo.

Richiamiamo lo scoppiamento dello spazio affine $\mathbb{A}^n$ nell'origine O.

Siano $x_1, \ldots, x_n$ le coordinate di $\mathbb{A}^n$ e $y_1, \ldots, y_n$ le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^{n-1}$ (attenzione alla notazione); nella varietà quasi–proiettiva $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ consideriamo il sottinsieme chiuso X definito da

$$\{x_i y_j - x_j y_i = 0 | i, j = 1, \ldots, n\} \tag{7.1}$$

Procedendo in modo del tutto analogo al par.14 del Cap.2 otteniamo che l'applicazione

$$\alpha : X \to \mathbb{A}^n \tag{7.2}$$

ottenuta proiettando sul primo fattore è un morfismo di varietà.

Inoltre per ogni punto $P = (a_1, \ldots, a_n) \neq O$ si ha che $\alpha^{-1}(P)$ è un solo punto, infatti, posto $a_i \neq 0$, abbiamo che $(a_i/a_j)y_i = y_j$ e quindi $\alpha^{-1}(P) = ((a_1, \ldots, a_n) \times [a_1, \ldots, a_n])$.

Al contrario $\alpha^{-1}(O) \equiv \mathbb{P}^{n-1}$.

Quindi possiamo dire che X è stato ottenuto da $\mathbb{A}^n$ sostituendo il punto O con una copia delle direzioni delle rette passanti per O. Inoltre X è irreducibile poichè $\mathbb{A}^n - O$ loè ed è denso in X, quindi X è una varietà quasi–proiettiva.

Sia ora $Y \subset \mathbb{A}^n$ una sottovarietà affine passante per O, allora definiamo lo scoppiamento di Y nell' origine come

$$\tilde{Y} = \overline{\alpha^{-1}(Y - O)} \tag{7.3}$$

Chiaramente

$$\alpha : \tilde{Y} \to Y$$

è un morfismo birazionale; esso equivale ad un ingrandimento di Y intorno all' origine.

Cos\`ı come abbiamo scoppiato un punto nello spazio affine $\mathbb{A}^n$, possiamo, identificando lo spazio affine con l'aperto U_n, scoppiare il punto $[0, \ldots, 0, 1]$ dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$.

In questo caso il sottinsieme chiuso $X \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ sarà definito dalle stesse equazioni con la condizione che ora $x_1, \ldots, x_{n+1}$ (attenzione anche ora alla notazione) sono coordinate omogenee.

Osserviamo che in questo caso X risulta essere una varietà proiettiva e anche $\tilde{Y}$ è una varietà proiettiva se Y lo è. Quindi scoppiando più volte una varietà proiettiva si ottiene sempre una varietà proiettiva.

Lo scoppiamento, come vedremo in seguito, è uno strumento essenziale per la risoluzione delle singolarità di una varietà.

Concludiamo mostrando con un esempio come con un opportuno scoppiamento un' applicazione birazionale estende sulla varietà scoppiata a un morfismo. Sia $\pi : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proiezione sulle prime n coordinate, ricordiamo che questa è definita ovunque tranne che nel punto $[0, \ldots, 0, 1]$ (centro della proiezione). Sia ora $\beta : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ la proiezione sul secondo fattore, questo è un morfismo in cui la controimmagine di un punto è una retta proiettiva.

Si verifica immediatamente che in $X - \mathbb{P}^{n-1}$ l'applicazione β coincide con $\pi\alpha$ e quindi può interpretarsi come un' estensione dell' applicazione π.