

Capitolo 7

Le conseguenze dei teoremi di Stokes e di de Rham per le superfici di Riemann

Nella prima sezione di questo capitolo esporremo dei criteri di esattezza per le forme differenziali sulle superfici di Riemann, da cui segue la dualità tra la coomologia a supporto compatto e la coomologia di de Rham. In seguito introdurremo le funzioni e le forme differenziali meromorfe e verrà data una dimostrazione del teorema dei residui.

7.1 Due criteri di esattezza e la dualità di Poincaré

Vogliamo dimostrare dei criteri di esattezza per le forme differenziali su di una superficie di Riemann S , possibilmente non compatta. In effetti, in questa sezione, useremo solo il fatto che una superficie di Riemann è una superficie differenziabile orientabile. Incominciamo con il trattare le 1-forme differenziali su S . Faremo uso della seguente terminologia.

Definizione 1 *Sia S una superficie differenziabile. Un cammino chiuso $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow S$ si dice regolare a tratti se esiste un suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ di I tale che:*

1) *per ogni punto $p = \gamma(t)$, $t \neq t_j$, $j = 0, \dots, n$, esiste un disco parametrico (U, φ) intorno a p , con $\varphi(p) = 0$ avente la proprietà che*

$$\varphi(U \cap \text{Im } \gamma) = \{z \in \Delta \mid \text{Im } z = 0\} .$$

2) *Se $p_j = \gamma(t_j)$, $j = 0, \dots, n$, esiste un disco parametrico (U_j, φ_j) intorno a p_j tale che*

$$\varphi_j(U_j \cap \text{Im } \gamma) = \{z \in \Delta \mid \text{Re } z \geq 0, \text{Im } z = 0\} \cup \{z \in \Delta \mid z = \rho e^{i\theta_j}\}$$

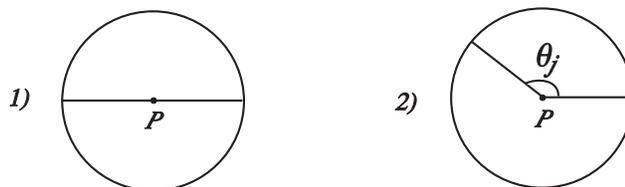


Fig.1

Lemma dell' Intorno Tubolare 1 Sia S una superficie differenziabile orientata. Sia $\gamma : I \rightarrow S$ una curva chiusa regolare. Allora esiste una regione G tale che

1. $G \supset \Gamma = \text{Im } \gamma$
2. $G \setminus \Gamma = G^+ \cup G^-$ con G^+ e G^- connessi e $G^+ \cap G^- = \emptyset$
3. \overline{G} è compatto.

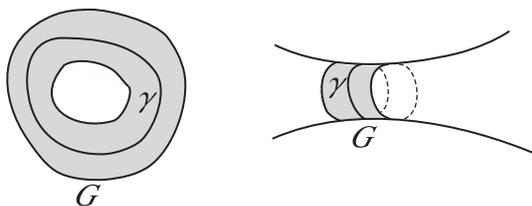


Fig.2

Dim. Per compattezza si può ricoprire Γ con un numero finito di carte locali del tipo descritto nella definizione di curva regolare. Non solo, si può anche assumere che due carte del tipo 2) abbiano sempre intersezione vuota e che se due carte U e V si intersecano allora $U \cap V \cap \Gamma \neq \emptyset$ e $U \cap V \setminus U \cap V \cap \Gamma$ sia unione di due componenti connesse.

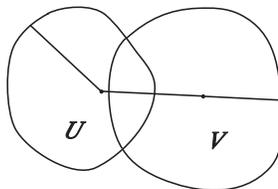


Fig.3

Siano $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i = 1, \dots, k$ queste carte locali. Fissata una di queste carte, chiamiamola (U, φ) , in ogni punto z di $\varphi(\Gamma \cap U)$, eccetto al più uno, si può considerare un vettore normale \vec{V}_z a Γ che, insieme con un vettore tangente \vec{t}_z

a Γ in z (il cui verso è determinato dal verso di percorrenza di γ), formi una base positivamente orientata di \mathbb{C} nel punto z

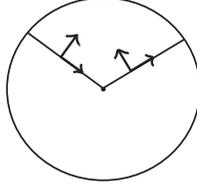


Fig.4

Questi vettori (ne basta uno) determinano una componente connessa Δ^+ di $\Delta \setminus \varphi(\Gamma)$. Chiameremo l'altra Δ^- . Poniamo

$$\begin{aligned} G &= \cup_i U_i, & U_i^+ &= \varphi_i^{-1}(\Delta^+), & U_i^- &= \varphi_i^{-1}(\Delta^-), \\ G^+ &= \cup_i U_i^+, & G^- &= \cup_i U_i^- \end{aligned}$$

Si ha che $G \supset \Gamma$ e $G \setminus \Gamma = G^+ \cup G^-$. Se non fosse $G^+ \cap G^- = \emptyset$, esisterebbero due carte (U, φ) e (V, ψ) tra le $\{(U_i, \varphi_i)\}$ tali che $U^+ \cap V^- \neq \emptyset$. Ma ciò è assurdo perché $\psi\varphi^{-1}$ è un diffeomorfismo che conserva l'orientazione, e che porta vettori tangenti a $\varphi(\Gamma)$ in vettori tangenti a $\psi(\Gamma)$. Dunque $G^+ \cap G^- = \emptyset$. Per costruzione \bar{G} è compatto. Si lascia al lettore la verifica del fatto che sia G^+ che G^- sono connessi.

