Variabile Complessa
Esercizi 4

Esercizio 1. Espandere in serie di Laurent la funzione $f = \frac{2}{z^2-4z+3}$ nelle tre corone circolari centrate in 0,

$$0 < |z| < 1, \quad 1 < |z| < 3, \quad |z| > 3$$

Esercizio 2. Espandere in serie di Laurent la funzione $f = \frac{z}{z^2+1}$ in $0 < |z - i| < 2$.

Esercizio 3. La seguente identità

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n.$$

contraddice l' unicità dell' espansione di Laurent?

Esercizio 4. Consideriamo la successione di Fibonacci definita per ricorsività da

$$a_0 = 1,\, a_1 = 1,\, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,\mathrm{per}\,n \geq 2.$$

Dimostrare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,\mathrm{coincide\,con}\,f = \frac{1}{1-z-z^2}$$

Esercizio 5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, verificare che si ha la seguente espressione per i numeri di Fibonacci

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}.$$

Esercizio 6. La funzione $cot\pi z$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{H}_1 \cup \mathbb{H}_1^-$. Trovare le corrispondento espansioni di Fourier nei due semipiani.