

Variabile Complessa
Esercizi 3

Esercizio 1. Verificare quali tra le seguenti funzioni ha una singolarità eliminabile in $z = 0$:

$$\frac{e^z}{z^{17}}, \quad \frac{z(\cos z - 1)}{\operatorname{sen}^3 z}, \quad \frac{z^3}{z^3 + z^5}$$

Esercizio 2. Trovare l'ordine dei poli in $z = 0$ delle seguenti funzioni

$$\frac{e^z}{z^{17}}, \quad \frac{\cos z}{z^3}, \quad \frac{e^{z^2} - 1}{z^3}$$

Esercizio 3. Trovare tutte le singolarità di

$$\frac{(z - 1)^2(z - 3)}{1 - \operatorname{sen}(\pi z/2)}$$

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) dx$$

Esercizio 5. Decidere se esistono funzioni analitiche $f_k : D_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, 2, 3, 4$ tali che

$$f_1(1/2n) = f_1(1/(2n - 1)) = \frac{1}{n}, n \geq 1, \quad f_2(1/n) = f_2(-1/n) = \frac{1}{n^2}, n \geq 1,$$

$$f_3^{(n)}(0) = (n!)^2, n \geq 0 \quad f_4^{(n)}(0) = \frac{n!}{n^2}, n \geq 0$$

Esercizio 6. Siano $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, analitiche. Assumiamo

$$f(g(z)) = 0, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dimostrare che se g non è costante, allora $f = 0$

Esercizio 7. Siano $f, g \in \mathcal{O}(D_1(0))$ e continue lungo $\partial(D_1(0))$, assumiamo inoltre che in $\partial(D_1(0))$ si abbia $|f(z)| = |g(z)|$. Verificare che se f e g non hanno zeri in $\overline{D_1(0)}$, allora esiste una costante λ con $|\lambda| = 1$ e $f(z) = \lambda g(z)$.

Sugg: Considerare i quozienti