Q. E. D.

Lemma 1 *Sia γ una curva chiusa regolare su di una superficie di Riemann S . Allora esiste una 1-forma chiusa a supporto compatto $\omega_\gamma \in \mathcal{E}^1(S)$ tale che per ogni 1-forma chiusa $\varphi \in \mathcal{E}^1(S)$.*

$$\int_S \omega_\gamma \wedge \varphi = \int_\gamma \varphi$$

Dim. Sia G la regione costruita nel lemma precedente. Siano A e B intorni di $\Gamma = \text{Im } \gamma$ tali che $\bar{A} \subset B \subset \bar{B} \subset G$. Siano $A^+ = A \cap G^+$, $B^+ = B \cap G^+$ e sia $f \in \mathcal{E}^0(G^+)$ un funzione identicamente uguale a 1 in A e identicamente uguale a 0 in $G^+ \setminus B^+$, (la si costruisce con una partizione dell'unità)

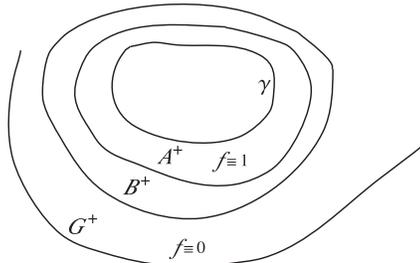


Fig.5

Poniamo

$$\omega_\gamma = \begin{cases} df & \text{in } G^+ \\ 0 & \text{in } S \setminus G^+ \end{cases} \quad (1.1)$$

Essendo $f \equiv 1$ in A^+ e $f \equiv 0$ in $G^+ \setminus B^+$, ω_γ è una 1-forma C^∞ chiusa e a supporto compatto. Per il teorema di Stokes, e per la chiusura di φ , si ha

$$\begin{aligned} \int_S \omega_\gamma \wedge \varphi &= \int_{G^+} \omega_\gamma \wedge \varphi \\ &= \int_{G^+} df \wedge \varphi \\ &= \int_{G^+} d(f\varphi) \\ &= \int_{\partial G^+} f\varphi \\ &= \int_\gamma \varphi \end{aligned}$$

Q. E. D.

Criterio di esattezza per le 1-forme 1 *Sia S una superficie di Riemann e $\varphi \in \mathcal{E}^1(S)$. Allora φ è esatta se e solo se, per ogni 1-forma chiusa ω a supporto compatto si ha*

$$\int_S \varphi \wedge \omega = 0$$

Dim. Se $\varphi = df$ e ω è chiusa allora $df \wedge \omega = d(f\omega)$. Dunque se G è una regione regolare in S contenente al suo interno il supporto di ω si ha

$$\int_S \varphi \wedge \omega = \int_G d(f\omega) = \int_{\partial G} f\omega = 0 .$$

Viceversa, prendendo ω_γ come nel lemma precedente, si ha che per ogni cammino chiuso regolare γ

$$\int_\gamma \varphi = 0 . \quad (1.2)$$

Fissiamo $P_0 \in S$, e definiamo, per ogni $P \in S$

$$f(P) = \int_{P_0}^P \varphi$$

dove l'integrazione è effettuata lungo un cammino regolare con punto iniziale P_0 e punto finale P . In virtù della (1.2) la definizione è ben posta e si ha

$$df = \varphi$$

Q. E. D.

Consideriamo ora le 2-forme differenziali. Denoteremo con il simbolo $\mathcal{E}^k(S, \mathbb{C})_{comp}$ lo spazio delle k -forme complesse su S a supporto compatto.

Lemma 2 Sia $R = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| < 1, |y| < 1 \right\}$. Sia $\mu \in \mathcal{E}^2(R)_{comp}$ allora esiste $\alpha \in \mathcal{E}^1(R)_{comp}$ tale che $d\alpha = \mu$, se e solo se

$$\int_R \mu = 0 . \quad (1.3)$$

Dim. Una implicazione segue immediatamente dal teorema di Stokes. Supponiamo ora di partire dalla (1.3). Scriviamo

$$\mu = -f(x, y)dx \wedge dy$$

poniamo

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y f(x, t)dt .$$

Si ha che

$$d(F dx) = \mu ,$$

però F non ha supporto compatto. Se $y \geq 1$

$$F(x, y) = F(x, 1) , \quad F(-1, 1) = F(1, 1) ,$$

inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, 1)dx = \int_{-1}^1 F(x, 1)dx = \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)dxdt = - \int_R \mu = 0 .$$

Poniamo

$$G(x) = \int_{-1}^x F(\xi, 1)d\xi .$$

Il supporto di G è contenuto in $[-1, 1]$. Inoltre

$$dG = F(x, 1)dx = F(x, y)dx$$

se $y \geq 1$. Sia $H(y)$ una funzione identicamente nulla per $y < -1$ e identicamente uguale a 1 per $y \geq 1$. Poniamo

$$\alpha = F dx - d(G(x)H(y)) .$$

Si verifica allora che $d\alpha = \mu$ e che il supporto di α è contenuto in R .

