Variabile Complessa
Esonero 3/5/2019

Esercizio 1. Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

per $1 < |z| < 2$.

Soluzione

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{(z-2)} = -1/z\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2)} =$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Esercizio 2. Trovare il numero di soluzioni di

$$z^6 - 5z^4 + 2z^2 - i = 0$$

nella corona circolare $1/2 < |z| < 1$.

Soluzione Basta valutare i possibili $|f(z)|$ e $|g(z)$ per $|z| = 1$ e per $|z| = 1/2$ Per $|z| = 1$, $f(z) = -5z^4$ e $g(z) = z^6 + 2z^2 - i$ ci dicono che abbiamo 4 zeri all' interno del disco $D_1(0)$. Per $|z| = 1/2$, $f(z) = -i$ e $g(z) = z^6 - 5z^4 + 2z^2$ ci dicono che non abbiamo zeri all' interno del disco $D_{1/2}(0)$. Quindi nella corona circolare ci sono 4 zeri

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1/3}}{x^2+1}dx.$$

Soluzione Applichiamo la formula

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{1/3}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{sen(4\pi/3)}\sum_{a\in\mathbb{C}^+} Res(f,a) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Poiché le singolarità sono in $\pm i$ e i contributi al calcolo dei residui sono

$$\frac{(-i)^{1/3}}{2i} = \frac{e^{-i\pi/6}}{2i} \qquad \frac{(i)^{1/3}}{2i} = \frac{-e^{i\pi/6}}{2i}$$

Esercizio 4. Determinare il massimo di $|f|$ su $\overline{D_1(0)} = \{z \in \mathbb{C}, \text{ t.c. } |z| \leq 1\}$ per

$$f(z) = cosz, \quad f(z) = senz$$

Soluzione Abbiamo $z = x + iy$ con $x^2 + y^2 = 1$. Applichiamo le formule generali

$$cosz\overline{cosz} = \frac{cosh2y + cos2x}{2}, \quad senz\overline{senz} = \frac{cosh2y - cos2x}{2}.$$

Nel primo caso è immediato che $cosh2y$ ha un massimo in $y = \pm 1$ in questo caso $x = 0$ e abbiamo anche un massimo per $cos2x$ ad $x = 0$, quindi $|cosz|$ ha come massimo

$$\frac{\sqrt{e^2 + e^-2 + 2}}{2}.$$

Nel caso di $senz$ scriviamo $x = \sqrt{1-y^2}$ e consideriamo

$$cosh2y - cos2\sqrt{1-y^2}$$

per $0 \leq y \leq 1$. La funzione è crescente poiché la derivata è

$$2senh2y + sen2\sqrt{1-y^2}\frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} \geq 2senh2y - 4y \geq 0$$

quindi un massimo in $y = 1$ (tutto vale anche per -1) Quindi si ha come massimo

$$\sqrt{\frac{senh2}{2}}.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}$$

Soluzione Calcoliamo il residuo in $z_0 = e^{\pi i/3}$ allora consideriamo il cammino $\alpha_R(t)$ dato

$$\alpha(t) = t, \ 0 \leq t \leq R$$
$$\alpha(t) = Re^{it} \ 0 \leq t \leq 2\pi/3$$
$$\alpha(t) = -te^{i2\pi/3}, \ 0 \leq t \leq R$$

Facendo le dovute sostituzioni si ottiene

$$(1 - e^{2\pi i/3}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} = 2\pi i \frac{1}{3e^{2\pi i/3}}$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$