**Geometria. a.a. 2022-23**

Prova scritta del 23 Gennaio 2023

**Esercizio 1.** In $\mathbb{R}^3$ sia assegnato il prodotto scalare

$$< X, Y >= x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$$

i) Verificare che tale prodotto scalare è definito positivo.
ii) Trovare una base ortonormale rispetto al dato prodotto scalare del sottospazio $W$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, 2, -2), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (-2, 0, 4).$$

**Soluzione.** i)

$$< X, X >= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_2 + x_3)^2$$

La somma di questi quadrati è sempre positiva eccetto che nel caso $X = 0$
ii)

$$2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.$$

$$v_1 = (1, 2, -2), \quad v_2 = (0, 1, 0)$$

formano una base di $W$. Inoltre

$$< v_1, v_2 >= 6 - 4 = 2$$

Quindi

$$w_1 = v_2,\ w_2 = v_1 - (2/3)v_2 = (1, 4/3 - 2)$$

è una base ortogonale e una base ortonormale è

$$u_1 = (1/\sqrt{3})w_1, \quad u_2 = (\sqrt{3}/\sqrt{11})w_2$$

**Esercizio 2.** Sia

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

i) Verificare se $S$ è diagonalizzabile.
ii) Calcolare autovalori e autovettori di $S$.

**Soluzione.** i) $P_S(t) = det(S - t1_3) = -(t - 1)(t + 1)(t - 2)$ Gli autovalori sono distinti, quindi diagonalizza.
ii) Gli autovettori di $S$ sono

$$v_1 = (3, -2, 6),\ v_{-1} = (1, 0, 1),\ v_2 = (-1, 0, 2).$$

**Esercizio 3.** Si consideri il sistema di 4 equazioni in 4 incognite:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + (t-2)x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_4 = 1 - t \end{cases}$$

Studiare la compatibilità del sistema e trovare le soluzioni al variare di $t \in \mathbb{R}$.

**Soluzione.** Applicando l' eliminazione di Gauss, si ottiene la matrice

$$\left|\begin{array}{cccc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -t+1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & t-3 & -t+3 \end{array}\right|$$

Quindi il sistema ammette un' unica soluzione per ogni $t \neq 3$. Per $t = 3$ il sistema diventa

$$\left|\begin{array}{cccc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

e le soluzioni sono nella forma

$$v = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + \mathrm{Span}(3, 0, -1, 1)$$

Per $t \neq 3$ abbiamo

$$x_4 = -1, \quad x_3 = \frac{t+2}{2}, \quad x_2 = \frac{t-2}{2}, \quad x_1 = \frac{-t-6}{2}$$

**Esercizio 4.** Sia $T : \mathbb{C}_2[t] \to \mathbb{C}_2[t]$ data da

$$p(t) \to (t+1)p''(t) - 2tp'(t) + 2p(t)$$

i) Verificare che $T$ è lineare.
ii) Descrivere $\mathrm{Ker}\, T$ e $\mathrm{Im}\, T$.
iii) Determinare autovalori e autovettori di $T$.

**Soluzione.** i)Sia $p(t) = a + bt + ct^2$, allora

$$T(p(t)) = 2c(t+1) - 2t(2ct + b) + 2(a + bt + ct^2) = (2c + 2a) + 2ct - 2ct^2$$

L' espressione è omogenea di primo grado negli elementi della base $1, t, t^2$, quindi è lineare.
ii) $\mathrm{Ker}\, T$ è dato dalle equazioni

$$c + a = c = c = 0$$

quindi $\mathrm{Ker}\, T = \{t\}$ e $\mathrm{Im}\, T = < 1, 1 + t - t^2 >$
iii) La matrice associata a $T$ rispetto alla base $1, t, t^2$ risulta essere

$$\left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right|$$

Gli autovalori sono $2, 0, -2$. La molteplicità geometrica di ogni autovalore è 1, quindi risolvendo i sistemi associati

$$V_2 = \mathrm{Span}(1), \quad V_{-2} = \mathrm{Span}(-1 - 2t + 2t^2), \quad V_0 = \mathrm{Span}(t)$$

**Esercizio 5.** Nello spazio delle matrici reali $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sia definito il prodotto scalare definito positivo

$$< A, B >= \mathrm{tr}(A^T B).$$ [1]

Sia $f$ l' operatore definito da

$$f(A) = -A^T$$

i) Verificare che $f$ è simmetrico[2].
ii)Verificare che $f$ è un'isometria lineare, ovvero $\|f(A)\|=\|A\|$ per ogni $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

**Soluzione.**

Usiamo le proprietà della traccia, in particolare

$$\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}(C^T), \quad \mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$$

i) Simmetria:

$$< f(A), B >= \mathrm{tr}(-(A^T)^T B) = \mathrm{tr}(-AB) = \mathrm{tr}((-AB)^T) = \mathrm{tr}(-B^T A^T) = \mathrm{tr}(-A^T B^T) =< A, f(B) >$$

ii) Isometria

$$< f(A), f(B) >= \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}((AB^T)^T) = \mathrm{tr}((BA^T) ==< A, B >$$

[1] Ricordiamo che data una matrice quadrata $A$ la traccia $\mathrm{tr}(A)$ è la somma dei coefficienti sulla diagonale.

[2] Anche detto autoaggiunto.