Q. E. D.

Criterio di esattezza per le 2-forme a supporto compatto 1 *Sia S una superficie di Riemann e $\mu \in \mathcal{E}^2(S)_{comp}$. Allora esiste $\alpha \in \mathcal{E}^1(S)_{comp}$ tale che $d\alpha = \mu$ se e solo se*

$$\int_S \mu = 0$$

Dim. Una implicazione discende dal teorema di Stokes. Si consideri un ricoprimento finito del supporto di μ fatto di aperti V_1, \dots, V_n . Si assuma inoltre che ogni V_i sia preimmagine di un quadrato di centro l'origine e lato di lunghezza 2 tramite una carta locale. Si assuma infine che $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$. Sia ρ_i una partizione dell' unità relativa a questo ricoprimento. Poniamo $\mu_i = \rho_i \mu$. Sia μ_{12} una 2-forma con supporto in $V_1 \cap V_2$ t.c.

$$\int_{V_1} \mu_1 + \mu_{12} = 0, \quad (1.4)$$

sia μ_{23} una 2-forma con supporto in $V_2 \cap V_3$ t.c.

$$\int_{V_2} (\mu_2 - \mu_{12} + \mu_{23}) = 0. \quad (1.5)$$

Procedendo così si definisce $\mu_{i,i+1}$, con supporto in $V_i \cap V_{i+1}$, per ogni $i = 1, \dots, n-1$, in modo che

$$\int_{V_i} (\mu_i - \mu_{i-1,i} + \mu_{i,i+1}) = 0. \quad (1.6)$$

In definitiva

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \mu \\ &= \int_S (\mu_1 + \mu_{12}) + \int_S (\mu_2 - \mu_{12} + \mu_{23}) \\ &+ \dots + \int_S (\mu_{n-1} - \mu_{n-2,n-1} + \mu_{n-1,n}) + \int_S (\mu_n - \mu_{n-1,n}) \\ &= \int_S (\mu_n - \mu_{n-1,n}) \\ &= \int_{V_n} (\mu_n - \mu_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Dunque per il lemma precedente esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $\text{supp}(\alpha_i) \subset V_i$ e

$$\begin{aligned} d\alpha_1 &= \mu_1 + \mu_{12} \\ d\alpha_i &= \mu_i - \mu_{i-1,i} + \mu_{i,i+1} \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ d\alpha_n &= \mu_n - \mu_{n-1,n} \end{aligned}$$

Ponendo $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, si ha $d\alpha = \mu$.

Q. E. D.

Ritorniamo alla dimostrazione che abbiamo appena fatto. Supponiamo di partire da una qualsiasi forma $\mu \in \mathcal{E}^2(S)$ e che S non sia compatta. Scegliamo un ricoprimento localmente finito di S fatto di aperti V_1, V_2, \dots tali che $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ e aventi le stesse proprietà di quelli introdotti nella dimostrazione precedente. Definiamo le forme $\mu_{i,i+1}$ $i = 1, 2, \dots$ come nelle (1.4), (1.5) e (1.6). Di nuovo troveremo forme α_i il cui supporto è in V_i e tali che

$$d\alpha_i = \mu_i - \mu_{i-1,i} + \mu_{i,i+1} \quad , \quad (\mu_{0,1} = 0)$$

$i = 1, 2, \dots$. Essendo il ricoprimento $\{V_i\}$ localmente finito, ha buon senso considerare la 1-forma

$$\alpha = \sum \alpha_i .$$

Si ha allora che $d\alpha = \mu$. Abbiamo dunque dimostrato la seguente Proposizione

Proposizione 1 *Sia S una superficie di Riemann non compatta allora*

$$H_{dR}^2(S) = 0 .$$

I criteri di esattezza per le 1-forme che abbiamo dimostrato all'inizio di questa sezione conducono direttamente alla cosiddetta dualità di Poincaré, di cui ora parleremo. Definiamo innanzitutto la coomologia a supporto compatto ponendo

$$H^k(S)_{comp} = Z^k(S)_{comp} / B^k(S)_{comp}$$

dove

$$\begin{aligned} Z^k(S)_{comp} &= \{ \omega \in \mathcal{E}^k(S)_{comp} \mid d\omega = 0 \} \\ B^k(S)_{comp} &= \{ \omega \in \mathcal{E}^k(S)_{comp} \mid d\varphi = \omega, \varphi \in \mathcal{E}^{k-1}(S)_{comp} \} . \end{aligned}$$

Possiamo ora definire una forma bilineare

$$P_1 : H^1(S)_{comp} \times H_{dR}^1(S) \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Ponendo

$$P_1([\omega], [\varphi]) = \int_S \omega \wedge \varphi$$

Che la forma sia ben definita è immediato: supponiamo $\omega = df$ con f a supporto compatto. Essendo φ chiusa si ha $\omega \wedge \varphi = d(f\varphi)$ ed essendo il supporto di f compatto si ha

$$\int_S d(f\varphi) = 0 .$$

Se $\varphi = dg$, di nuovo per la chiusura di ω e per il fatto che ω ha supporto compatto si ha

$$\int_S \omega \wedge \varphi = \int_S d(g\omega) = 0 .$$

La bilinearità di P_1 è ovvia. La forma bilineare P_1 induce un' applicazione iniettiva

$$P : H_{dR}^1(S) \rightarrow H^1(S)_{comp}^*.$$

L' iniettività, o equivalentemente il fatto che $\int_S \omega \wedge \varphi = 0$, per ogni ω in $H^1(S)_{comp}$ implichi che $[\varphi] = 0 \in H_{dR}^1(S)$, è esattamente il contenuto del lemma (1.4). Abbiamo dimostrato il seguente teorema

Dualità di Poincaré 1 *Sia S una superficie di Riemann compatta, allora la forma bilineare P è non degenera.*

Questo che abbiamo dimostrato è un caso molto particolare della dualità di Poincaré, ma è sufficiente per i nostri scopi. Negli esercizi dimostremo la dualità di Poincaré per varietà orientabili di tipo finito.

