Istituzioni di Geometria Superiore .
Esercizi :Forme differenziali.

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$la forma differenziale

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Verificare che ω è chiusa, ma non esatta

Esercizio 2. Si consideri in $\mathbb{S}^2$la forma differenziale

$$\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$$

Verificare che ω è chiusa, ma non esatta

Esercizio 3. Sia f la funzione cosí definita

$$f(x, y) = arctg\frac{y}{x}, x \neq 0, \text{ e } \frac{\pi}{2}, y > 0, x = 0$$

Verificare che f è C^∞ $df = \omega$ in esercizio 1, ma non c'è contraddizione.

Esercizio 4. Siano

$$\omega_1 = ydz - zdy, \ \omega_2 = zdx - xdz, \ \omega_3 = xdy - ydx.$$

Calcolare $\omega_1 \wedge \omega_2$, e $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$

$$f(x, y) = arctg\frac{y}{x}, x \neq 0, \text{ e } \frac{\pi}{2}, y > 0, x = 0$$

Esercizio 5 Trovare una forma differenziale ω tale che $\omega \wedge \omega \neq 0$

Esercizio 6 Si consideri in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$la forma differenziale

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i dx_i.$$

Dimostrare che esiste una $n - 1$ forma ω tale che

$$\mu \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

Esercizio 7 Risolvere $\mathbb{R}^3$ l' equazione $d\mu = \omega = dy \wedge dz$

Esercizio 8 Sia $\mu \in \mathcal{E}^k(M)$ una forma differenziale chiusa e $\omega \in \mathcal{E}^h(M)$ una forma differenziale esatta. Verificare che$\mu \wedge \omega$ èsatta.

Esercizio 9 Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y, z) = (xy, yz^2, z^3)$, calcolare $f^*(ydz)$

Esercizio 10 Sia $\mathbb{B}^n$ la n palla unitaria e $\mathbb{S}^{n-1}$ la $n - 1$ sfera unitaria. Mostrare che

$$vol(\mathbb{S}^{n-1}) = nvol(\mathbb{B}^n)$$

Sugg: Applicare il teorema di Stokes alla $n - 1$ forma

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \dots dx_n$$