**Geometria per fisica, a.a. 2021-22**
**Prova scritta del 24.1.2022**

**Esercizio 1.** Si considerino i sistemi lineari

$$(1)\ \begin{cases} x+\ y+\ \ \ z = 1 \\ x+\ y-\ \ \ z = 0 \\ 3x+3y-13z=-5 \\ 5x+5y-13z=-2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (2)\ \begin{cases} x+\ y+\ \ \ z=0 \\ x+\ y-\ \ \ z=0 \\ 3x+3y-13z=0 \\ 5x+5y-13z=0 \end{cases}$$

i) Determinare i sottoinsiemi $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^3$ delle soluzioni dei sistemi risp. (1) e (2).
ii) $U_1$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? E $U_2$? (Motivare le risposte!).
iii) Osservato che il sistema (2) è il sistema lineare omogeneo associato al sistema (1), si illustri la compatibilità delle risposte date nei punti i) e ii) con il teorema di struttura relativo al confronto tra le soluzioni di un sistema lineare e le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

**Esercizio 2.** Si considerino le seguenti terne di vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1,1,2),\ \vec{u}_2 = (-1,2,1),\ \vec{u}_3 = (1,7,8);$$

$$\vec{w}_1 = (7,5,2),\ \vec{w}_2 = (-3,-2,1),\ \vec{w}_3 = (-2,-1,5).$$

e i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$: $U =$ Span $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ e $W =$ Span $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$.

i) Determinare una base di $U$ e una base di $W$.
ii) Scrivere equazioni cartesiane dei sottospazi $U$ e $W$.
iii) Determinare una base di $U \cap W$.

**Esercizio 3.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

i) Scrivere il polinomio caratteristico e determinare gli autovalori di $A$.
ii) Spiegare perché $A$ è diagonalizzabile. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $A$.
iii) Sia $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare rappresentata dalla matrice $A$. Determinare la segnatura di $g$

**Soluzione esercizio 1.**
i) + ii) Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -13 \\ 5 & 5 & -13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -13 & -5 \\ 5 & 5 & -13 & -2 \end{pmatrix}$$

sono matrici rispettivamente dei coefficienti e dei coefficienti e termini noti del sistema lineare (1). Con varie modalità è possibile riconoscere che rg $A = 2$ e rg $B = 3$. P. es. si può osservare che $A$ ha solo due righe linearmente indipendenti, essendo la sua terza riga combinazione lineare delle prime due, con coefficienti $-5$ e 8; inoltre l'ultima riga di $A$ è somma delle prime tre. Da ciò segue che rg $A = 2$. Delle precedenti relazioni di combinazione lineare tra le righe di $A$, la prima vale anche per le righe di $B$. Tuttavia l'ultima riga di $B£$ non è somma delle altre, e questo consente di concludere che rg $B = 3$. Il teorema di Rouché-Capelli implica dunque che il sistema (1) non ha soluzioni, ovvero $U_1 = \emptyset$.

Per quanto riguarda invece il sistema lineare omogeneo (2), esso certamente ammette soluzioni, ed essendo $A$, con rg $A = 2$, la sua matrice dei coefficienti, ne ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$, ovvero dipendenti da un parametro. Per ottenerle esplicitamente ci si può limitare alle prime due equazioni del sistema, ovvero trattando l'incognita $x = t$ come parametro alle due equazioni

$$\begin{cases} y + z = -t \\ y - z = -t \end{cases}$$

L'insieme $U_2$ delle soluzioni del sistema omogeneo (2) è dunque costituito dalle terne $(t, -t, 0)$, con $t \in \mathbb{R}$. Esso è certamente un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, sia perché spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, sia perché esplicitamente l'insieme $U_2$ risulta chiuso rispetto alle operazioni di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. L'insieme $U_1 = \emptyset$ non è invece un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, mancando in esso il vettore nullo.

iii) Quanto sopra è certamente compatibile con il teorema di struttura. Infatti tale teorema, nell'ipotesi in cui si ha un sistema lineare senza soluzioni, come risulta appunto il sistema (1), non afferma assolutamente nulla: il sistema omogeneo associato infatti ha sempre soluzioni, e nella situazione attuale del sistema (2), ne ha infinite.

**Soluzione esercizio 2.**

i) Risulta subito che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0,$$

e pertanto sia i vettori $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ che i vettori $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ sono linearmente dipendenti (e naturalmente sia $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ che $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ sono linearmente indipendenti). Dunque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ è una base di $U$ e $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ è una base di $W$

ii) Le equazioni cartesiane di $U$ e di $W$ possono scriversi richiedendo che il vettore generico $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ sia combinazione lineare risp. di $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ e di $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Le equazioni sono dunque quelle dei due piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$U : \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad W : \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 7 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ovvero $U : -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0$, $W : 9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0$. Le equazioni di $U \cap W$ sono dunque date dal sistema costituito da tali due equazioni:

$$\begin{cases} x_1 + \phantom{13}x_2 - x_3 = 0 \\ 9x_1 - 13x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni (dipendenti dal parametro $x_3 = t$) p.es. $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{6}{11}t, \frac{5}{11}t, t)$. Una base di $U \cap W$ è dunque costituita dal vettore $\vec{v} = (\frac{6}{11}, \frac{5}{11}, 1)$, che si ottiene per $t = 1$.

**Soluzione esercizio 3**.

i) Il polinomio caratteristico di $A$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 36\lambda = \lambda(\lambda - 6)^2$$

fornisce subito gli autovalori $0, 6$, il secondo con molteplicità algebrica 2, della matrice $A$.

ii) Poiché $A$ è simmetrica, risulta diagonalizzabile e ammette una base ortonormale di autovettori. I rispettivi autovettori si determinano risolvendo i sistemi lineari omogenei

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ovvero:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 2z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4x - 2y - 2z = 6x \\ -2x + 4y - 2z = 6y \\ -2x - 2y + 4z = 6z \end{cases}.$$

Il primo sistema ha per soluzioni una retta vettoriale di $\mathbb{R}^3$, autospazio $V_0$ dell'autovalore 0, il secondo un piano vettoriale $V_6$, autospazio di 6. Generatori di tali sottospazi, e dunque insieme una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice $A$, sono i vettori:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (-1, -1, 2),$$

Si normalizza facilmente in

$$\vec{u}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0), \quad \vec{v}_3 = (1/\sqrt{6})(-1, -1, 2).$$

iii) Poichè $A$ è simmetrica, $g$ è un prodotto scalare. L'autovalore 0 mostra che gli indic sono $2, 1, 0$.