Terminiamo questa sezione con alcune considerazioni riguardanti il caso di una superficie di Riemann compatta. Sia dunque S una superficie di Riemann compatta di genere g . La dualità di de Rham ci dà un isomorfismo

$$\begin{aligned} H_1(S, \mathbb{R}) &\rightarrow H_{dR}^1(S)^* \\ [\gamma] &\longmapsto \left\{ \varphi \mapsto \int_{\gamma} \varphi \right\}. \end{aligned}$$

La dualità di Poincaré ci dà un isomorfismo

$$\begin{aligned} H_{dR}^1(S) &\longrightarrow H_{dR}^1(S)^* \\ \omega &\longmapsto \left\{ \varphi \mapsto \int_S \omega \wedge \varphi \right\}. \end{aligned}$$

Denotiamo con \mathcal{P} l'isomorfismo composto

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H_1(S, \mathbb{R}) &\longrightarrow H_{dR}^1(S) \\ [\gamma] &\longmapsto \mathcal{P}(\gamma). \end{aligned}$$

Dunque la forma $\mathcal{P}(\gamma)$ è caratterizzata, a meno di forme esatte, dalla proprietà:

$$\int_{\gamma} \varphi = \int_S \mathcal{P}(\gamma) \wedge \varphi \quad , \quad \forall [\varphi] \in H_{dR}^1(S).$$

Nel caso in cui γ è una curva chiusa regolare, abbiamo dato una costruzione esplicita di $\mathcal{P}(\gamma)$. Lo abbiamo fatto nel Lemma (1.4) e usando quella notazione possiamo ora dire che

$$\mathcal{P}([\gamma]) = [\omega_{\gamma}]$$

La dualità di Poincaré consente di definire il numero di intersezione tra classi in $H_1(S, \mathbb{R})$ precisamente date due classi $[\gamma], [\gamma'] \in H_1(S, \mathbb{R})$. Si definisce

$$([\gamma], [\gamma']) = \int_S \mathcal{P}(\gamma) \wedge \mathcal{P}(\gamma') = \int_{\gamma} \mathcal{P}(\gamma') = - \int_{\gamma'} \mathcal{P}(\gamma)$$

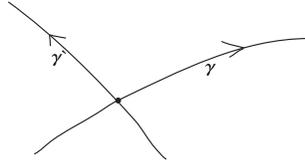


Fig.6

Il prodotto di intersezione è bilineare e antisimmetrico

$$([\gamma], [\gamma']) = -([\gamma'], [\gamma])$$

Consideriamo la base di $H_1(S, \mathbb{R})$ di S data dai cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \gamma_{g+1}, \dots, \gamma_{2g}$ qui raffigurati

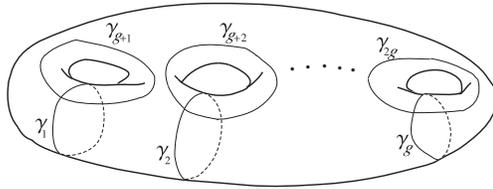


Fig.7

Calcoliamo la matrice di intersezione

$$J = (([\gamma_i], [\gamma_j]))_{i,j=1,\dots,2g} .$$

Per definizione dobbiamo calcolare

$$\int_S \omega_{\gamma_i} \wedge \omega_{\gamma_j} .$$

Ricordandosi come sono stati costruiti gli ω_{γ_i} , si vede che se $j \neq i, g + i$ allora

$$\text{supp}(\omega_{\gamma_i}) \cap \text{supp}(\omega_{\gamma_j}) = \emptyset$$

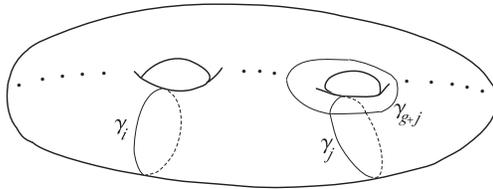


Fig.8

Se $j = i$, si osservi che si può prendere γ'_i omologo a γ_i e tale che

$$\text{supp}(\omega_{\gamma_i}) \cap \text{supp}(\omega_{\gamma'_i}) = \emptyset$$

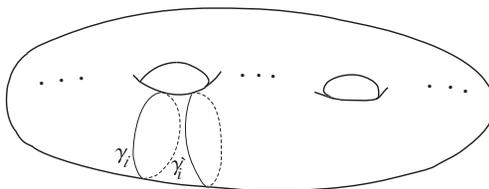


Fig.9

Per la dualità di Poincaré, $\omega_{\gamma'_i}$ e ω_{γ_i} differiscono per un differenziale esatto. In definitiva

$$\int_S \omega_{\gamma_i} \wedge \omega_{\gamma_j} = 0 \quad \text{per } j \neq i + g .$$

Per $j = i + g$, usando le notazioni del lemma 1.4 si ha

$$\begin{aligned} \int_S \omega_{\gamma_i} \wedge \omega_{\gamma_j} &= \int_R d(f_i d f_j) \\ &= \int_{\partial R} f_i d f_j \\ &= \int_L d f_j + \int_{M'} d f_j \\ &= f_j(a) - f_j(b) \\ &= -1 . \end{aligned}$$

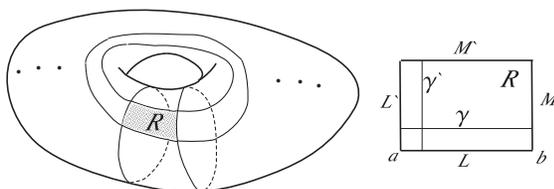


Fig.10

$$\begin{aligned} f_i &\equiv 1 \text{ su } L' \\ f_i &\equiv 0 \text{ su } M \\ f_j &\equiv 0 \text{ su } M' \\ f_j &\equiv 1 \text{ su } L \end{aligned}$$

In definitiva per la matrice J si ha:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} .$$

Esercizi

Gli esercizi dal numero 1. al numero 6. conducono a una dimostrazione della dualità di Poincaré per varietà di tipo finito

1. Verificare che

$$H^k(\mathbb{R}^1)_{comp} \cong \begin{cases} 0 & k \neq 1 \\ \mathbb{R} & k = 1 \end{cases}. \quad (1.7)$$

Dedurre che la coomologia a supporto compatto non è invariante per omotopia.

2. Verificare che

$$H^k(\mathbb{R}^n)_{comp} \cong \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathbb{R} & k = n \end{cases}. \quad (1.8)$$

3. Verificare che il funtore \mathcal{E}_{comp}^k è covariante per inclusione di aperti (e controvariante per applicazioni proprie).

4. Verificare che la successione

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^k(U \cap V)_{comp} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}^k(U)_{comp} \oplus \mathcal{E}^k(V)_{comp} \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}^k(U \cup V)_{comp} \rightarrow 0$$

definita da

$$\alpha(\omega) = (\omega, -\omega), \quad \beta(\omega, \varphi) = (\omega + \varphi).$$

è esatta. Dedurre la successione di Mayer-Vietoris per la coomologia a supporto compatto e il fatto che la coomologia a supporto compatto delle varietà di tipo finito ha dimensione finita.

5. Sia M una varietà orientata di dimensione n verificare che è ben definita la forma bilineare

$$P_k : H^{n-k}(M)_{comp} \times H_{dR}^k(M) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

data da

$$P_k([\omega], [\varphi]) = \int_M \omega \wedge \varphi$$

6. Sia M una varietà orientata e di dimensione n . Verificare la commutatività (a meno di un segno) del diagramma (in cui $l = n - k$)

$$\begin{array}{ccccccccc} H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(U \cup V) & \longrightarrow & H^{k+1}(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \\ \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P & & \downarrow P \\ H^l(U \cap V)^* & \longrightarrow & H^l(U)^* \oplus H^l(V)^* & \longrightarrow & H^l(U \cup V)^* & \longrightarrow & H^{l-1}(U \cap V)^* & \longrightarrow & H^{l-1}(U)^* \oplus H^{l-1}(V)^* \end{array}$$

dove la prima riga orizzontale è la successione di Mayer–Vietoris in coomologia a supporto compatto, la seconda riga orizzontale è la duale della successione di Mayer–Vietoris in coomologia di deRham, mentre le frecce verticali sono indotte dalle forme bilineari P_k . Dedurre l'isomorfismo tra $H^{n-k}(M)_{comp}$ e $H_{dR}^k(M)$ nel caso in cui la varietà M sia di tipo finito.

7. Calcolare la coomologia a supporto compatto di S^n .
8. Calcolare la coomologia a supporto compatto del nastro di Moebius.

1.2 **Forme differenziali complesse**

Sia S una superficie di Riemann. Facciamo innanzi tutto vedere che S è una varietà orientabile. Se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte della struttura analitica di S , allora $F = \psi\varphi^{-1}$ è una funzione olomorfa

$$\mathbb{C} \supset \varphi(U \cap V) \xrightarrow{F} \psi(U \cap V) \subset \mathbb{C} .$$

Scriviamo

$$F(z) = u(x, y) + i v(x, y) .$$

Si ha e dunque per le equazioni di Cauchy–Riemann,

$$\det J_F = u_x^2 + v_x^2 > 0 .$$

D'ora in poi considereremo campi vettoriali forme differenziali e funzioni complesse. Porremo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(S, \mathbb{C}) &= \{f : S \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ è } C^\infty\} \\ \mathcal{V}(S, \mathbb{C}) &= \{\text{Derivazioni di } \mathcal{E}^0(S, \mathbb{C})\} \\ \mathcal{E}^k(S, \mathbb{C}) &= A_k(\mathcal{V}(S, \mathbb{C})) \end{aligned}$$

Ricordiamo le notazioni introdotte adattandole al caso delle superfici di Riemann. Incominciando col caso locale e cioè quando $S = \mathbb{C}$. I campi vettoriali *complessi* su \mathbb{C} sono del tipo

$$a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} ,$$

dove a e b , sono funzioni C^∞ a valori complessi. Le 1-forme differenziali complesse sono quelle del tipo

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy ,$$

di nuovo con p e q funzioni in C^∞ complesse. Le 2-forme differenziali sono del tipo

$$\mu(x, y) dx \wedge dy ,$$

con μ funzione C^∞ complessa. Ovviamente non ci sono k -forme per $k \geq 2$. Dal momento che si hanno le trasformazioni di coordinate

$$\begin{aligned} z &= x + i y , \\ \bar{z} &= x - i y , \end{aligned}$$

e le loro inverse

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) , \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) , \end{aligned}$$

si possono esprimere campi vettoriali, e forme differenziali in queste coordinate e si hanno le formule

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) , & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ dz &= dx + i dy , & d\bar{z} &= dx - i dy \end{aligned}$$

$$dz \wedge d\bar{z} = 2i dx \wedge dy .$$

Dunque i campi vettoriali e le forme differenziali complesse possono anche scriversi nella forma

$$\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}} , \quad f dz + g d\bar{z} , \quad h dz \wedge d\bar{z}$$

con α, β, f, g, h le funzioni C^∞ a valori complessi. Data una funzione C^∞ complessa $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} . \end{aligned}$$

Si definisce

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz , \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} ,$$

col che

$$d = \partial + \bar{\partial} .$$

Data una 1-forma differenziale

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \in \mathcal{E}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) ,$$

si ha

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} .$$

Passiamo ora al caso globale. Sia $\{(U, \varphi)\}$ un ricoprimento con carte locali di una superficie di Riemann S . Una 1-forma differenziale complessa $\omega \in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C})$ è il dato di una 1-forma complessa

$$\omega_U = f_U dz + g_U d\bar{z} \in \mathcal{E}^1(\varphi(U), \mathbb{C})$$

per ogni carta locale (U, φ) , soggetto alla condizione, che se

$$\omega_V = f_V dw + g_V d\bar{w} \in \mathcal{E}^1(\psi(V), \mathbb{C})$$

allora, in $\varphi(U \cap V)$ si ha:

$$\begin{aligned} f_U &= f_V \frac{\partial w}{\partial z} + g_V \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = f_V \frac{\partial w}{\partial z} \\ g_U &= g_V \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + g_V \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = g_V \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Qui abbiamo scritto

$$\psi\varphi^{-1}(z) = w(z)$$

e ci siamo ricordati che $w = \psi\varphi^{-1}$ è una funzione olomorfa di z , e dunque

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

Naturalmente la (2.1) esprime la condizione

$$\varphi^* \omega_U = \psi^* \omega_V$$

in $U \cap V$.

In modo analogo una 2-forma complessa $\mu \in \mathcal{E}^2(S, \mathbb{C})$ è il dato di una 2-forma complessa

$$\mu_U = h_U dz \wedge d\bar{z} \in \mathcal{E}^2(\varphi(U), \mathbb{C})$$

per ogni carta locale (U, φ) , tale che, in $\varphi(U \cap V)$,

$$h_U = \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right|^2 h_V .$$

Ritorniamo alla formula (2.1). Essa ci dice che la matrice della trasformazione che ci porta dalla ω_U alla ω_V è *diagonale*:

$$\begin{pmatrix} f_U \\ g_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_V \\ g_V \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Gli autospazi hanno quindi significato intrinseco indipendente dalle coordinate. Vi è una maniera operatoriale per dire ciò. Definiamo un operatore

$$* : \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C})$$

nella seguente maniera. Sia

$$\omega = \{\omega_U\} = \{f_U dz + g_U d\bar{z}\}$$

e poniamo

$$*\omega = \{*\omega_U\} = \{-if_U dz + ig_U d\bar{z}\}. \quad (2.3)$$

per verificare che $*\omega$ è una ben definita 1-forma differenziale dobbiamo verificare che in $\varphi(U \cap V)$ si ha

$$\begin{pmatrix} -if_U \\ ig_U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -if_V \\ ig_V \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Ma questo segue banalmente dalla (2.2). L'operatore $*$ è dunque ben definito. Esso gode della proprietà

$$** = -1$$

che si verifica immediatamente guardando l'espressione locale di $*$.

Poniamo ora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{1,0}(S) &= \{\omega \in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) \mid *\omega = -i\omega\} \\ \mathcal{E}^{0,1}(S) &= \{\omega \in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) \mid *\omega = i\omega\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Chiaramente

$$\begin{aligned} \omega &= \{\omega_U\} \in \mathcal{E}^{1,0}(S) \iff \omega_U = f_U dz \\ \omega &= \{\omega_U\} \in \mathcal{E}^{0,1}(S) \iff \omega_U = g_U d\bar{z}. \end{aligned}$$

Gli elementi di $\mathcal{E}^{1,0}(S)$ si chiamano le (1,0)-forme, sono quelle che localmente si scrivono solo in termini di dz , quelli di $\mathcal{E}^{0,1}(S)$ si chiamano le (0,1)-forme e coinvolgono solo $d\bar{z}$. È da osservare ancora che tutto ciò non si sarebbe potuto fare con le coordinate x, y perchè la matrice jacobiana in questo caso non sarebbe stata diagonale. Si ha dunque una decomposizione

$$\mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) = \mathcal{E}^{1,0}(S) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(S). \quad (2.6)$$

Questa decomposizione è una conseguenza della struttura analitica di S .

Data una funzione $f \in \mathcal{E}^0(S)$ e posto, per ogni carta locale (U, φ) ,

$$f_U = f\varphi^{-1}.$$

Definiamo

$$\begin{aligned} df &\in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}), \\ \partial f &\in \mathcal{E}^{1,0}(S), \\ \bar{\partial} f &\in \mathcal{E}^{0,1}(S), \end{aligned}$$

ponendo

$$\begin{aligned} df &= \{df_U\} = \left\{ \frac{\partial f_U}{\partial z} dz + \frac{\partial f_U}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right\} , \\ \partial f &= \{\partial f_U\} = \left\{ \frac{\partial f_U}{\partial z} dz \right\} , \\ \bar{\partial} f &= \{\bar{\partial} f_U\} = \left\{ \frac{\partial f_U}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right\} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Col che $d = \partial + \bar{\partial}$. Possiamo poi definire il complesso di de Rham su \mathbb{C} :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(S, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(S, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 ,$$

e i relativi gruppi di coomologia di de Rham

$$H_{dR}^k(S, \mathbb{C}) = Z_{dR}^k(S, \mathbb{C}) / B_{dR}^k(S, \mathbb{C}) ,$$

dove

$$\begin{aligned} Z_{dR}^k(S, \mathbb{C}) &= \{k - \text{forme complesse chiuse}\} , \\ B_{dR}^k(S, \mathbb{C}) &= \{k - \text{forme complesse esatte}\} . \end{aligned}$$

Dalle definizioni segue che

$$H_{dR}^k(S, \mathbb{C}) = H_{dR}^k(S) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} . \quad (2.8)$$

Dato un aperto $U \subseteq S$ denotiamo come al solito con il simbolo $\mathcal{O}(U)$ l'anello delle funzioni analitiche in U .

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ analitica}\} \quad (2.9)$$

Definiamo ora le funzioni meromorfe. Dato un punto p e una carta locale (U, φ) intorno a p con $\varphi(p) = 0$, diremo che la funzione $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{p\})$ ha in p un *polo* (risp. *uno zero di ordine n*) in p se $f\varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\varphi(U) \setminus \{0\})$ ha nel punto 0 un polo (risp. zero) di ordine n . La definizione è ben posta, perchè se ψ è un'altra carta locale allora $\psi\varphi^{-1}(z)$ è bianalitica e quindi

$$\nu_0(f\varphi^{-1}) = \nu_0(f\psi^{-1}\psi\varphi^{-1}) = \nu_0(f\psi^{-1}) .$$

Dato un aperto $U \subseteq S$ diremo che f è meromorfa in U se per ogni carta locale (V, φ) con $V \subset U$ $f\varphi^{-1}$ è una funzione meromorfa in $\varphi(V)$. Denoteremo con $\mathcal{M}(U)$ l'anello delle funzioni meromorfe in U . Abbiamo quindi

$$\mathcal{E}^0(U, \mathbb{C}) \supset \mathcal{O}(U) \subset \mathcal{M}(U) . \quad (2.10)$$

Nel caso in cui $U \subseteq S$ è un *aperto connesso* il teorema di continuazione analitica ci dice che gli zeri di una funzione meromorfa non nulla $f \in \mathcal{M}(U)$ sono isolati e dunque $\mathcal{M}(U)$ è un *campo*. Passiamo ora alle forme differenziali. Sia

$$\omega = \{\omega_U\} \in \mathcal{E}^1(S, \mathbb{C}) ,$$

diremo che ω è una 1-forma *olomorfa* in S se

$$\omega_U = f_U dz , \text{ e } f_U \text{ è olomorfa in } \varphi(U) .$$

Denoteremo con il simbolo $\Omega^1(S)$ lo spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe in S . Si ha

$$\Omega^1(S) = \{ \omega \in \mathcal{E}^{1,0}(S) \mid d\omega = 0 \} , \quad (2.11)$$

infatti

$$d\omega_U = 0 \iff -\frac{\partial f_U}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = 0 \iff \frac{\partial f_U}{\partial \bar{z}} = 0 .$$

Facciamo ora la seguente osservazione. In un disco parametrico U un differenziale olomorfo si scrive nella forma $f dz$ con f olomorfa. Come si è visto questo vuol dire che $d(f dz) = 0$. D'altro canto, in un disco ogni forma chiusa è anche esatta e quindi esiste una funzione differenziabile $g \in \mathcal{E}^0(U, \mathbb{C})$ tale che

$$dg = f dz .$$

Ciò vuol dire che

$$\frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = f dz .$$

Se ne deduce che $\partial g / \partial \bar{z} = 0$, e cioè che g è olomorfa in U e che

$$f dz = \partial g .$$

In definitiva possiamo anche scrivere

$$\Omega^1(S) = \{ \omega = \{ \omega_U \} \in \mathcal{E}^{1,0}(S) \mid \omega_U = \partial g_U, g_U \in \mathcal{O}(U) \} . \quad (2.12)$$

Definiamo ora le 1-forme meromorfe. Una 1-forma meromorfa è una collezione

$$\omega = \{ \omega_U \}$$

dove

$$\omega_U = f_U dz , \text{ } f_U \text{ meromorfa in } \varphi(U) .$$

Dato un punto $p \in S$ è una carta locale U, φ intorno a p con $\varphi(p) = 0$ diremo che ω ha in p uno zero, (risp. un polo) di ordine n se f_U ha uno zero, (risp. un polo) di ordine n in 0 . La definizione è ben posta perché, se

$$\begin{aligned} \omega_U &= f_U dz , \\ \omega_V &= f_V dw , \end{aligned}$$

allora

$$f_U = \frac{dw}{dz} f_V ,$$

e dunque

$$\nu_0(f_U) = \nu_0(f_V) .$$

Denoteremo con il simbolo $\Omega_{mero}^1(S)$ lo spazio vettoriale dei differenziali meromorfi su S .

LEMMA (2.12). *Sia $\omega \in \Omega_{mero}^1(S)$ un differenziale non-nullo si ha*

$$\Omega_{mero}^1(S) = \mathcal{M}(S) \cdot \omega$$

ovvero ogni forma differenziale meromorfa ω' può scriversi nella forma $\omega' = f\omega$ con $f \in \mathcal{M}(S)$.

Dim. Data $f \in \mathcal{M}(S)$ è chiaro che $f\omega \in \Omega_{mero}^1(S)$. Sia $\omega = \{f_U dz\}$ e $\omega' = \{g_U dz\}$. In $\varphi(U \cap V)$ si ha

$$f_U = \frac{dw}{dz} f_V \quad , \quad g_U = \frac{dw}{dz} g_V .$$

Ne segue che in $\varphi(U \cap V)$ si ha

$$\frac{g_U}{f_U}(z) = \frac{g_V}{f_V}(w(z)) \tag{2.13}$$

dove

$$w(z) = \psi\varphi^{-1}(z) .$$

La condizione (2.13) può quindi riscriversi nella forma

$$\varphi^* \left(\frac{g_U}{f_U} \right) = \psi^* \left(\frac{g_V}{f_V} \right)$$

e perciò le funzioni meromorfe g_U/f_U definiscono una funzione meromorfa globale $f \in \mathcal{M}(S)$ tale che

$$f\varphi^{-1} = \frac{g_U}{f_U} .$$

Inoltre per costruzione si ha

$$f\omega = \omega' .$$

Q. E. D.

Sia ora $G \subset S$ una regione regolare, p un punto di G e ω una forma meromorfa in G , olomorfa in $G \setminus \{p\}$ e C^∞ in un intorno di ∂G . Definiamo

$$\text{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega . \tag{2.14}$$

Per verificare che la definizione è ben posta, che non dipende cioè dalla regione regolare scelta, osserviamo che basta dimostrare che

$$\int_{\partial G} \omega = \int_{\partial \Gamma} \omega$$

non appena $\bar{\Gamma} \subset G$. Date infatti due regioni regolari G e G' contenenti p se ne può trovare sempre un'altra Γ , per esempio un piccolo disco parametrico di

centro p con $\bar{\Gamma} \subset G \cap G'$. Supponiamo dunque che la chiusura di Γ sia contenuta in G . In questo caso $G \setminus \bar{\Gamma}$ è una regione regolare e ω vi è olomorfa. In particolare $d\omega = 0$ in $G \setminus \bar{\Gamma}$. Si ha quindi, per il teorema di Stokes

$$0 = \int_{G \setminus \Gamma} d\omega = \int_{\partial G} \omega - \int_{\partial \Gamma} \omega$$

come si voleva.

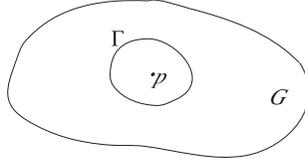


Fig.11

Come si è osservato si può prendere come regione regolare l'interno di un disco $\Delta \subset \mathbb{C}$ di centro 0 in una carta locale (U, φ) con $\varphi(p) = 0$. Se

$$\omega_U = (\varphi^{-1})^* \omega = f_U dz .$$

Si ha

$$\text{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \varphi^{-1}(\Delta)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f_U dz = \text{Res}_0 f_U dz . \quad (2.15)$$

Diamo subito una applicazione di questa formula. Sia $f \in \mathcal{M}(S)$ una funzione meromorfa, allora df è un differenziale meromorfo e così è anche

$$\omega = \frac{df}{f} .$$

Se in una carta (U, φ) si pone $f_U = f \varphi^{-1}$ e $\omega_U = (\varphi^{-1})^* \omega$, si ha $\omega_U = \frac{df_U}{f_U}$. Dunque

$$\begin{aligned} \text{Res}_p \frac{df}{f} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{df_U}{f_U} \\ &= \text{Res}_0 \frac{df_U}{f_U} \\ &= \nu_0(f_U) \\ &= \nu_p(f) . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Concludiamo questa sezione dimostrando il teorema dei residui su di una superficie di Riemann S .

TEOREMA (2.17) (DEI RESIDUI). *Sia S una superficie di Riemann. Sia $G \subset S$ una regione regolare a chiusura compatta. Sia ω una 1-forma meromorfa che sia C^∞ in un intorno di ∂G , allora*

$$\sum_{p \in G} \text{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega .$$

Dim. La somma dell'enunciato è finita perché essendo \overline{G} compatto solo un numero finito di poli di ω sono contenuti in G . Siano essi p_1, \dots, p_n . Siano D_1, \dots, D_n piccoli dischi parametrici tali che

- i) D_j è centrato in p_j ,
- ii) $\overline{D}_j \cap \overline{D}_k = \emptyset, j \neq k$,
- iii) $\overline{D}_j \subset G, \forall j$.

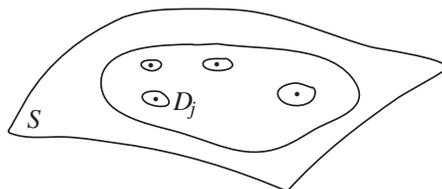


Fig.12

Essendo ω olomorfa in $G \setminus \{\cup \overline{D}_j\}$ si ha, sempre per il teorema di Stokes,

$$\sum_{p \in G} \text{Res}_p \omega = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_j} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \omega .$$

Q. E. D.

COROLLARIO (2.18). Sia S una superficie di Riemann e f una funzione meromorfa su S . Sia $G \subset S$ una regione regolare a chiusura compatta e non contenente sul suo bordo alcun polo di f . Allora

$$\sum_{p \in G} \nu_p(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{df}{f} .$$

Dim. Si applica il teorema a $\omega = df/f$ e si usa la (2.16).

Q. E. D.

Esercizi

1. Sia $f(z)$ una funzione meromorfa sul toro complesso \mathbb{C}/Λ , che come funzione meromorfa in \mathbb{C} non ha poli né zeri lungo ∂P , il bordo del parallelogramma fondamentale. Verificare che

$$\int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \Lambda .$$